सांख्यिकी

(STATISTICS)

(भारतीय विश्वविद्यालयों की स्नातक कक्षाओं के पाठ्यक्रमानुसार)

लेखक

छत्रसिंह यादव, एम. काम,
कामर्स विभाग,
गवर्नमेंट कॉलेज, अजमेर

एल एम पोरवाल, एम काम., एल एल. बी.
अकाउन्टेंसी एवं सांख्यिकी विभाग
यूनिवर्सिटी कॉलेज आफ कॉमर्स, जयपुर

तथा

डा० हरिश्चन्द्र शर्मा, एम. ए, एम. काम, पी. एच. डी.,
व्यावहारिक अर्थशास्त्र एवं वित्त विभाग,
यूनिवर्सिटी कॉलेज आफ कामर्स, जयपुर

तृतीय संस्करण
(पूर्णरूपेण परिवर्द्धित एवं संशोधित)

रमेश बुक डिपो

जयपुर

प्रकाशक
बी एम. माहेश्वरी
रमेश बुक डिपो
जयपुर

मूल्य दस रुपये

मुद्रक :
चन्द्रोदय प्रिन्टर्स, जयपुर

तृतीय संस्करण की भूमिका

साख्यिकी का तृतीय सस्करण पाठकों की सेवा में प्रस्तुत करते हुए हमें हर्ष है। इस सस्करण में प्राय सभी अध्यायों में आवश्यक परिवर्तन एव परिवर्द्धन द्वारा सुधार किया गया है, अनेक नये प्रश्न तथा उदाहरण सम्मिलित किये गये हैं तथा मौखिक एव व्यवहारिक दोनों ही अ शों को अधिक स्पष्ट एव बोधगम्य बनाने की चेष्टा की गई है। इस पर भी पुस्तक के कलेवर में अनावश्यक वृद्धि नहीं होने दी गई है जिसके लिये हमारे प्रकाशक तथा मुद्रक धन्यवाद के पात्र हैं।

तृतीय स ग्ण को वर्तमान रूप में प्रस्तुत करने में अनेक स्नेही अध्यापक , एव । र्थियो का सक्रिय सहयोग प्राप्त हुआ है जिसके लिये हम हृदय हैं। इस सम्बन्ध में हम राजस्थान विश्व विद्यालय (कामर्स फैकल्टी) के श्री श्याम डगायच, श्री सी आर कोठारी तथा श्री राजनारायणसिंह के विशेष आभारी हैं। पुस्तक के नवीन सस्करण के सम्बन्ध में भी हम सभी सुझावों का स्वागत करेंगे। हमें आशा है कि इस दिशा में अध्यापक बन्धुओं का स्नेहमय सहयोग आगे भी अधिकाधिक प्राप्त होता रहेगा।

१ जनवरी १९६४ लेखक

द्वितीय संस्करण की भूमिका

"साख्यिकी" का नवीन सस्करण अनेक नवीनताओं के साथ पाठकों की सेवा में प्रस्तुत करते हुए हमें हर्ष है, इस सस्करण में न केवल मौखिक सामग्री एव अ को तथा तथ्यों को आधुनिकतम रूप में प्रस्तुत किया गया है बल्कि व्यावहारिक (Practical) अ शो को लगभग पुन लिखा गया है। पुस्तक में जिन चिन्हों (Symbols) का प्रयोग किया गया है वह "साख्यिक ससार" में प्रतिष्ठित हो चुके हैं और उनका प्रयोग करने से ही लब्ध-प्रतिष्ठ विदेशी विद्वानों की प्रसिद्ध पुस्तकों का लाभ उठाया जा सकता है, अत. पुराने चिन्हों, सूत्रों तथा रीतियों को नवीनतम एव आधुनिकतम कलेवर प्रदान कर पुस्तक को विदेशी भाषा की प्रतिष्ठित पुस्तकों के समकक्ष लाने का प्रयत्न किया गया है।

अन्त में सहयोगी अध्यापकों एवं सम्बन्धित महानुभावों से हमारा निवेदन है कि पुस्तक को अधिक उपयोगी एव उपादेय बनाने हेतु अपने अमूल्य सुझाव देने की कृपा करें, हम इसके लिये आभारी रहेंगे।

१५ जुलाई १९६२ लेखक

दो शब्द

सख्या-शास्त्र पर प्रस्तुत पुस्तक राजस्थान, उत्तर-प्रदेश तथा भारत के अन्य हिन्दी भाषी राज्यो की डिग्री कक्षा के विद्यार्थियो के पाठ्य-क्रमानुसार लिखी गई है। मातृभाषा हिन्दी मे वाणिज्य एव अर्थशास्त्र विषयक साहित्याभाव का अनुभव गत कुछ वर्षों मे अधिकाधिक होने लगा है क्योकि अनेको विश्वविद्यालयो मे सभी विषयो का पठन पाठन हिन्दी मे होने लगा है। सख्या शास्त्र मे तो हिन्दी पुस्तको का लगभग अकाल ही रहा है। दूसरी ओर अग्रेजी भाषा के ज्ञान का स्तर गत वर्षों मे इतना अधिक गिर गया है कि अधिकाश विद्यार्थी सख्या-शास्त्र का अध्ययन भी राष्ट्रभाषा मे ही करने के इच्छुक होते जा रहे हैं।

प्रस्तुत पुस्तक सांख्यिकी के सिद्धान्तो एव भारतीय अक समस्याओ का निरूपण एव विश्लेषण राष्ट्रभाषा मे करने की दिशा में एक प्रयास मात्र हैं। इसी उद्देश्य को दृष्टिगत रखते हुए आरम्भ से अत तक इस बात का विशेष ध्यान रखा गया है कि सामान्य विद्यार्थी का भी पुस्तक की भाषा कठिन न जान पडे। अत यथा सम्भव सरलतम पारिभाषिक शब्दो का प्रयोग किया गया है तथा समानान्तर अग्रेजी शब्द कोष्ठक मे दे दिये गये है।

लेखक यह दावा नही करते कि पुस्तक में दी गई सामग्री मौलिक है परन्तु सम्पूर्ण सामग्री की भाषा एव प्रस्तुतीकरण अवश्यमेव मौलिक है। पुस्तक मे मौलिक सामग्री आवश्यक विस्तार से दी गई है तथा अधिकाधिक व्यावहारिक प्रश्न उदाहरण के रूप मे दिये गये हैं ताकि सामान्य बुद्धि का विद्यार्थी भी उनकी सहायता से साख्यिकी के सभी प्रश्न हल कर सके। इसके अतिरिक्त प्रत्येक अध्याय के अन्त मे उसका साराश दे दिया गया है जिससे सम्पूर्ण अध्याय का सत्व (Essence) दृष्टि मात्र मे ही हृदयङ्गम किया जा सके।

पुस्तक के लेखन मे विषय के अनेक अधिकारी विद्वानो के ग्रथो का सहयोग प्राप्त किया गया है जिसके लिये लेखक हृदय से आभारी हैं। लेखक उन सभी सहयोगियो, मित्रो एव विद्यार्थियो के भी कृतज्ञ हैं जिनके निरतर अनुरोध पर इसका लिखना एवं इस रूप मे प्रस्तुत करना सम्भव हो सका है। यदि इससे उनको किञ्चिनमात्र भी लाभ पहुच सका तो लेखक अपना प्रयत्न सफल समझेंगे।

जयपुर

१ जुलाई १९५८ लेखक

विषय - सूची

पुस्तक में प्रयोग किए गए मुख्य चिन्हों (symbols) की सूची

$\bar{X}$ = समान्तर मध्यक – Arithmetic Mean

A = कल्पित समान्तर मध्यक – Assumed Arithmetic Mean

X = मूल्य – Value or size

f = आवृत्ति – Frequency

N = मदों की संख्या – Total number of items

Σ = योग – Sigma (Capital) – summation

x = विचलन – Deviation (X-A)

l_2 = वर्गान्तर की ऊपर सीमा – Upper limit of a class interval.

l_1 = वर्गान्तर की अपर सीमा – Lower limit of a class interval

i = वर्ग-विस्तार – Interval or magnitude of a class interval

M = मध्यका – Median

M' = कल्पित मध्यका – Assumed median

cf = सचयी आवृत्ति – Cumulative frequency

C_o = पिछले वर्गान्तर की सचयी आवृत्ति – Cumulative frequency of the preceding class interval

Z = भूयिष्ठक – Mode.

Δ = अन्तर Delta (capital) – difference

g = गुणोत्तर मध्यक – Geometric mean

g' = भारित गुणोत्तर मध्यक – Weighted Geometric Mean.

$\bar{X}'$ = भारित समान्तर मध्यक – Weighted Arithmetic Mean

h = हरात्मक मध्यक – Harmonic Mean

h' = भारित हरात्मक मध्यक – Weighted Harmonic Mean

W = भार – Weights.

δ = माध्य-विचलन – (delta-small) Mean or Average Deviation.

σ = प्रमाप विचलन – (sigma-small) Standard Deviation.

$d_{\bar{x}}$ = स० म० का मूल्यों से विचलन ($X-\bar{X}$) Deviation of Arithmetic Mean from values.

d_M = मध्यका का मूल्यों से विचलन (X-M) – Deviation of Median from values.

d_Z = भूयिष्ठक का मूल्यों से विचलन (X-Z) – Deviation of Mode from values

d_M' = कल्पित मध्यका का मूल्यों स विचलन (X-M') - Deviation of assumed Median from values

CV = विचरण गुणक – Coefficient of Variation.

Sk = विषमता – Skewness

j = विषमता गुणक – Coefficient of Skewness

r = सह-सम्बन्ध गुणक – Coefficient of Correlation

P = सुतथ्यता – Precision

F = उच्चावचन – Fluctuation

C = घनक – Modulus

V = विचरणाक – Variance

v_1, v_2, v_3, v_4 = कल्पित स० म० से अपकिरण के चारो घात – The four moments about arbitrary mean.

$\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4$ = स० म० से अपकिरण के चारो घात – The four moments about mean (before Sheppard's correction)

$\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ = स० म० से अपकिरण के चारो घात–शैपर्ड की शुद्धि के बाद (केवल सतत श्रेणी में ही) The four moments about mean after Sheppard's correction in continuous variable.

β_2 = शीर्षत्व–Kurtosis

β_1 = विषमता गुणक (घात से) Coefficient of Skewness (from Moments)

b_{YX} = प्रतीपगमन गुणक (Y का X पर) Regression Coefficient of Y on X

b_{XY} = प्रतीपगमन गुणक (X का Y पर) Regression Coefficient of X on Y.

अध्याय १
अर्थ तथा परिभाषा
(Meaning and definition)

"With numbers all men may contend
Their charming systems to defend" —*Gothe*

संख्या विज्ञान अथवा संख्या शास्त्र का जन्म राष्ट्रीय संगठन के साथ साथ हुआ। ज्यों ज्यों आदिम जातियां संगठित होती गई त्यों त्यों उनके शासकों के लिए प्रबन्ध सम्बन्धी अंक एकत्रित करना आवश्यक हो गया। कर लगाने के लिए जनता की सम्पत्ति सम्बन्धी अंक तथा युद्ध के लिए सामरिक शक्ति की सम्पूर्ण जानकारी रखना आरम्भ किया गया। मिश्र में ईसा से 3050 वर्ष पूर्व पिरामिड निर्मित करने के लिए देश की सम्पत्ति तथा जनसंख्या सम्बन्धी अंक संकलित करने का विवरण मिलता है। इसके लगभग सोलह शताब्दियों बाद रैमेजेज द्वितीय ने जनता में भूमि का यथोचित वितरण करने के लिए मिश्र की सारी भूमि सम्बन्धी अंक एकत्रित करवाये। इसके अतिरिक्त बाइबिल में यह जिक्र मिलता है कि मूसा तथा डेविड के द्वारा जनसंख्या सम्बन्धी अंक सुव्यवस्थित रूप में रखे जाते थे।

रोम में भी कर निर्धारण करने तथा जनसंख्या सम्बन्धी जानकारी प्राप्त करने के लिए अंक संकलित करने के प्रमाण मिलते हैं। इसके लिए रोम के नागरिकों को विशेष धार्मिक स्थानों पर मृत्यु तथा जन्म सम्बन्धी सूचना अंकित करवानी पड़ती थी। मध्ययुग में इङ्गलैंड के विजयी विलियम तथा जर्मनी के फ्रेडरिक द्वितीय ने भी भूमि, जन-सम्पत्ति तथा जनसंख्या सम्बन्धी अंक एकत्रित करवाने की ओर ध्यान दिया। वास्तव में यह अंक राजाओं, नवाबों अथवा सत्ताधारी जमींदारों द्वारा शासन व्यवस्था सुसचालित करने के लिए एकत्रित करवाये जाते थे और अधिकतर वहां की जनसंख्या, भूमि अथवा सामरिक शक्ति का लेखा जोखा करने के लिए संकलित किये जाते थे। राजाओं तथा नवाबों को युद्ध बहुत करने पड़ते थे और बहुधा युद्ध व्यय की पूर्ति के लिए अतिरिक्त कर लगाना अनिवार्य हो जाता था, अतः सम्पत्ति सम्बन्धी अंक संग्रह करना उपयोगी था।

भारत में भी प्राचीन काल से ही सुव्यवस्था के लिए विभिन्न अंकों का संकलन किया जाता रहा है। मौर्य काल में कौटिल्य (चाणक्य) द्वारा कुछ समितियां नियुक्त की गई थीं जो जन्म, मरण, भूमि व्यवस्था तथा अन्य लगभग सभी आर्थिक तथा सामाजिक क्षेत्रों के अंक संग्रह करती थीं। कौटलीय अर्थशास्त्र में शासन, सामाजिक व्यवस्था, सामरिक व्यवस्था आदि के सम्बन्ध में बहुत से तथ्य तथा अङ्क उपलब्ध हैं। गुप्त साम्राज्य में भी अंक संग्रहण की प्रथा प्रचलित थी। इसके पश्चात् अलाउद्दीन खिलजी के शासन में वस्तुओं के भाव, विभिन्न मदों से प्राप्त होने वाली कर सम्बन्धी आय के अङ्क उपलब्ध होना यह बतलाता है कि उस समय भी अङ्कों का रिकार्ड किसी न किसी

रूप में रखा जाता था। मुगल साम्राज्य में विशेषकर अकबर के शासन-काल में अङ्कों का प्रयोग बहुत होता था। अकबर के राजस्व-मन्त्री टोडरमल ने नई भूमि व्यवस्था के लिए भूमि की नए सिरे से जाच करवाई तथा नपवाया। अबुलफजल द्वारा लिखित "आइने अकबरी" में वेतन, जनसख्या तथा मूल्यो सम्बन्धी बहुत से समक मिलते हैं।

उपरोक्त तथ्यों से यह तो प्रकट है कि अक सग्रहण तथा सकलन का कार्य बहुत प्राचीन काल से चला आ रहा है परन्तु यह कार्य विशेष सुव्यवस्थित अथवा सगठित न होकर केवल सामयिक तथा भद्दा था। सतरहवी तथा अठारहवी शताब्दियो मे अङ्क सकलन का कार्य कुछ व्यवस्थित हो गया तथा तत्कालीन अर्थशास्त्रियो एव समाज शास्त्रियो *द्वारा अङ्को के आधार पर अनेक सिद्धान्तो की स्थापना हुई। माल्थस का जनसख्या का* सिद्धान्त तथा रिकार्डो का लगान सिद्धान्त तथ्यो के आधार पर ही प्रकाशित किये गये। औद्योगिक क्रान्ति के कारण अनेक आर्थिक, सामाजिक तथा अन्य समस्याएं उत्पन्न हो गई जिसके समाधान के लिए विभिन्न प्रकार के अकों का एकत्रीकरण अनिवार्य हो गया। फलस्वरूप सन् 1801 मे इगलैंड मे प्रथम जन-गणना की गई ताकि तथ्यो के आधार पर वास्तविक आर्थिक तथा सामाजिक स्थिति का विश्लेषण किया जा सके। इस प्रथम प्रयास का महत्व इसी बात से प्रकट है कि इसके पश्चात् जन-गणना का कार्य प्रति दशाब्द नियमित रूप मे किया जाने लगा। अकों का महत्व औद्योगिक क्रान्ति के पश्चात् और भी बढता जा रहा है। सन् 1857 में एगल (Engels) ने जर्मनी में विभिन्न परिवारो सम्बन्धी अङ्क एकत्रित कर एगल नियम स्थापित किया तथा मार्क्स ने 'दास कैपिटल' में अको तथा तथ्यो के आधार पर ही पूजीवाद के विरुद्ध एक शोध पुस्तिका प्रकाशित की। *बीसवीं शताब्दी मे तो अङ्को का प्रयोग लगभग सर्वव्यापक हो गया है।* प्रत्येक देश में लगभग सभी क्षेत्रो मे विभिन्न विभागो द्वारा नियमित अथवा यदाकदा विशेष रूप से, आकडो तथा तथ्यो का सग्रहण करवाया जाता है।

प्रसिद्ध अर्थशास्त्री केन्स (Keynes) की राय मे जर्मनी के एकनवाल (Achenwall) को आधुनिक साख्यिकी (Modern Statistics) का जन्म-दाता कहा जा सकता है। इन्होने सर्व प्रथम इस बात पर बल दिया कि साख्यिकी को भी गणित शास्त्र की अन्य शाखाओ—बीज गणित, रेखा गणित, अक गणित आदि—की भाति एक अलग शाखा मानना चाहिए।

सांख्यिकी की उत्पत्ति

साख्यिकी (Statistics) शब्द अग्रेजी के शब्द 'State' राज्य से निकला हुआ है। लेटिन भाषा में state को status कहा जाता था तथा साख्यिक (Statistician) को statista रोमन भाषा मे state को Stato *तथा साख्यिक को statistieus कहा जाता था।*

अग्रेजी भाषा मे अक-समूह (समक) तथा साख्यिकी के लिए एक ही शब्द है परन्तु इसका प्रयोग दो अर्थों मे होता है, एक बहुवचन सज्ञा के रूप मे, जिसका तात्पर्य होता है अक समूह अथवा समक, जैसे जनसख्या सम्बन्धी समक (Population Statistics), दूसरे एकवचन सज्ञा के रूप मे जिसका तात्पर्य होता है सख्या-शास्त्र।

दूसरा अर्थ अंक-संग्रहण तथा विवेचन सम्बन्धी प्रणालियों की ओर संकेत करता है। परन्तु यह स्मरण रखना चाहिये कि उपरोक्त अर्थों में से किसी में भी इसका प्रयोग हो, यह विषय संख्यात्मक तथ्यों से सम्बन्धित है और गुणात्मक तथ्यों का वर्णन भी इसके अन्तर्गत किसी न किसी रूप में संख्याओं में ही किया जाता है।

उपरोक्त विवरण से यह भ्रम उत्पन्न हो सकता है कि किसी भी प्रकार के बिखरे हुए अथवा असम्बद्ध अंक भी समङ्क कहे जा सकते हैं परन्तु ऐसा नहीं है। समंक वास्तव में ऐसे अङ्क हैं जो इंचों, फुटों, मीटरों अथवा अन्य इकाइयों में प्रकट किये गये हों तथा परस्पर सम्बन्धित हों। असम्बद्ध, बिखरे हुए अङ्क समङ्क नहीं कहला सकते। जैसे 25,26,27,28,29,30 संख्याएं तो हैं पर समंक नहीं। यदि यह कहा जाय कि पत्नियों की आयु 25, 26 तथा 27 वर्ष है और उनके पतियों की आयु क्रमश: 28, 29 तथा 30 वर्ष है तो यह समंक होंगे।

विशेषताएं

किसी भी विषय का अर्थ तथा परिभाषा जानने के पहिले यह जानना आवश्यक है कि उसकी विशेषताएं क्या हैं? उस विषय के क्या लक्षण हैं तथा उसमें क्या क्या सम्मिलित किया जाता है और कौन सी चीजें उसकी सीमा से परे हैं। सेक्रिस्ट (Secrist) ने सांख्यिकी की परिभाषा इस प्रकार से की है कि यदि उसका वाक्य-विच्छेद कर दिया जाय तो प्रत्येक उप-वाक्य एक विशेषता बन जाता है।

सेक्रिस्ट * के अनुसार समंक संख्याओं के रूप में प्रस्तुत और विविध कारणों से प्रभावित तथ्यों के वे समूह हैं जिनकी गणना या अनुमान यथोचित परिशुद्धता के साथ किया गया हो, जिनका संग्रहण किसी पूर्व निश्चित उद्देश्य के लिए किसी क्रमानुसार किया गया हो तथा जो एक दूसरे से सम्बन्धित हों।

(1) संख्याओं के रूप में प्रस्तुत—सांख्यिकी गुणात्मक तथ्यों को मान्यता नहीं देती है। अच्छा, बुरा, जवान, बुड्ढा, गरीब, धनी, तेज, कमजोर, धर्म, सभ्यता, आदि का सांख्यिकी में अध्ययन नहीं होता। इन तथ्यों का वर्णन अप्रत्यक्ष रूप में अंकों में किया जाने पर ही इन्हें सांख्यिकी के क्षेत्र में माना जाता है। यदि यह कहा जाय कि 1962 में खाद्यान्न की उपज 800 लाख टन हुई जबकि 1960 में 750 लाख टन ही हुई थी या 1961 में भारत की जनसंख्या 43.9 करोड़ हो गई जब कि 1951 में यह संख्या केवल 36 करोड़ ही थी, तो इन तथ्यों को सांख्यिकी के क्षेत्र में सम्मिलित किया जायगा।

(2) विविध कारणों से प्रभावित—बहुधा आर्थिक तथ्यों पर कई कारणों का एक साथ प्रभाव पड़ता है। यदि यह कहा जाय कि किसी देश में 1963 में चीनी

* "Statistics are aggregates of facts, affected to a marked extent by a multiplicity of causes, numerically expressed, enumerated or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purpose, and placed in relation to each other" —Horace Secrist

का उत्पादन 30 लाख टन हुआ जबकि पिछले वर्ष उपज 24 लाख टन ही थी तो हमें यह मानना होगा कि ऐसा किसी एक कारण से नहीं है प्रत्युत कई कारणों का एक साथ प्रभाव पड़ा होगा। वर्षा ठीक हुई होगी, खाद का समुचित प्रयोग किया गया होगा, बीज अच्छा दिया गया होगा, मजदूरों ने अपना कार्य लगन से किया होगा आदि। यदि हम कहें कि भारतवासियों की औसत आयु 42 वर्ष है जबकि नार्वे में रहने वाले औसत रूप से 73 वर्ष तक जीते हैं तो उसके अनेक कारण हैं। वहां की औसत आय अधिक है, रहन-सहन का स्तर अच्छा है, स्वास्थ्य पर समुचित ध्यान दिया जाता है आदि। हमारे संग्रहीत तथ्यों पर एक ही कारण का प्रभाव पड़ा हो ऐसी बात नहीं है।

(3) तथ्यों के समूह—एक अकेला अङ्क अथवा तथ्य भी समंक नहीं हैं। सड़क पर होने वाली एक दुर्घटना समंक नहीं होगी, परन्तु यदि किसी एक वर्ष में विभिन्न सड़कों पर होने वाली दुर्घटनाओं की तुलना की जा सके तो ऐसे अङ्क समङ्क होंगे। समंक व्यवस्थित अंकों के समूहों को कहते हैं जो एक नहीं अनेक तथ्यों का उद्घाटन करते हों।

(4) गणना या अनुमान—यदि हमारी जांच का क्षेत्र छोटा होना है तो हम सम्पूर्ण गणना करना ही पसंद करते हैं क्योंकि गणना-विधि से तथ्य शुद्ध प्राप्त होते हैं। यदि जांच का क्षेत्र विस्तृत है और उसमें मदों की संख्या अधिक है तो हम अनुमान विधि को ही अपनाते हैं। स्पष्ट है कि दूसरी विधि से संग्रहीत तथ्य सर्वथा शुद्ध नहीं हो सकते।

(5) यथोचित परिशुद्धता—प्रत्येक जांच में परिशुद्धता अलग अलग स्तर की हो सकती है। यदि हमारा उद्देश्य किसी समस्या के सम्बन्ध में साधारण जानकारी प्राप्त करना है तो हम अधिक शुद्धता पर ध्यान नहीं देंगे, जैसे फसलों की भविष्यवाणी करते समय इतनी शुद्धता पर ध्यान नहीं दिया जाता जितना उनकी वास्तविक उपज ज्ञात करते समय देना आवश्यक होता है। अतः सब प्रकार की जांच के लिए हम शुद्धता के समान नियम नहीं बना सकते। यदि हमें किसी विद्यालय में अध्ययन करने वाले परीक्षार्थियों का वजन ज्ञात करना है तो हम किलोग्राम तक तौल मालूम कर लेंगे। ग्राम, डेकाग्राम तक वजन मालूम करना उपयुक्त नहीं होगा लेकिन बम्बई से कलकत्ता तक की दूरी नापने के लिए किलोमीटर में नाप मालूम करना ही ठीक होगा। इसके अतिरिक्त समंक शत-प्रतिशत शुद्ध नहीं हो सकते उनमें अनुमानों का बहुत सहारा लेना पड़ता है।

(6) निश्चित उद्देश्य—किसी भी जांच का कार्य प्रारम्भ करने से पूर्व उसका उद्देश्य निश्चित करना आवश्यक होता है अन्यथा बहुत से अनावश्यक तथ्यों का संग्रहण हो सकता है जिन पर श्रम का अनावश्यक व्यय होता है। दूसरी दशा में कुछ आवश्यक तथ्य संग्रह होने से छूट सकते हैं जिन्हें पुनः एकत्रित करने में भी अतिरिक्त समय तथा धन व्यय करना पड़ सकता है। उदाहरणस्वरूप यदि औद्योगिक मजदूरों की मजदूरी सम्बन्धी अंक एकत्रित करने हैं तो यह स्पष्ट होना चाहिये कि ऐसा क्यों करना है, विभिन्न उद्योगों में मजदूरी की तुलना करनी है, मजदूरों की जीवन निर्वाह स्थिति जाननी है, अथवा उनकी मजदूरी में वृद्धि की मांग सम्बन्धी औचित्य पर विचार करने के लिए यह अंक एकत्रित किये जा रहे हैं। यदि यह स्पष्ट नहीं है तो न केवल समंक एकत्रित करना व्यर्थ होगा बल्कि अंक किसी भी कार्य के लिए पूर्णतया शुद्ध भी नहीं होंगे।

(7) क्रमानुसार—समंक एकत्रित करने में किसी विशेष पद्धति, क्रम तथा उद्देश्य का ध्यान रखा जाना आवश्यक है। अंक एकत्रित करने में सब अंकों को समान तरीके से ही सकलित अथवा संग्रहीत किया जाना चाहिये तथा क्रम में परिवर्तन बीच में नहीं होना चाहिए अर्थात् पूरे समूह के लिए एक ही क्रम रखना चाहिए अन्यथा उन से प्राप्त किये गए निष्कर्ष सन्देहजनक होंगे।

(8) एक दूसरे से सम्बन्धित—समस्त समंकों को एकत्र करने का उद्देश्य तुलना करना होता है। यदि समंक तुलनात्मक नहीं हो तो वह फलदायक नहीं होते हैं। समान वस्तुओं की समान वस्तुओं से ही तुलना की जा सकती है अतः तुलना करने के लिए अंक सजातीय (Homogeneous) होने चाहिए। भारतवर्ष में बेरी कार के उत्पादन की तुलना गेहूँ के उत्पादन से नहीं की जा सकती। तुलना करने के लिए एवं सम्बन्ध स्थापित करने के लिए तुलनीय वस्तुओं का आधार एक ही होना चाहिए। यदि किसी परीक्षा में एक विद्यार्थी के 50 में से 20 अंक व दूसरे विद्यार्थी के 100 में से 30 अंक आते हैं तो 20 अंकों की तुलना 30 अंकों से नहीं कर सकते क्योंकि इनकी तुलना करने का आधार एक नहीं है। या तो 20 को 2 से गुणा किया जावे या 30 में 2 का भाग दिया जावे। 40 अंकों की 30 अंकों से या 20 अंकों की 15 अंकों से तुलना करके यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि प्रथम विद्यार्थी पढ़ाई में अच्छा है।

अर्थ एवं परिभाषा

सांख्यिकी को प्राचीन काल में "शासकों का विज्ञान" (Science of Kings) कहा जाता था। उस समय राजा लोग बहुधा स्वयं ही शासक होते थे अतः अपने राज्य को सुचारु रूप से चलाने के लिए नाना प्रकार के आँकड़े एकत्रित करवाया करते थे। सांख्यिकी को इसीलिए उन दिनों राजनैतिक गणित (Political Arithmetic) भी कहा जाता था।

सांख्यिकी शब्द के अर्थ एवं क्षेत्र में पिछली कुछ शताब्दियों में बहुत परिवर्तन हुए हैं। अनेक लेखकों ने इस विषय को अलग अलग दृष्टि से देखा है। कुछ ने इसे अंक-समूह के रूप में माना है तथा कुछ ने 'सांख्यिकीय रीतियों' के रूप में। सन् 1869 के लगभग केटले (Quetelet) महाशय ने 'सांख्यिकी' की 180 से भी अधिक परिभाषाएं ढूंढ निकाली थीं। सांख्यिकी का अर्थ सही रूप में समझने के लिए यह आवश्यक है कि विविध परिभाषाओं को ऐतिहासिक क्रम में समझा जाय।

आधुनिक सांख्यिकी के जन्मदाता एकेनवाल (Achenwall) ने सांख्यिकी को अंक-समूह मानते हुए कहा है कि समंक किसी भी राज्य से सम्बन्धित ऐतिहासिक एवं वर्णनात्मक महत्वपूर्ण तथ्यों का संकलन है।[1]

वेबस्टर (Webster) ने कहा है कि समंक एक राज्य की जनता की

1 Statistics are a collection of noteworthy facts concerning states both historical and descriptive —Achenwall.

स्थिति से सम्बन्धित वर्गीकृत तथ्यों के समूह हैं जो संख्याओं में बतलाये जा सकते हैं।[1]

परन्तु आजकल इस शास्त्र का प्रयोग केवल राजकीय लाभ के अक संकलन में ही नहीं बल्कि जीवशास्त्र (Biology) तथा खगोलशास्त्र (Astronomy) आदि भौतिक एव सामाजिक विज्ञानों के क्षेत्रों में भी बहुत होता है। अत यह परिभाषा अत्यन्त सकीर्ण है।

प्रोफेसर बाउले का मत है कि "साख्यिकी वह विज्ञान है जो सामाजिक व्यवस्था को सामूहिक रूप में सभी दृष्टिकोणों से मापता है[2]। परन्तु यह परिभाषा सख्या-विज्ञान को सामाजिक कार्यकलापों अर्थात् मनुष्यों तथा उनकी क्रियाओं तक ही सीमित कर देती है जबकि आधुनिक युग में भौतिक शास्त्र, खगोल विद्या तथा समाज-शास्त्र आदि जिस किसी क्षेत्र में अङ्क तथा तथ्य संग्रहण की आवश्यकता हो, इस शास्त्र का प्रयोग किया जाता है। बाउले स्वय आगे चलकर कहते हैं कि "साख्यिकी गणना का विज्ञान है"[3]। इससे संख्या विज्ञान की क्षेत्र-सीमा तो समाप्त हो जाती है परन्तु एक दूसरी गभीर सीमा उत्पन्न हो जाती है। बड़े पैमाने के उद्योगों में साधारणतया उत्पादन वास्तविक गणना द्वारा नहीं बल्कि सम्भावनाओं तथा अनुमानों द्वारा मालूम किया जाता है। राष्ट्रीय आय तथा अन्य बहुत से ऐसे तथ्य हैं जिनके बारे में वास्तविक गणना हो भी नहीं सकती। दूसरे, सख्या-शास्त्र केवल तथ्यों अथवा अङ्कों की गणना करने का विज्ञान ही नहीं है बल्कि उन तथ्यों का वर्गीकरण, सारणीयन, तथा विश्लेषण कर परिणाम निकालने का कार्य भी इसके अन्तर्गत आता है। अत सख्या-शास्त्र केवल गणना का विज्ञान नहीं हो सकता।

बोडिंगटन सख्या शास्त्र को "अनुमानों तथा सम्भावनाओं का विज्ञान" मानते हैं।[4] यह सत्य है कि सख्या-शास्त्र में अनुमानों तथा सम्भावनाओं का बहुत सहारा लेना पड़ता है और सभाविता सिद्धान्त (Theory of Probability) तथा महाक जड़ता नियम (Law of Inertia of large Numbers) अनुमानों तथा सम्भावनाओं के महत्व को सिद्ध करते हैं परन्तु अनुमान तथा सम्भावनाएं भी वास्तविक तथा महत्वपूर्ण तथ्यों पर आधारित होते हैं। पहले किसी क्षेत्र से सम्बन्धित सम्पूर्ण तथ्यों को एक विशेष प्रणाली द्वारा मालूम कर लिया जाता है तथा बाद में उसे आधार मानकर समय समय पर भविष्य के अनुमान लगाये जाते हैं। आधारहीन अनुमान जुए के समान होते हैं और अशुद्ध होने के कारण भ्रमपूर्ण परिणाम प्रदर्शित करते हैं। अत यह परिभाषा भी साख्यिकी का सही अर्थ प्रस्तुत नहीं करती।

---

1 Statistics are classified facts respecting the condition of the people of a state, specially those facts which can be stated in numbers —Webster

2 Statistics is "the science of the measurement of the social organism regarded as a whole in all its manifestations"

3 Statistics is the science of counting

4 Statistics is the science of estimates and probabilities

प्रोफेसर बाउले अपनी परिभाषा मे सुधार कर उसे 'सही' रूप मे माध्यो (Averages) का विज्ञान''[1] बतलाते हैं । माध्यो का भी सख्या शास्त्र मे अत्यधिक महत्व है—लगभग सभी तथ्यो की तुलनाएं ठोस अङ्को द्वारा न करके उनके माध्यो द्वारा की जाती हैं—परन्तु माध्यो के अतिरिक्त रेखाचित्र (Graphs) तथा चित्रो (Diagrams) से भी अनेक तथ्यो का प्रदर्शन एव तुलना होती है अत साख्यिकी माध्यो का विज्ञान ही नही, इसमे अन्य साधनो का भी महत्वपूर्ण स्थान है ।

उपरोक्त परिभाषाओ मे कोई भी परिभाषा साख्यिकी के सब अङ्गो मे परिपूर्ण नही है । किंगने कहा है[2] कि सख्या-शास्त्र गणना अथवा सकलन किये गये तथ्यो के विवेचन के परिणाम से प्राप्त सामूहिक, प्राकृतिक अथवा सामाजिक वातावरण पर निर्णय देने की रीति का विज्ञान है" इसका तात्पर्य यह है कि जो भी तथ्य एकत्रित किये जाते हैं उनसे जो भी निष्कर्ष निकाला जाता है उसकी सत्यता अथवा शुद्धता का निर्णय किस प्रकार किया जाय इसका हल सख्या विज्ञान बतलाता है अर्थात् निष्कर्षों के सम्बन्ध मे अन्तिम निर्णय देने के साधन अथवा रीतियो की ओर सकेत करता है । यह परिभाषा अधिक विद्वतापूर्ण तथा गहन तो है परन्तु सरल नहीं है ।

क्रॉक्स्टन एवं काउडेन (Croxton and Cowden) ने कहा है कि समक आंकिक तथ्यो के संग्रहण, (Collection) प्रस्तुतीकरण, (Presentation) विश्लेषण (analysis) और निर्वचन (interpretation) को कहते है[3] । क्राक्स्टन महोदय ने साख्यिकी को विज्ञान न मानकर "वैज्ञानिक रीतिया"[4] माना है जो अन्य विज्ञानो के समझने मे सहायक होती हैं । उनके अनुसार साख्यिकीय रीतियो की पूर्ण जानकारी किए बिना एक सामाजिक विज्ञानो का अनुसधानकर्ता ठीक उस अधे आदमी के समान हैं जो एक अधेरे कमरे मे ऐसी काली बिल्ली को ढूढने का प्रयत्न करता हो जो कि वहा है ही नही ।[5]

सेलिगमैन के शब्दो मे साख्यिकी जांच के किसी क्षेत्र पर प्रकाश डालने के हेतु एकत्रित किये गये संख्यात्मक तथ्यो के सकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण,

---

1 "Statistics may rightly be called the science of averages"

2 "The science of statistics is the method of judging collective, natural or social phenomena from the results obtained by the analysis or enumeration or collection of estimates"

3 Statistics are collection, presentation, analysis and interpretation of numerical data-Croxton & Cowden

4 Statistics is not a science but a scientific method

—Croxton & Cowden

5. Without an understanding of statistics, the investigator in the social sciences may frequently be like the blind man groping in a dark closet for a black cat that isn't there —Croxton & Cowden

तुलनात्मक अध्ययन तथा विवेचन सम्बन्धी रीतियो से सम्बन्धित विज्ञान है।[1] उपरोक्त परिभाषाओ को ध्यान मे रखते हुए निम्नलिखित परिभाषा अधिक उपयुक्त है : समक, क्रमबद्ध सहसम्बन्धित प्राकृतिक अथवा सामाजिक गोचर घटनाओ के माप, गणना या अनुमान को कहते हैं।[2]

उपरोक्त परिभाषा के अनुसार अको का सग्रहण किसी भी रीति-माप, गणना या अनुमान से हो सकता है। अक प्राकृतिक (physical) या सामाजिक (Social) घटनाओ से सम्बन्धित होने चाहिए तथा उन्हे विज्ञान कहने के लिए उन्हे किसी क्रम मे ही प्रस्तुत करना चाहिए। सब अक तुलनात्मक दृष्टि से सम्बन्धित होने चाहिए। इन सब विशेषताओ का इस परिभाषा में समावेश होने के कारण यह परिभाषा पूर्ण एव आधुनिक है।

सांख्यिकीय रीतियां

सख्या-शास्त्र सख्यात्मक तथ्यों से व्यवहार करता है और तथ्यो का एकत्रीकरण, अनुमान तथा उनसे निष्कर्ष निकालने का कार्य सरल नही है। प्रारम्भ मे तथ्यो का सग्रह किया जाता है तथा उन्हे सुव्यवस्थित रूप मे प्रस्तुत करना पडता है ताकि उनकी आपस मे तुलना की जा सके और वह सरलता से समझ मे आ सकें। इसके पश्चात् उनकी तुलना करने अथवा प्रारम्भिक सम्बन्ध की जानकारी प्राप्त करने के लिए उनके माध्य निकाले जाते हैं अथवा वह रेखाचित्र पर अङ्कित किये जाते हैं। तत्पश्चात् उनसे निश्चित निष्कर्ष पर पहुँचने का यत्न किया जाता है। इन सब कार्यों के लिये विशेष रीतिया अपनाई जाती हैं। यह रीतिया ही साख्यिकीय रीतिया हैं। अत साख्यिकीय रीतिया वह हैं जिनकी सहायता से अक सग्रहण, वर्गीकरण तथा सारणीयन करके उनकी तुलना की जा सके और शुद्ध परिणाम निकाले जा सकें। साख्यिकीय रीतिया निम्नलिखित भागो मे बाटी जा सकती हैं

१ अङ्क सग्रहण (Collection of Data)—इसके अन्तर्गत उन नियमो का प्रयोग आता है जो अङ्को के सग्रहण से सम्बन्धित है। अङ्क सम्पूर्ण इकट्ठे करने हैं अथवा नमूने की प्रणाली का उपयोग करना है। इसके अन्तर्गत इन दोनो बातो के अन्तगत अपनाये जाने वाले तरीके सम्मिलित हैं।

२ वर्गीकरण तथा सारणीयन (Classification and Tabulation)— अङ्को के एकत्रीकरण के पश्चात् उनको सुबोध एव सरल रूप मे प्रस्तुत करने के लिए जो सिद्धान्त अपनाये जाते हैं वह इसके अन्तर्गत आते हैं। वर्गीकृत तथा सारणीबद्ध अङ्क ही निष्कर्ष निकालने मे सहायक हो सकते है।

---

1. Statistics is the science which deals with methods of collecting, classifying, presenting, comparing and interpreting numerical data, collected to throw some light on any sphere of inquiry —Seligman

2 Statistics are measurements, enumerations or estimates of social or natural phenomena systematically arranged so as to exhibit inter-relationship

३ तुलना तथा सह-सम्बन्ध (Comparison and Correlation)– अङ्कों के सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करने के बाद उनकी तुलना करनी आवश्यक होती है। तुलना करने में माध्यों, रेखाचित्रों तथा निर्देशांकों आदि का प्रयोग किया जा सकता है। इसके प्राप्त करने में विशेष तरीकों का प्रयोग करना पड़ता है।

४ विवेचन तथा पूर्वानुमान (Interpretation and forecasting)— अन्त में प्राप्त तथ्यों के आधार पर निष्कर्ष निकालने होते हैं तथा उन निष्कर्षों के आधार पर भविष्य के लिये भी अनुमान लगाते रहते हैं। यह कार्य भी विशेष रीतियों तथा सिद्धान्तों के आधार पर ही होते हैं।

Whether Statistics is Science or Arts

३ सांख्यिकी का स्वभाव

उपरोक्त सभी कथन यह स्पष्ट करते हैं कि सख्या-शास्त्र एक विज्ञान है। "यह एक विज्ञान है क्योंकि इसकी रीतियां क्रम पर आधारित हैं तथा उनका प्रयोग सर्वत्र होता है"।[1] हम यह प्रत्यक्ष देखते हैं कि अङ्कों का सकलन, तथा प्रस्तुतीकरण एक निश्चित क्रम में होता है और फिर उनको एक शृंखलाबद्ध रूप में ही प्रस्तुत किया जाता है। अन्त सम्भा-शास्त्र में गणनाएं तथा अनुमान भी वैज्ञानिक आधार पर ही किये जाते हैं। कारण (Cause) और प्रभाव (effect) में सम्बन्ध स्थापित कर सांख्यिकी विज्ञान होने का सबूत देती है। एक लेखक के अनुसार समंकों के बिना विज्ञान फलदायक नहीं होते और विज्ञान के बिना समक निर्मूल होते हैं[2]।

अन्य विज्ञानों की भांति ही सांख्यिकी भी अपूर्ण एवं विकासशील है। इसका प्रयोग अत्यधिक व्यापक है परन्तु इसमें भी अनेक कमियां हैं जिनकी पूर्ति भविष्य के विकास द्वारा होने की सम्भावना है।

सांख्यिकी एक कला भी है क्योंकि अङ्कों का सफल प्रयोग बहुत कुछ प्रयोगकर्ता के अनुभव तथा चातुर्य पर निर्भर करता है। यदि सांख्यिक (Statistician) अपने क्षेत्र में अनुभवी तथा कुशल है तो वह अङ्कों से ठीक परिणाम निकाल सकेगा अन्यथा सब निष्कर्ष अशुद्ध होंगे। सख्या-शास्त्र, अङ्क सग्रहण तथा उनके प्रयोग के सुन्दरतम तरीकों की ओर स्पष्ट निर्देश करता है और समंकों का उचित प्रयोग प्रत्येक व्यक्ति नहीं कर सकता अन्त सख्या-शास्त्र भी एक कला है।

सांख्यिकी में केवल सख्यात्मक तथ्यों से व्यवहार किया जाता है यहां तक कि इसमें गुणात्मक तथ्यों का वर्णन भी संख्याओं में होता है। उदाहरणत किसी व्यक्ति की स्वस्थता अथवा अस्वस्थता का बयान प्रति मास बीमारी के दिनों में बतलाया जा सकता है। किसी विद्यार्थी की योग्यता का वर्णन उनके द्वारा सामान्य ज्ञान की परीक्षा में प्राप्त अङ्कों द्वारा किया जा सकता है।

---

1 It is a Science in that its methods are basically systematic and have general application—Tippett (Statistics Page 3)

2 Sciences without statistics bear no fruit, statistics without sciences have no root.

सांख्यिकी का क्षेत्र

साख्यिकी के क्षेत्र को दो भागो मे बाट सकते हैं— १. साख्यिकीय रीतिया तथा २ व्यावहारिक साख्यिकी।

साख्यिकीय रीतिया — इनके अन्तर्गत सामग्री के एकत्रीकरण तथा प्रयोग सम्बन्धी सब तरीके तथा ढङ्ग आ जाते हैं। इनका वर्णन हम पहले कर चुके हैं।

२ व्यावहारिक साख्यिकी — साख्यिकीय रीतिया अर्थात् अ क सग्रहण, वर्गीकरण, सारणीयन, तुलना तथा विवेचन आदि का प्रयोग आर्थिक, सामाजिक अथवा अन्य क्षेत्रो मे जिस प्रकार किया जाता है वह व्यावहारिक साख्यिकी कहलाती है। किसी देश की जन-सख्या, मजदूरी, राष्ट्रीय आय, अथवा जन्म मरण सम्बन्धी अ को के सग्रहण की क्रिया, उन अ को से देश की आर्थिक अथवा सामाजिक स्थिति का किस प्रकार अनुमान लगाया जा सकता है तथा उसकी अन्य देशो से किस प्रकार (किन माध्यो द्वारा) तुलना की जा सकती है यह व्यावहारिक क्रियाए भी सख्या-शास्त्र के अध्ययन की सामग्री हैं।

"जनता पुल बनाने के उस गणित की चिन्ता नही करती (अर्थात् पुल किस प्रकार बनाया गया है) जिस पर पुल बनाने का विज्ञान आधारित है बल्कि वह केवल वास्तविक पुल को ही महत्व देती है।[1] यह कथन साख्यिकी (Statistics) के लिए उपयुक्त नही क्योकि इसमें पुल बनाने की क्रियाओ को भी यथेष्ट महत्त्व दिया जाता है।

व्यावहारिक साख्यिकी को पुन दो वर्गों में विभाजित किया जा सकता है, वर्णनात्मक तथा वैज्ञानिक। वर्णनात्मक शाखा ऐतिहासिक अथवा वर्तमान महत्व के तथ्यो पर विचार करती है तथा वैज्ञानिक शाखा एकत्रित किये गये अ को तथा साख्यिकीय रीतियो की सहायता से ऐसे नियम निर्धारित करने का प्रयत्न करती है जो निष्कर्ष निकालने में सहायक हो।

साख्यिकी का उद्देश्य— आधुनिक युग योजना का युग है। प्रत्येक मनुष्य, सस्था या राष्ट्र आयोजन से ही उन्नति के पथ पर अग्रसर हो सकते हैं। किसी भी योजना मे सफलता प्राप्त करने के लिए यह आवश्यक है कि विविध समस्याओ पर पूर्ण सामग्री उपलब्ध हो। साख्यिकीय रीतियो के द्वारा भूतकालीन तथ्यो की वर्तमान तथ्यो से तुलना करके यह मालूम किया जाता है कि हमने उन्नति की है या अवनति। साथ ही वर्तमान के आधार पर भविष्य के लिए योजना भी समको की सहायता से ही बन पाती है। बोडिंगटन (Boddington) के अनुसार साख्यिकीय अन्वेषण का वास्तविक उद्देश्य भूतकालीन एव वर्तमान तथ्यो की तुलना करके यह मालूम करना है कि जो परिवर्तन हुए हैं उनके क्या कारण रहे हैं और उनके क्या क्या परिणाम हो सकते हैं।[2]

---

1 "Public care nothing for the Mathematics on which the science of bridge building is founded, they only desire to see the actual bridge" quoted by S Hayes

2 The ultimate end of statistical research is to enable comparison to be made between past and present results with a view to ascertaining the reasons for changes which have taken place and the effect of such [illegible] on the future —Boddington

४ सांख्यिकी व राजनीति—प्राचीन काल में तो संख्या-शास्त्र का सीधा सम्बन्ध राजनीति से ही था। राजा और नवाब लोग ही कर लगाने तथा भूमि व्यवस्था के लिए अंक संग्रहण कराते थे। परन्तु आज यह काम केवल राज्य ही करते हो ऐसा नहीं है। अनेक निजी संस्थाएं, बैंक, परिवहन कम्पनियां अथवा उद्योग मंडल अंक संग्रहण करते हैं। तो भी प्रत्येक देश में सरकार भी अनेक क्षेत्रों में अङ्क संग्रहण का कार्य करती है। प्रत्येक देश में एक सांख्यिकी विभाग होता है जो कर व्यवस्था, पारिश्रमिक, जीवन निर्वाह तथा आयात निर्यात आदि सम्बन्धी अंक एकत्रित कर प्रकाशित करता है। इन अङ्कों के आधार पर ही देश की नीति का निर्धारण किया जाता है। भारत सरीखे अत्यधिक जन-संख्या वाले देश में समाजवादी व्यवस्था स्थापित करने का ध्येय भारत की जनता की दीन हीन आर्थिक स्थिति (न्यून आय, रोजगार की कमी, तथा अत्यधिक आर्थिक असमानता) देखकर ही अपनाया गया है और इस स्थिति का ज्ञान बहुत कुछ सांख्यिकीय तथ्यों से हुआ है।

अर्थनीति के अतिरिक्त मतदान की उचित व्यवस्था, तथा देश के विभिन्न भागों के लिये चुनाव क्षेत्रों का चुनाव तथा उचित संख्या में सीटों का निर्धारण समको की सहायता से ही सम्भव है। चुनाव के पश्चात् हार जीत का निर्णय तथा देश भर में विभिन्न राजनैतिक दलों की प्रभुता का अनुमान भी सांख्यिकीय तथ्यों से किया जा सकता है। इस प्रकार सांख्यिकी वर्तमान राजनीतिज्ञ की मार्गदर्शिका है।

५ सांख्यिकी तथा वाणिज्य शास्त्र—इस शताब्दी में वाणिज्य का क्षेत्र अत्यधिक विस्तृत हो गया है और बड़े पैमाने के उत्पादन तथा प्रतिस्पर्द्धा के कारण वाणिज्य की समस्याएं भी अधिक गम्भीर एवं जटिल हो गई हैं। प्रत्येक उत्पादक को माग सम्बन्धी अंकों की पूरी जानकारी रखनी पड़ती है ताकि अतिरिक्त उत्पादन (Over-production) न हो और व्यापारी को हानि न हो। इसके अतिरिक्त बैंक, जनता की आय और बचत से ही विनियोजन का अनुमान करते हैं तथा पूंजी की माग और पूर्ति के अङ्कों के अध्ययन से व्याज की दर निर्धारित करते हैं। बीमा कम्पनियां जन्म-मरण सम्बन्धी अंकों का हिसाब रखती हैं कि किस आयु पर कितने पुरुष तथा कितनी स्त्रियां मरती हैं और कौन से रोग अत्यधिक बलि लेते हैं। इसीके आधार पर वह बीमे के शुल्क (premium) की दर निर्धारित करती हैं। इसके अतिरिक्त परिवहन कम्पनियां भी किराये तथा परिवहन शुल्क की दर, यात्रियों की संख्या तथा माल लदाई की मात्रा की जानकारी से ही निश्चित करती हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि वाणिज्य के सभी क्षेत्रों में सांख्यिकी का सहयोग आवश्यक एवं महत्वपूर्ण है।

इसके अतिरिक्त सांख्यिकी का प्रयोग भौतिक तथा रसायन शास्त्रों में भी होता है। अन्तर केवल इतना है कि भौतिक शास्त्र में नाप तौल का स्तर बहुत ऊंचा है। वहां सूक्ष्मतम तथा हल्की से हल्की वस्तु का भी महत्व है जबकि सांख्यिकी में बहुत मामूली तथा सूक्ष्म अंकों का विशेष महत्व नहीं, वहां अनुमानों तथा सम्पूर्ण अंकों को ही महत्व देते हैं। इसके अतिरिक्त खगोल शास्त्र में तो अंकों का प्रयोग बहुत होता है। नक्षत्रों की पारस्परिक दूरी, दूरी का एक दूसरे पर प्रभाव, उनकी चाल तथा आकर्षण आदि के

सम्बन्ध मे साख्यिकीय नियमो का प्रयोग यथेष्ट मात्रा मे होता है। ऋतु विज्ञान (Meteorology) मे ताप, दबाव, हवा की गति आदि के अंको के आधार पर ही विभिन्न स्थानो का जलवायु मालूम किया जाता है तथा उसके सम्बन्ध मे ऋतु-विभाग भविष्यवाणी करता है।

सारांश

इतिहास—राष्ट्रीय सगठन के साथ-साथ साख्यिकी की उन्नति हुई हैं। पहले राजाओ द्वारा उपयोग—3050 वर्ष ईसा पूर्व मिश्र मे पिरामिड निर्मित करने के लिए, रेमजेज द्वितीय द्वारा भूमि वितरण के लिए अक एकत्रित करवाये गये। बाइबल मे भी अङ्को का जिक्र आता है। इगलैंड तथा जर्मनी मे विजयी विलियम तथा फ्रेडरिक द्वितीय द्वारा सम्पत्ति तथा जनसख्या सम्बन्धी अङ्क एकत्रित करवाये गये।

भारत मे चन्द्रगुप्त, गुप्त साम्राज्य, अलाउद्दीन खिलजी, तथा अकबर काल मे अङ्को का वर्णन मिलता है। रिकार्डो, माल्थस तथा एगल के सिद्धान्त भी अङ्को पर ही आधारित किये गये। 1801 मे इगलैंड मे प्रथम जनगणना की गई तथा बाद में यह सब देशो मे प्रचलित हो गई।

अर्थ तथा परिभाषा—अर्थ बहुवचन तथा एकवचन मे प्रयुक्त—बहुवचन मे तात्पर्य समक तथा एक वचन मे साख्यिकी।

साख्यिकी—प्रारम्भ मे राज्यशास्त्र माना जाता था। पर अब प्रजातन्त्रीय सरकारें हैं। बाउले के अनुसार "साख्यिकी वह विज्ञान है जो सामाजिक व्यवस्था को सामूहिक रूप मे सभी दृष्टिकोणों से मापता है" यह परिभाषा साख्यिकी को सामाजिक कार्यों तक सीमित कर देती है।

"सख्या शास्त्र गणना का विज्ञान है" वास्तविक जीवन मे गणना सम्पूर्ण नही की जा सकती। अनुमानित तथ्यो का सहारा लेना पडता है। अत यह भी सीमित है।

बोडिंगटन साख्यिकी को "अनुमानो तथा सम्भावनाओ का विज्ञान" मानते हैं। पर अनुमानों के अतिरिक्त वास्तविक तथ्यो का सहारा भी लेना पडता है।

बाउले आगे चलकर साख्यिकी को "माध्यो का विज्ञान" मानते हैं। परन्तु माध्यों के अतिरिक्त चित्रों, रेखाचित्रो आदि का प्रयोग कम महत्वपूर्ण नहीं है। अत साख्यिकी "जाच के किसी क्षेत्र पर प्रकाश डालने के हेतु एकत्रित किये गये सख्यात्मक तथ्यो के सकलन, वर्गीकरण, प्रस्तुतीकरण, तुलनात्मक अध्ययन तथा विवेचन सम्बन्धी रीतियो से सम्बन्धित विज्ञान है।" तथा समक क्रमबद्ध सहसबधित प्राकृतिक अथवा सामाजिक गोचर घटनाओ के माप, गणना या अनुमान को कहते हैं।

साख्यिकी के तथ्यों की विशेषताएं

(1) वे अङ्को मे प्रकट किये जाते हैं।
(2) वे विविध कारणो से प्रभावित होते हैं।
(3) वे समूहो मे होते हैं।
(4) उनकी गणना या अनुमान किया जाता है।

(5) उनकी परिशुद्धता यथोचित होती है।
(6) वे निश्चित उद्देश्य से एकत्रित किये जाते हैं।
(7) वे क्रम-बद्ध होते हैं।
(8) वे तुलना-योग्य होते हैं।

सांख्यिकीय रीतियां निम्न हैं

(1) अङ्क सग्रहण, (2) वर्गीकरण तथा सारणीयन, (3) तुलना तथा सह-सम्बन्ध, (4) विवेचन तथा पूर्वानुमान।

साख्यिकी का स्वभाव—साख्यिकी विज्ञान तथा कला है क्योंकि क्रमबद्ध है तथा अध्ययन एवं व्यवहार के लिए विशेष योग्यता की आवश्यकता होती है। इसमें सब तथ्य सख्याओ मे बदल लिये जाते हैं।

सांख्यिकी का उद्देश्य

भूत की वर्तमान से तुलना करके प्रगति जानना तथा वर्तमान के आधार पर भविष्य की योजना बनाना।

अन्य शास्त्रों से सम्बन्ध

अङ्क सग्रहण तथा विश्लेषण आदि गणित के बिना सम्भव नहीं।

अर्थशास्त्र, जीवशास्त्र, प्राणिशास्त्र, राजनीति, वाणिज्य-शास्त्र, भौतिक शास्त्र, ऋतु विज्ञान, खगोल शास्त्र आदि में साख्यिकी का प्रयोग अनिवार्य।

EXERCISE I

1 Discuss the meaning and scope of Statistics and explain the utility of maintaining statistics in industrial and commercial concerns

2 "Statistics is the science of averages" Do you agree with this definition? If not, give reasons and suggest a proper definition.

3 Write a brief essay on the relationship of Economics, Mathematics and Statistics

4 "Statistics are the straws out of which I, like every other economist, have to make bricks" Marshall

Discuss the statement.

5. "Sciences without Statistics bear no fruit, Statistics without sciences have no root" Comment (M A Patna, 1943)

6 Statistics *is not a science, it is a scientific method* Discuss critically explaining the scope, utility and limitations of Statistics (M A, Agra, 1951)

7 Statistics are numerical statement of facts in any Department of enquiry, placed in relation to each other, Statistical methods are devices for abbreviating and classifying the statements and making clear the relations Elucidate and illustrate this statement (M A Agra, 1952)

8 Trace the development of the science of Statistics from its primitive form to its present complex status and estimate its increasing importance to Economics (M A Agra 1954)

9 Discuss

For some subjects Statistics provides ideas of basic importance, for some it provides methods of investigation In one way or the other, in both ways, Statistics has an impact on most other branches of knowledge (M A, Agra, 1952)

10 Critically examine the following definitions of Statistics— Statistics is a science of counting, Statistics is a science of Averages, Statistics is a science of the measurement of social organism in all its aspects (B Com, Agra, 1946)

11 "Statistics affects everybody and touches life at many points It is both a science and an art" Explain the above statement with appropriate examples (B Com, Agra, 1946)

12 Explain with illustrations how statistical methods lead to clarity of thoughts, accuracy of estimates, verification of theories, and discovery of relations (B Com, Agra, 1947; B Com, Raj, 1961)

13 Statistics is said to be both a science and an art Why? What relation, if any, has Statistics with other sciences? (B Com, Agra, 1949)

14 Define Statistics and how in modern times various sciences benefit by its use (B Com, Agra, 1954)

15 Discuss the meaning and scope of Statistics Explain the utility of maintaining statistics in industrial and commercial concerns (B Com Raj, 1953)

16 "Statistics are aggregates of facts affected to a marked extent by a multiplicity of causes numerically expressed, enumerated, or estimated according to reasonable standards of accuracy, collected in a systematic manner for a predetermined purpose, and placed in relation to each other" Discuss the above statement (B Com, Raj, 1955)

17 Discuss the scope and limitations of the science of Statistics (B Com, Raj, 1955)

18 Statistics only furnish a tool necessary though imperfect, which is dangerous in the hands of those who do not know its use and deficiencies (Bowley)

Discuss the above statement and explain the importance of statistics (M A Raj, 1960 & III year T D C, Raj, 1961)

19 Write a short essay on the importance of statistics in planning (B Com, Raj, 1962)

20 "Statistics are alienists—they can testify either side"—La Guardia Explain

अध्याय २

सांख्यिकी के उद्देश्य तथा महत्व

(Objects and importance of Statistics)

"When you can measure what you are speaking about and express it in numbers, you know something about it, but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind" —*Lord Kelvin*

सांख्यिकी के अन्तर्गत अपनाई गई रीतियों का विकास समाज की बढ़ती हुई जागृति, शिक्षा तथा अनुसन्धान कार्य के साथ साथ हुआ है। इसीलिए इस शास्त्र का कार्य अब केवल आर्थिक तथा सामाजिक समस्याओं का विश्लेषण करना मात्र नहीं है बल्कि प्रत्येक क्षेत्र की समस्याओं पर प्रकाश डालना है। अतः संख्या-शास्त्र का अध्ययन भी दिन प्रतिदिन अधिक व्यवहारिक होता जा रहा है और इसका प्रयोग क्षेत्र भी बढ़ता जा रहा है। संख्या विज्ञान के उद्देश्य अथवा कार्यों को हम निम्नलिखित शब्दों में प्रकट कर सकते हैं —

(१) तथ्यों को एक निश्चित रूप में प्रस्तुत करना।

मौखिक रूप में प्रकट किये गये तथ्यों की बजाय अंकों के रूप में वर्णित तथ्य अधिक शुद्ध सूचना देते हैं। उदाहरण स्वरूप यदि कहा जाय कि गत वर्ष बहुत रेल दुर्घटनाएं हुईं और उनमें बहुत आदमी मर गये तो इसमें कोई बात स्पष्ट नहीं होती परन्तु यदि यह कहा जाय गत वर्ष 20 रेल दुर्घटनाएं हुईं और उनमें 600 व्यक्ति मर गये तो इसमें स्थिति स्पष्ट होती है और उसका वास्तविक प्रभाव पड़ता है। संख्या-शास्त्र किसी भी क्षेत्र में जो अंक एकत्रित करता है वह बिल्कुल निश्चित तथा स्वयं स्पष्ट होते हैं जिसमें किसी प्रकार का भ्रम नहीं रह सकता।

(२) अङ्क समूह को सरल तथा सुव्यवस्थित रूप में प्रस्तुत करना।

उपरोक्त वर्णन से यह तो स्पष्ट है कि संख्या शास्त्र विभिन्न तथ्यों को निश्चित रूप में प्रस्तुत करता है परन्तु संग्रह किये हुए अंक आरम्भ में अव्यवस्थित रूप में होते हैं और एक दूसरे से सम्बन्धित अंक एक स्थान पर नहीं होते अतः उनमें कोई परिणाम निकालना तो दूर रहा उन्हें ठीक प्रकार से समझना भी कठिन है। उदाहरणस्वरूप यदि एक कॉलिज, जिसमें २००० विद्यार्थी है, के प्रत्येक विद्यार्थी की आयु तथा लम्बाई दर्ज की जाय तो इतनी लम्बी सूची से कोई भी निष्कर्ष निकालना सम्भव नहीं है। संख्या विज्ञान का कार्य इन विद्यार्थियों में आयु तथा लम्बाई के कुछ वर्ग बनाकर उसे अधिक बोधगम्य बना देना है।

अंकों को ठीक ढंग से वर्गीकृत सारणियों में रखने के अतिरिक्त उन्हें और भी अधिक सुन्दर रूप में प्रस्तुत करने के लिए रेखा-चित्रों तथा चित्रों का प्रयोग किया जाता है। पंचवर्षीय योजना पर होने वाले व्यय को प्रत्येक मद का महत्व समझाने के लिए एक चित्र सर्वाधिक सरल एवं बोधगम्य है।

— —

(३) तथ्यो की तुलना करना :

यथार्थ रूप मे रखे गये तथ्यो का तब तक कोई महत्व नही होता जब तक कि उनकी तुलना दूसरे तथ्यो से नही की जाय। यदि केवल यह कहा जाय कि भारत प्रतिवर्ष ३० लाख टन इस्पात उत्पन्न करता है तो कुछ व्यक्ति सोच सकते हैं कि भारत बहुत कम इस्पात का उत्पादन करता है और कुछ का यह विचार हो सकता है कि उत्पादन बहुत काफी है। जब तक दूसरे देशो के इस्पात उत्पादन के अक नही दिये जाय और भारत की *आवश्यकता नहीं बताई जाय तब तक यह निष्कर्ष नहीं निकाला जा सकता कि* उत्पादन कम है या अधिक है। इस उद्देश्य की पूर्ति के लिए ही सख्या शास्त्र तुलना के तरीके बतलाता है जिनके प्रयोग के द्वारा दो तथ्यो का अन्तर अथवा सम्बन्ध भली प्रकार समझ में आ सकता है। इसके अतिरिक्त बहुत से तथ्य होते ही ऐसे हैं कि उन्हें तुलनात्मक रूप मे प्रस्तुत करना अनिवार्य है—जैसे मूल्य अथवा उत्पादन के देशनाक, श्रमिकों को मिलने वाली मजदूरी आदि।

(४) व्यवस्थापको को नीति निर्धारण की सुविधा प्रदान करना :

प्रत्येक सरकार देश की जनसख्या से सम्बन्धित अक प्राप्त करना चाहती है कि देश मे किस आयु के कितने २ व्यक्ति हैं। इससे देश की सैनिक शक्ति का अनुमान किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त जनसख्या के प्राप्त अको से भविष्य के लिए सैनिक शिक्षा, स्वास्थ्य अथवा विद्यालयो सम्बन्धी योजनाएं बनाई जा सकती हैं। इसी प्रकार से कोई उद्योगपति भी अपने आधीन उद्योग की समस्याओ को अको मे प्राप्त सूचना के आधार पर हल कर सकता है।

(५) अन्य विज्ञानो के नियमो की परीक्षा का प्रमाण प्रस्तुत करना :

अनेक तथ्य ऐसे होते हैं जिन्हें हम निगमन रीति (*Deductive Method*) मे ही मौलूम कर लेते हैं परन्तु तर्क के इस युग मे बहुधा उन्हें तथ्यो द्वारा सिद्ध करना पड़ता है। उदाहरणत अर्थशास्त्र का यह नियम कि प्रत्येक कुशल व्यापारी सस्ते बाजार मे खरीदता है और महगे बाजार मे बेचता है सामान्यतया मान्य है परन्तु इसे सिद्ध करने के लिए अक एकत्रित किये जा सकते हैं और प्रमाण देकर सदेह दूर किया जा सकता है। एगिल का यह नियम कि कम आय वाले परिवार का भोजन पर प्रतिशत खर्च अधिक होता है वास्तविक तथ्यो के अभाव मे सर्वमान्य नही हो सकता। अत साख्यिकी द्वारा दूसरे शास्त्रो के नियमो का परीक्षण करके उनके नियमो की व्यवहारिकता तथ्यो द्वारा सिद्ध की जा सकती है।

(६) आयोजन तथा भविष्यवाणी —

आयोजन के इस युग में वर्त्तमान तथ्यों के आधार पर भविष्य के लिए नीति निर्धारित की जाती है। भारत की जन सख्या प्रतिवर्ष दो प्रतिशत बढ जाती है और वर्त्तमान जन संख्या के अङ्को को देखते हुए यह वृद्धि बहुत अधिक है अत भारत सरकार ने परिवार आयोजन को प्रोत्साहन देने का निश्चय किया है। इसी प्रकार अन्न की उत्पत्ति, औद्योगिक उत्पादन तथा अन्य अनेक क्षेत्रो में वर्त्तमान तथ्यो के आधार पर भविष्यवाणी की जाती है। आयोजन सम्बन्धी नीति निर्धारण मे भी सख्या-शास्त्र यथेष्ट सहयोग प्रदान

करता है। श्री बाउले के शब्दों में "सांख्यिकी का उचित कार्य अनुभव में वृद्धि करना है।"

सांख्यिकी की उपयोगिता और महत्व

सांख्यिकी का प्रयोग समय की गति के साथ प्रत्येक क्षेत्र में अधिकाधिक महत्वपूर्ण होता जा रहा है। इसका महत्व सभी क्षेत्रों में किसी न किसी रूप में प्रगट होता है।

बाउले (Bowley) के अनुसार सांख्यिकी का ज्ञान किसी विदेशी भाषा या बीजगणित की जानकारी के तुल्य है। यह किसी भी समय किसी भी परिस्थिति में उपयोगी हो सकता है।[1]

(१) सरकार के लिये —प्राचीन काल में तो राजा महाराजा ही अंक संकलन करवा कर उसके द्वारा अपनी सैनिक शक्ति का अनुमान लगाते थे अथवा जनता के लिये कर व्यवस्था करते थे परन्तु आजकल के प्रजातन्त्र युग में "समंक व्यवस्थापकों की आंख का काम देते हैं।"[2]

सरकार को प्रतिवर्ष देश के लिए आय-व्यय (Budget) तैयार करना पड़ता है। वित्त-मन्त्री गत वर्ष की आय तथा व्यय के अंकों को देखकर तथा देश की निरन्तर होती हुई प्रगति के आधार पर ही चालू वर्ष की आय तथा व्यय निर्धारित करता है। यदि जनता की आय बढ़ती है और व्यय अधिक नहीं बढ़ रहा है तो अधिक कर लगाना सम्भव तथा उचित है और जिस वर्ग की आय में कुछ वृद्धि हुई है उस पर कर भार बढ़ाया जा सकता है। यह निर्णय राष्ट्रीय आय, व्यय तथा बाजार और साख की स्थिति सम्बन्धी अंकों के आधार पर ही किया जा सकता है। इसके अतिरिक्त व्यय के किस मद पर कम कर तथा किस पर अधिक रखना है यह भी तथ्यों पर ही आधारित रहता है। यदि अपराधों की संख्या कम हो रही है तो पुलिस आदि के मद पर व्यय बढ़ाने की आवश्यकता नहीं है। स्वास्थ्य की स्थिति ठीक नहीं है तो विशेष रोगों के लिए अतिरिक्त खर्च की व्यवस्था करनी होगी। इसी प्रकार से सरकार को तथ्यों के आधार पर यह भी देखना होगा कि कौन से क्षेत्र अविकसित तथा पिछड़े हुए हैं ताकि विकास कार्यों में उन क्षेत्रों को प्राथमिकता दी जा सके। उपरोक्त सब कार्य सुचारु एवं सुव्यवस्थित रूप में तभी हो सकते हैं जब कि इन सबके सम्बन्ध में राज्य के पास पूरे आंकड़े हों। अतः समंक प्रबन्धकों अथवा व्यवस्थापकों की आंखें होती हैं।

(२) योजना—सांख्यिकी का दूसरा महत्व इस बात में प्रगट होता है कि इसके बिना आयोजन की कल्पना करना ही असम्भव है। सांख्यिकों तथा अर्थशास्त्रियों को ही आयोजन करने का कार्य सौंपा जाता है जो देश के लगभग सभी क्षेत्रों तथा विभागों से वास्तविक परिस्थिति सम्बन्धी अंक इकट्ठे करते हैं और फिर अनुमान लगाते हैं कि किस क्षेत्र में विकास अधिक करना है और किस में कम। वास्तव में जिस प्रकार रोगी के रोग की पूर्ण स्थिति जाने बिना उसका इलाज आरम्भ करना नासमझी है उसी प्रकार

1 A knowledge of statistics is like a knowledge of a foreign language or of Algebra, it may prove of use at any time under any circumstances.
—Bowley

अध्याय ३

जांच का आयोजन

(Planning an Inquiry)

There is more than a germ of truth in the suggestion that in a society where statisticians thrive, liberty and individuality are likely to be emasculated. —*Moroney*

वैसे तो प्रत्येक सांख्यिक-अनुसंधान की अलग-अलग प्रणाली हो सकती है लेकिन जांच का सामान्य क्रम निम्न होता है।

१. जांच का आयोजन (Planning)
२. तथ्यों का संग्रहण (Collection)
३. तथ्यों का संपादन (Editing)
४. वर्गीकरण एवं सारणीयन (Classification and tabulation)
५. प्रस्तुतीकरण (Presentation)—
  अ—चित्र (Diagrams)
  ब.—बिन्दु रेखीय निरूपण (Graphs)
६. विश्लेषण (Analysis)
७ विवेचन (Interpretation)
८. जांच की रिपोर्ट लिखना (Writing up the report)

किसी क्षेत्र में जांच के सम्बन्ध में अंक एकत्रित करने से पूर्व समस्त संग्रहण कार्य को पूर्णतया आयोजित करना आवश्यक होता है। जिस क्षेत्र में जांच अथवा अनुसन्धान करना हो उसका विस्तृत रूप से अध्ययन करने की आवश्यकता होती है, उसकी बारीकियों को वास्तविक संकलन के पूर्व ही समझ लिया जाना चाहिये ताकि सारे प्रश्न का हल निकालने में व्यर्थ अधिक समय नहीं खोना पड़े और त्रुटियां न्यूनतम होने की सम्भावना हो।

किसी भी सांख्यिकीय अनुसन्धान का कार्यारम्भ करने से पूर्व कुछ बातों के सम्बन्ध में पहले ही निश्चय करने की आवश्यकता है जो निम्नलिखित है:—

१. जांच का उद्देश्य (Object of enquiry)
२. जांच का क्षेत्र (Scope of enquiry)
३. जांच के स्रोत (Sources of enquiry)
४. जांच का स्वभाव तथा प्रकार (Nature and kind of enquiry)
५. जांच की इकाई (Unit of enquiry)
६. शुद्धि की सीमा (Degree of accuracy)

अब हम इनमें से एक एक पर विचार करेंगे।

(1) जांच का उद्देश्य (Scope of enquiry)—जांच का आरम्भ करने

के पूर्व उसका उद्देश्य बिलकुल स्पष्ट होना आवश्यक है। उद्देश्य स्पष्ट होने पर सूचना एकत्रित करने में बहुत सहायता मिलती है और संग्रहकर्ता तथ्य संकलन के समय उत्पन्न होने वाली कठिनाइयों तथा प्रश्नों का हल सरलतापूर्वक निकाल सकता है। इसके अतिरिक्त उद्देश्य स्पष्ट होने पर सब मदों के अंकों में समानता होने की आशा रहती है। जांच का उद्देश्य सामान्य हो सकता है अथवा विशेष, कभी कभी किसी व्यापार की सर्वांगीण स्थिति जानने के लिए अंक संकलित किये जा सकते हैं परन्तु बहुधा विशेष कार्यों के लिए अंक संग्रहण किया जाता है। सामान्य कार्यों के लिए अंक संग्रहण के उदाहरण, जनगणना, उत्पादन सम्बन्धी सूचक आदि हैं जबकि विशेष कार्यों के लिए जांच के अन्तर्गत श्रमिकों के जीवन निर्वाह सम्बन्धी अंक अथवा कृषि सम्बन्धी ऋण के अंक हो सकते हैं।

(2) जांच का क्षेत्र (Scope of enquiry)—जांच करने के पूर्व उसका क्षेत्र भी जानना आवश्यक है। आधारभूत समस्याओं के सम्बन्ध में जांच के अंक बहुत व्यापक तथा विस्तृत होने चाहिये, परन्तु इस सम्बन्ध में यह बात स्पष्ट होनी चाहिये कि यदि विशेष कार्य के लिए अंक संग्रह किया जाना है तो उसमें व्यर्थ की बातें, जिनका सम्बन्ध अध्ययन के अन्तर्गत आने वाली समस्या से नहीं है, नहीं जोड़नी चाहियें क्योंकि जितना अधिक अंक संकलन होगा उतना ही व्यय अधिक होने की सम्भावना होगी और सम्बन्धित अंक संग्रहण में अनावश्यक ही व्यय वृद्धि होगी। अत: जांच के क्षेत्र सम्बन्धी प्रश्नों का निश्चय पहले ही कर लिया जाना आवश्यक है ताकि व्यर्थ परिणाम एवं व्यय से बचा जा सके। इसके अतिरिक्त यह भी देखना चाहिये कि समस्या से सम्बन्धित सब अंक ही इकट्ठे करते हैं अथवा कुछ प्रतिनिधि अंकों से ही काम चल सकता है। बहुधा ऐसा होता है कि किसी समस्या के अध्ययन में भी कुछ विशेष बातों को विशेष महत्व देना होता है। ऐसी स्थिति में सब बातों को समान महत्व देने की आवश्यकता नहीं है।

(3) जांच के स्रोत (Sources of enquiry)—जांच करने से पूर्व यह भी देख लेना चाहिये कि उसमें सम्बन्धित तथ्य पहले से ही कहीं उपलब्ध हो सकेंगे अथवा आरम्भ से अन्त तक सारा संकलन कार्य अपने आप ही करना पड़ेगा। बहुधा अनेक समस्याओं तथा स्थितियों के बारे में सरकार के अनेक विभाग अंक प्रकाशित करते रहते हैं, निजी उद्योगों के शोध-विभाग तथा विश्वविद्यालयों के अनुसन्धान विभाग भी समय २ पर अङ्क प्रकाशित करते रहते हैं। यदि उनमें से कोई भी अङ्क काम में आ सकते हों तो भली प्रकार सोच विचार कर उनके प्रयोग का निर्णय करना चाहिये। यदि वह अङ्क किसी विशेष उद्देश्य के लिये एकत्रित किये गये हों तो उसका भी ध्यान रखना चाहिये। यदि समस्या से सम्बन्धित अङ्क कहीं उपलब्ध न हों अथवा उपलब्ध अङ्क आवश्यकताओं की पूर्ति न करते हों तो नये सिरे से अङ्क संकलन की योजना बनानी चाहिये और देखना चाहिये कि कहाँ कहाँ योग्य व्यक्ति जाँच में सहयोग के लिये मिल सकते हैं। उन्हें उचित अधिकारियों से जांच के लिये प्राप्त करने की चेष्टा करनी होगी।

(५) जाच का स्वभाव तथा प्रकार (Nature and kind of enquiry)–
जाच करने से पूर्व यह भी निश्चित करना पडता है कि जाच किस प्रकार की जायगी। जाच कई प्रकार की हो सकती है।

(१) सरकारी, अर्द्ध-सरकारी अथवा निजी—यदि जाच सरकार द्वारा अथवा उसके किसी विभाग द्वारा की जाती है तो ऐसी जाच मे साधारणतया व्यय भी कम होता है और कार्य भी सरल होता है क्योंकि जो सरकारी व्यक्ति इस कार्य को करते हैं वह पहले से ही सरकारी नौकरी में हैं परन्तु यह आवश्यक नहीं है क्योंकि कई बार निजी क्षेत्र के योग्य व्यक्तियों को भी जाच के लिये नियुक्त कर दिया जाता है। सरकारी जाच की सबसे बडी विशेषता यह है कि जन-सहयोग मिलने की सम्भावना अधिक है। जन-गणना, वेतन-आयोग आदि सरकारी जाच के महत्वपूर्ण उदाहरण हैं। अर्द्ध सरकारी जाच के अन्तर्गत नगरपालिकाओं अथवा जिला-बोर्डों, विश्व विद्यालयों आदि द्वारा किया जाने वाला अनुसन्धान आता है। इन सस्थाओं के पीछे कोई अधिकार नहीं रहता, अत इनका कार्य सरकारी जाच की अपेक्षा कठिन होता है। निजी जाच के अन्तर्गत विभिन्न औद्योगिक सस्थाओं, समाचार पत्रों अथवा व्यक्तियों द्वारा की जाने वाली जाच आती है। सरकार की तुलना मे इन सब के साधन बहुत सीमित रहते हैं, बहुधा इनको जाच के लिये उपयुक्त योग्य व्यक्ति भी उपलब्ध नहीं होते तथा इनके द्वारा की जाने वाली जाच में जनता से प्रार्थना करके ही तथ्य एकत्रित किये जा सकते हैं। व्यक्तियों द्वारा की जाने वाली जाच अत्यधिक कठिन तथा साधनहीन होती है। उपर्युक्त सब बातों के अतिरिक्त सरकारी जाच के परिणाम अधिक विश्वसनीय एव शुद्ध होने की सम्भावना रहती है।

(२) प्राथमिक अथवा द्वितीयक (Primary or Secondary)–
जाच प्राथमिक अथवा द्वितीयक हो सकती है। यदि जाच कर्ता प्रारम्भ से योजना बनाकर स्वय सब तथ्य सकलित करता अथवा करवाता है तो वह जाच प्राथमिक कहलाती है। बहुधा किसी जाच के सम्बन्ध मे पहले से ही एकत्रित किये हुए कुछ तथ्य उपलब्ध हो जाते हैं उनको आधार मान कर जो अनुसन्धान किया जाता है वह द्वितीयक अनुसन्धान कहलाता है।

प्राथमिक जाच की विशेषता यह है कि क्योंकि तथ्य जाचकर्ता द्वारा अपने उद्देश्य को सामने रखते हुए एकत्रित किये गये हैं अत वह अधिक शुद्ध तथा विश्वसनीय होंगे। दूसरे यह भी हो सकता है कि पुराने आकडे अब काफी समय बीत जाने के कारण विशेष महत्व के नहीं रहे होंगे। इस दृष्टि से प्राथमिक जाच मौलिक होने के साथ अधिक विश्वसनीय भी होती है। परन्तु विश्वसनीय आकडे अन्यत्र उपलब्ध होने की दशा मे नये सिरे से जाच पर धन व्यय करना बुद्धिमानी नहीं है।

(३) सम्पूर्ण अथवा नमूने की जाच (Census or Sample enquiry)—सम्पूर्ण जाच से तात्पर्य उस जाच से है जिसके अन्तर्गत समस्या से सम्बन्धित तथ्यांक सारे क्षेत्र से अलग अलग एकत्रित करके उनका योग कर लिया जाता है, परन्तु नमूने की जाच के अन्तर्गत जाच क्षेत्र को कुछ भागों में बांट लिया जाता है। ... क्षेत्र ... लिये जाते हैं जो विभिन्न वर्गों का प्रतिनिधित्व करते हैं। उन

(७) गुप्त अथवा सार्वजनिक जाच (Confidential and public Enquiry)—सरकार को अथवा किसी औद्योगिक सस्था को कभी कभी गुप्त जाच करने की आवश्यकता पडती है। इस जाच के सब कागज पत्र तथा पद्धति तो गुप्त रखे ही जाते हैं, बहुधा परिणाम भी प्रकाशित नही किये जाते। गुप्त जाच मे बहुत ही विश्वासी तथा अनुभवी व्यक्तियों का सहयोग लेना पडता है। कभी कभी जाच गुप्त होती है परन्तु उसके परिणाम प्रकाशित कर दिये जाते हैं। साख्यिकी के अन्तर्गत गुप्त जाच का विशेष महत्व नही है।

(८) नियमित अथवा विशेष जाच (Regular or Ad-hoc Enquiry)—कुछ क्षेत्रो मे जाच नियमित रूप से किसी स्थाई विभाग के अन्तर्गत होती रहती है तथा सम्बन्धित अङ्क प्रकाशित किये जाते रहते हैं। जैसे रिजर्व बैंक (भारतीय) जीवन निर्वाह (Cost of living) सम्बन्धी, बैंकों की सम्पत्ति तथा देय सम्बन्धी निर्देशाक प्रकाशित करता रहता है। विशेष जाच के लिये स्थायी मडल अथवा सगठन की आवश्यकता नही पडती। जो समिति जाच के लिये नियुक्त होती है वह अपना कार्य समाप्त कर भग हो जाती है।

उपरोक्त तथ्यो से यह प्रकट होता है कि जाच कई प्रकार से हो सकती है। भिन्न भिन्न उद्देश्यों तथा समस्याओ के लिये भिन्न भिन्न तरीके अपनाये जाते हैं। जैसे जन-गणना सम्बन्धी अङ्क सग्रहण सरकारी, सम्पूर्ण तथा वैयक्तिक होता है और यह नियमित तथा प्रत्यक्ष भी है। इसके अतिरिक्त जन-गणना सम्बन्धी सब जाच सार्वजनिक होती है। परन्तु अखिल भारतीय आकाशवाणी (All India Radio) विभिन्न प्रकार के कार्यक्रमो के सम्बन्ध मे जनता की सम्मति जानने के लिये जो जाच करती है वह डाक से तथा अप्रत्यक्ष रूप से की जाती है। यह जाच विशेष होती है तथा इसके परिणाम भी गुप्त ही रखे जाते हैं। इस प्रकार के अनुसन्धानो के लिये प्रश्नावलियां नमूने के तौर पर हर बार अलग-अलग व्यक्तियो को भेजी जाती हैं।

(5) साख्यिकीय इकाई (Statistical Unit)—साख्यिकी का सम्बन्ध सख्याओ से है और सख्याओ की इकाइया निर्धारित करना बहुत आवश्यक है। देखने मे तो इकाई निर्धारण बहुत सरल प्रतीत होता है परन्तु वास्तविक स्थिति इससे सर्वथा भिन्न है। बोलचाल की भाषा मे किसी शब्द का प्रचलित अर्थ साधारणतया बहुत विस्तृत होता है। साख्यिकी के कार्य के लिये इकाई की परिभाषा बहुत स्पष्ट तथा सीमित होनी चाहिये ताकि किसी भी प्रकार की सन्देहजनक स्थिति से बचा जा सके। उदाहरणस्वरूप मूल्य थोक हो सकते है या परचून, चोट सामान्य हो सकती है या गहरी, मजदूरी वास्तविक हो सकती या सामान्य। उपरोक्त सब शब्दो—थोक या परचून, सामान्य अथवा गहरी तथा वास्तविक अथवा सामान्य की स्पष्ट परिभाषा निश्चित करना आवश्यक है ताकि कही ऐसा न हो कि यह निर्णय करना कठिन हो जाय कि अमुक चोट को सामान्य माना जाय या गम्भीर, अथवा अमुक मजदूरी सामान्य मानी जाय या वास्तविक। इस प्रकार इकाई इतनी स्पष्ट परिभाषित होनी चाहिये कि गणना करने वाले तथा अक सग्रहण करने वाले सब व्यक्ति उसे सरलता से समझ सकें।

श्री व्हेल्डन ने सांख्यिकीय इकाइयो मे निम्न लिखित विशेषताओ का होना आवश्यक बतलाया है [1]

(१) इकाई विशिष्ट तथा भ्रम रहित होनी चाहिये—यदि एक ही शब्द के कई अर्थ निकलते हो तो अक सग्रहण मे कौन सा अर्थ लेना है यह बिल्कुल स्पष्ट करना चाहिये। उदाहरणतया भारत मे विभिन्न प्रदेशो मे एकड का नाप भिन्न है। यह कही दो बीघे का तो कही पाच बीघे तक का होता है। इसी प्रकार मन (Maund) की स्थिति है। उत्तर प्रदेश मे ही कही मन ४० सेर का होता है तो कही ३० सेर का। अत जाँच करने वाले को स्पष्ट करना होगा कि एकड अथवा मन का वास्तविक अर्थ क्या लिया जायगा।

(२) इकाई मे एकरूपता होनी चाहिये—सांख्यिकीय तथ्य तुलनात्मक दृष्टिकोण से ही अधिक महत्व के होते हैं। अत अक सग्रहण की इकाइयो मे एकरूपता होनी आवश्यक है। व्हेल्डन के उदाहरण के अनुसार यदि कुछ नानबाई (रोटी बेचने वाले) १, २ या ४ पौड की रोटिया बनाते हैं तथा अन्य २ पौंड की, तो तुलना के लिये सब रोटियो का वजन २ पौड मान कर मूल्य के अंको मे तदनुसार ही सुधार होना चाहिये। इसी प्रकार यदि विभिन्न देशो के गेहू का उत्पादन दिखलाना है तो एक ही इकाई मे दिखाना चाहिये। भले ही वह मन हो, टन हो, बुशल हो अथवा क्विन्टल हो। अलग अलग इकाइयो मे दिखाने से तुलना सम्भव नही होगी तथा उसमे भ्रामक परिणाम निकलेंगे।

(३) इकाई स्थाई होनी चाहिये—साधारणतया इकाई ऐसी चुननी चाहिये जिसका मूल्य स्थायी रहता हो। यदि मूल्य मे अदल बदल होते रहते हो तो किसी ऐसे समय का मूल्य आधार मान लेना चाहिये जब कि वह सामान्य हो, अर्थात् न अधिक ऊचे तथा न अधिक नीचे हो। तत्पश्चात् उन्ही को आधार मान कर तुलना की जानी चाहिये।

(४) इकाई, जाच के लिए उपयुक्त तथा शुद्ध की जा सकने वाली होनी चाहिये—यदि जाच बहुत बडे पैमाने पर करनी है तो जाच की इकाइया बडी, तथा छोटे पैमाने पर होने पर इकाइया छोटी होनी चाहिये। उदाहरण के लिये विभिन्न स्थानो पर दुग्ध उत्पादन की तुलना सेर, मन अथवा टनो मे कर सकते हैं। इसी प्रकार वह ऐसी होनी चाहिये जिनके पैमाने सर्वमान्य तथा प्रचलित हो ताकि भ्रम की सम्भावना न्यूनतम रह जाय।

सांख्यिकीय इकाई दो प्रकार की होती है —

(१) मापने की इकाई (Unit of Measurement)

(२) विवेचन एव विश्लेषण की इकाई (Unit of analysis and interpretation)

(1) मापन की इकाई दो प्रकार की हो सकती है —

(१) सरल (Simple) सांख्यिकीय इकाई जिसका प्रयोग सामान्य जीवन मे बहुत प्रचलित है। रीम, गज, पौंड, घटे तथा टन आदि सरल इकाइयो के उदाहरण हैं

1 Bussiness Statistics by Wheldon page 8

तथा इनका अर्थ समझना कठिन नहीं है। परन्तु इनके प्रयोगों में भी बहुत सावधानी रखने की आवश्यकता है क्योंकि रीम ४८० पन्नों का, ५०० पन्नों अथवा ५१२ पन्नों का हो सकता है। टन २२४० पौंड (Long ton) का है अथवा २२०४.६ पौंड (metric ton) का है। जहाजों में ४० घन फीट को एक टन के बराबर मानते हैं। अतः इसे स्पष्ट शब्दों में प्रकट कर देना चाहिये।

(२) जटिल (Composite) इकाई का प्रयोग भी कहीं कहीं किया जाता है, जैसे विद्युत शक्ति का नाप किलोवाट-घंटों में होता है, रेल यातायात टन मीलों में (टन संख्या × मीलों की संख्या) तथा श्रमिकों का कार्य निर्धारण श्रम घन्टों आदि में होता है।

(2) विवेचन एवं विश्लेषण की इकाइयां निम्न प्रकार की होती हैं—

(१) दर (rates), (२) अनुपात (ratio), (३) प्रतिशत (percentages) (४) गुणक (coefficients)।

इकाई का निर्धारण करने के पश्चात् शुद्धि की सीमा का प्रश्न सामने आता है।

(6) शुद्धि की सीमा (*Degree of Accuracy*)—जांच करने से पूर्व यह निर्धारित करना बहुत आवश्यक है कि अंक संग्रहण में किस सीमा तक शुद्धता का ध्यान रखना है। वैज्ञानिक प्रयोगों में शुद्धि की सीमा बहुत संकीर्ण होती है और तनिक से अन्तर में ही परिणामों में बहुत अन्तर होने की सम्भावना रहती है परन्तु बहुत से अनुसन्धान ऐसे भी होते हैं जिनमें बहुत शुद्ध अंक अनिवार्य नहीं हैं। वहां तुलनात्मक अथवा सापेक्षिक (relative) शुद्धता चाहिये। उदाहरणार्थ यदि भारत में कोयले के उत्पादन सम्बन्धी किसी वर्ष के अंक देने हों और वह ३ करोड़ ७७ लाख ४५ हजार ३ सौ बारह टन की बजाय ३.७८ करोड़ टन दे दिये जायें तो इसमें कोई अन्तर नहीं पड़ेगा। परन्तु यदि कोई घड़ी एक घन्टे में ४५ सैकिन्ड तेज हो जाती है और इसे १ मिनट लिख दिया जाय तो इसके परिणाम पर बहुत अधिक प्रभाव पड़ेगा। अतः संग्रह किये जाने वाले अंकों की शुद्धि जितनी अनिवार्य हो उतनी तो रखनी ही चाहिये। अनावश्यक होने पर निकटतम शुद्धि को ही आधार मानना चाहिये। प्रो० किंग के शब्दों में "प्रत्येक सांख्यिकीय समस्या के लिये, प्रत्येक मद के सम्बन्ध में शुद्धि का एक निश्चित परिमाण निर्धारित कर लेना चाहिये कि प्रत्येक संग्रहीत तथ्य इस परिमाण तक शुद्ध हो, परन्तु यह परिमाण उच्चतम शुद्धता बिन्दु के समकक्ष होना आवश्यक नहीं।"[1]

---

1 For every statistical problem, there should be determined in advance a definite standard of accuracy for each item and every endeavour should be made to bring each recorded instance up to this standard but this standard, by no means, needs to correspond to the highest degree of accuracy attainable.—

(Elements of Statistical Method by King, page, 65-66)

सारांश

जाच का क्रम—योजना सग्रहण, त्रुटि निवारण, वर्गीकरण एव सारणीयन, सीकरण, विश्लेषण, विवेचन एव रिपोर्ट लिखना।

(१) जाच का उद्देश्य (२) जाच का क्षेत्र (३) जाच के स्रोत (४) जाच का स्वभाव (५) जाच की इकाई तथा (६) शुद्धि की सीमा।

१—जाच का उद्देश्य—जाच का उद्देश्य स्पष्ट होना चाहिये। जाच सामान्य अथवा विशेष उद्देश्य वाली हो सकती है। जन-गणना सामान्य उद्देशीय तथा कृषि-ऋण सम्बन्धी जाच, विशेष उद्देशीय जाच के उदाहरण हैं।

२—जाच का क्षेत्र—जाच के आकार के अनुसार ही क्षेत्र रखना चाहिये अन्यथा बहुत अधिक व्यय होने की सम्भावना रहती है।

३—जाच का स्रोत—अङ्क पहले से एकत्रित भी उपलब्ध हैं या नये सिरे से ही इक्ट्ठे करने हैं। दोनो परिस्थितियो मे अको के स्रोतो की पूरी जानकारी आवश्यक है।

४—जाच का स्वभाव तथा प्रकार—जाच निम्न प्रकार की होती है।

(१) सरकारी, अर्द्ध सरकारी तथा निजी।
(२) प्राथमिक अथवा द्वितीयक।
(३) सम्पूर्ण अथवा नमूने की।
(४) डाक द्वारा या वैयक्तिक।
(५) प्रारम्भिक अथवा पुनरावर्तक।
(६) प्रत्यक्ष अथवा अप्रत्यक्ष।
(७) गुप्त अथवा सार्वजनिक।

जाच के क्षेत्र तथा उद्देश्य से निश्चित करना चाहिये कि इनमे से कौनसा ढग अपनाया जायेगा।

५—सांख्यिकीय इकाई—जाच की इकाई निम्न गुणो वाली होनी चाहिये।

(क) विशिष्ट तथा भ्रम रहित।
(ख) एकरूपता वाली।
(ग) स्थायी।
(घ) उपयुक्त तथा शुद्ध मापने योग्य।

इकाइयो के प्रकार —

(१) मापन की इकाई।
(२) विवेचन और विश्लेषण की इकाई।

मापन-इकाई सरल अथवा जटिल हो सकती है।

सरल —मन, रीम, पौंड आदि।

जटिल —टन मील, किलोवाट-घन्टे, श्रम-घन्टे, इनके प्रयोग मे उचित सावधानी से काम लेना चाहिये।

विवेचन एव विश्लेषण की - [illegible]

६–शुद्धि सीमा–सांख्यिकी मे अनुमानो का अधिक महत्त्व है अत यथासम्भव शुद्धि ही यथेष्ट है परन्तु जाच मे पूर्व स्वभावानुसार शुद्धि का परिमाण निर्धारित कर लेना श्रेयस्कर है ।

EXERCISE III

1 "Planning is essential in statistical investigation" Justify this statement with suitable examples.

2 What are the characteristics of a good unit ?

3 What is the importance of time factor in statistical investigation ?

4 On what points should a person be clear before conducting an enquiry into the unemployment situation of a town ?

5 What are the types of enquiries that can be conducted in connection with some investigation work ?

6 Discuss the preliminary steps which should be taken before commencing the work of collection of data

7 Why should the object and scope of an enquiry be determined before actual work is started ?

8 Describe the utility of planning an enquiry.

9 What is a statistical unit ? Is it necessary that data be homogeneous ?

10 Define a statistical unit State its essential characteristics Give examples of simple and composite units

11 Explain the various stages of statistical enquiry illustrating your answer with special reference to statistical enquiry into the health conditions of industrial workers in the city of Bombay.

(B Com Raj 1961)

12 Supposing you are appointed as a statistician by the Rajasthan Government to conduct a survey to study the pattern of consumption of the rural population of the State Outline the procedure you will adopt in the conduct of the survey (B Com Final Raj 1962)

अध्याय ४

सामग्री का संग्रहण

(Collection of Data)

I know of scarcely anything so apt to impress the imagination as the wonderful form of cosmic order expressed by the "law of Frequency of Error" The law would have been personified by the Greeks and deified, if they had known of it "
—*Galton*

पिछले अध्याय मे यह स्पष्ट किया जा चुका है कि सामग्री दो प्रकार की होती है, प्राथमिक तथा द्वितीयक (Secondary) । यदि प्रारम्भ से अन्त तक सामग्री नये सिरे से ही एकत्रित की जा सकती है तो यह सामग्री प्राथमिक है। प्राथमिक तथ्य ही अन्तिम रूप दिये जाने के पश्चात् द्वितीयक तथ्य बन जाते हैं। सहकारी साख समितियो अथवा ग्रामीण ऋण के सम्बन्ध मे जो अक एकत्रित किये जाते है वह रिजर्व बैंक के लिए तो प्राथमिक तथ्य थे परन्तु प्रकाशित होने के पश्चात अब जनता के लिए अथवा सहकारी विभागो के लिए द्वितीयक अक हो गये है।

प्राथमिक तथा द्वितीयक सामग्री के सग्रहण के साधन तथा प्रकार सर्वथा भिन्न है। प्राथमिक अको के सग्रह मे अधिक समय, अधिक धन तथा अधिक योग्यता एव चातुर्य की आवश्यकता है जब कि द्वितीयक तथ्यो मे इन तीनो की आवश्यकता अपेक्षाकृत कम होती है। प्राथमिक सामग्री-सग्रहण निम्नलिखित प्रणालियो द्वारा किया जा सकता है :

(१) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत जाच (Direct personal investigation)
(२) अप्रत्यक्ष मौखिक जाच (Indirect oral investigation)
(३) स्थानीय स्रोतो से सूचना प्राप्ति (Information from local sources)
(४) व्यक्तिगत प्रेक्षण द्वारा जाच (Information through observation)
(५) टैलीफोन द्वारा सूचना (Information by Telephone)
(६) प्रश्नावली के माध्यम से तथ्य सग्रह (Information through schedules)
(७) गणको के माध्यम से सूचना सग्रह (Information through enumerators)

(क) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत जाच (Direct personal Investigation) इस प्रणाली के अन्तर्गत जिन व्यक्तियो से सूचना अथवा तथ्य प्राप्त करने हैं, सग्रहकर्ता को सीधे उनके सम्पर्क मे आना पडता है। इसके लिए सम्बन्धित प्रदेश की भाषा, रीति रिवाज, व्यवहार तथा परम्पराओ का पूरा ज्ञान होना बहुत आवश्यक है ताकि विभिन्न

प्रकार के व्यक्तियों से सीधे प्रश्न कर उनके उत्तर स्पष्ट एवं शुद्ध रूप में प्राप्त किये जा सकें। इसके लिए अनुसंधानकर्ता को बहुत कुशल एवं व्यवहार-पटु होना आवश्यक है। यदि कहीं स्थिति ऐसी हो कि किसी एक वर्ग के व्यक्तियों के सम्पर्क में आना किसी कारण से सम्भव न हो अथवा अन्य किसी कारण से उनमें सीधे बातचीत द्वारा तथ्यों की जानकारी नहीं की जा सके तो उस वर्ग के विषय में परिचित दूसरे व्यक्तियों से सम्पर्क स्थापित करना चाहिए जो सम्बन्धित वर्ग की वास्तविक स्थितियों में परिचित हों। इस प्रकार के तथ्यों का प्रयोग करने में सावधानी रखना आवश्यक है।

व्यक्तिगत जाँच करते समय जाँच करने वाले को बहुत व्यवहार कुशल होना चाहिए और उनके द्वारा जो प्रश्न पूछे जावें वह बहुत स्पष्ट, सरल एवं सीधे होने चाहियें। व्यक्तिगत जाँच में बहुत समय तथा धन खर्चना पड़ता है और कार्य बहुत धीरे धीरे होता है परन्तु तथ्य अधिक विश्वसनीय और शुद्ध होते हैं। इस प्रणाली का एक दोष यह है कि यदि संग्रहकर्त्ता किसी बात के पक्ष में प्रभावित (prejudiced) है तो परिणामों के अशुद्ध होने की आशंका रहती है। इस प्रकार यदि जाँच क्षेत्र छोटा हो और संग्रहकर्ता निष्पक्ष रूप से संकलन कार्य करें तो परिणाम अत्यन्त शुद्ध एवम् विश्वसनीय होंगे।

यूरोप में श्री लीप्ले ने प्रत्यक्ष जाँच प्रणाली से श्रमिकों के पारिवारिक आयव्यय से सम्बन्धित अंक एकत्रित किये। इसके लिए उसने कई वर्ष तक एक परिवार के बाद दूसरे के साथ रह कर अध्ययन किया। लीप्ले यद्यपि अधिक परिवारों का अध्ययन नहीं कर सके तो भी उन्होंने एकत्रित तथ्यों के आधार पर जिन सिद्धान्तों का प्रतिपादन किया वह अब भी सर्वमान्य हैं। प्रोफेसर ज्वीग (Zweig) आर्थर यंग तथा राउन्ट्री (Rownstree) ने भी जाँच के लिए यही प्रणाली अपनाई थी।

(ख) अप्रत्यक्ष मौखिक जाँच (Indirect oral investigation)—यदि जाँच का क्षेत्र बहुत बड़ा हो और जाँच सामान्य उपयोग की हो अथवा ऐसी हो जिसमें सम्बन्धित व्यक्ति बहुत विस्तृत क्षेत्र में फैले हुए हों तो सब व्यक्तियों से मिलना प्रायः असम्भव सा ही रहता है। ऐसी स्थिति में जो व्यक्ति जाँच के विषय में जानकारी रखते हों उनसे मौखिक जाँच की जाती है। इस प्रणाली के अन्तर्गत कुछ प्रश्न बना लिए जाते हैं तथा उनके सम्बन्ध में जाँच क्षेत्र में भ्रमण द्वारा महत्वपूर्ण व्यक्तियों से समय लेकर उनकी सम्मतियाँ ली जाती है। इस सम्बन्ध में यह ध्यान रखना चाहिए कि उत्तर देने वाले व्यक्तियों की संख्या काफी बड़ी होनी चाहिए और एक ही वर्ग के अधिक व्यक्ति न चुनकर विभिन्न वर्गों के प्रतिनिधि व्यक्तियों से तथ्य संग्रह करना चाहिए। उत्तर देनेवाले व्यक्तियों के चुनाव में निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिए।

(1) विभिन्न वर्गों के प्रतिनिधि.—जहाँ तक हो सके सामग्री एकत्रित करने में अधिक से अधिक तथा भिन्न भिन्न वर्गों के व्यक्तियों का सहयोग लेना चाहिए ताकि एक ही विचार के अथवा थोड़े से व्यक्ति ही पूरे अनुसन्धान को विशेष प्रभावित न कर सकें।

(2) निष्पक्ष —इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि सम्बन्धित व्यक्ति किसी प्रकार से जाँच के विषय के किसी बिन्दु पर पहले से ही पक्षपात पूर्ण (Prejudiced)

मत न रखता हो। बहुधा कुछ व्यक्ति जाति, धर्म, सम्प्रदाय अथवा अन्य व्यक्तिगत कारणों से किसी समस्या के बारे में पक्षपात-पूर्ण विचार रखते हैं। यथासम्भव ऐसे व्यक्तियों से सहयोग लेना श्रेयस्कर नहीं है।

(3) विषय का परिचय —इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि प्रश्नों के उत्तर देने वाला व्यक्ति जाच के विषय में पूर्णतया परिचित हो अथवा सम्बन्धित समस्या को भली प्रकार से समझता हो।

(4) मानसिक तथा शारीरिक स्वास्थ्य —तथ्य अंकित करने से पूर्व यह निश्चय कर लेना उचित होगा कि सम्बन्धित व्यक्ति की मानसिक शक्ति ठीक है। यदि कोई व्यक्ति नशे की स्थिति में अथवा रुग्णावस्था में उत्तर देता है तो ऐसे तथ्यों की शुद्धता एवं प्रामाणिकता सन्देहजनक हो सकती है।

(5) सब तथ्यों का प्रयोग —उपरोक्त सब बातों का ध्यान रखने के साथ-साथ यह भी नहीं भूलना चाहिए कि जिन व्यक्तियों की गवाही अथवा विचार लिये गये हैं उन सब को उचित महत्व दिया जाय। अन्यथा यदि दो चार व्यक्तियों के मत भी सारे रिकार्ड में से निकाल दिये गये तो हो सकता है कि प्रमाण सन्देहजनक एवं पक्षपातपूर्ण हो।

(ग) स्थानीय स्रोतों तथा संवाददाताओं द्वारा सूचना प्राप्ति (Information through local sources or informants) —जब तथ्यों की केवल सापेक्षिक शुद्धता ही अपेक्षित हो अर्थात् यह इच्छित हो कि तथ्य लगभग शुद्ध हो तो प्राय सरलता एवं कम व्यय के इस तरीके का प्रयोग किया जाता है। व्यापारिक प्रतिनिधि तथा समाचार पत्रों के संवाददाता जाच के कार्य में सहयोग दे सकते हैं क्योंकि वह स्थानीय परिस्थितियों से यथेष्ट परिचित होते हैं। यह सम्भव है कि अलग अलग व्यक्तियों द्वारा दिए गए तथ्य कुछ अशुद्ध हो परन्तु सब व्यक्तियों द्वारा दिये गये तथ्यों के मिलने से अशुद्धता समाप्त हो जाती है क्योंकि कुछ व्यक्तियों ने एक दिशा में अशुद्धि की होगी तो वह दूसरे व्यक्तियों द्वारा दूसरी दिशा में की गई अशुद्धियों से पूरित हो जायगी।

(घ) प्रेक्षण द्वारा सूचना प्राप्ति —कभी कभी कुछ विशेष घटनाओं के घटित होने के समय उनका अध्ययन करने के लिये प्रेक्षक नियुक्त कर दिये जाते हैं। यातायात की समस्याओं के अध्ययन अथवा गुण नियन्त्रण (quality control) सम्बन्धी तथ्यों के संग्रहण के लिये प्रेक्षकों की रिपोर्ट बहुत उपयोगी होती हैं।

(ङ) टेलीफोन —अमेरिका तथा अन्य पाश्चात्य देशों में सामान्य सूचनाएं टेलीफोन द्वारा ही रिकार्ड कर ली जाती हैं। इस रीति के अन्तर्गत सम्बन्धित व्यक्तियों से टेलीफोन पर बातचीत द्वारा सब बातें पूछ ली जाती हैं और उन्हें नोट कर लिया जाता है। यह पद्धति कुछ विशेष प्रकार की जाच जैसे रेडियो प्रोग्राम, बिजली अथवा डाक सेवाएं, अथवा अन्य व्यक्तिगत सेवाओं की समस्याओं का अध्ययन करने में उपयोगी हो सकती हैं पर इसका प्रयोग अत्यन्त सीमित है क्योंकि टेलीफोन पर सूचना प्राय लापरवाही से एवं सामान्य स्तर की दी जाती है।

(च) प्रश्नावलियों द्वारा तथ्य संग्रह (Through Questionnaires) —

यह उपरोक्त सब प्रणालियो मे से अधिक सरल तथा सस्ती प्रणाली है। जब अधिक विस्तृत क्षेत्र मे अनुसन्धान करना हो तो इस प्रणाली का सहारा लिया जाता है। इसके लिए जाच के विषय से सम्बन्धित कुछ प्रश्न एक प्रश्नावली के रूप मे लिख लिये जाते है तथा उनकी बहुत सी प्रतिया निकाल ली जाती हैं। यह प्रश्नावलिया डाक से उन व्यक्तियो के पास भेजी जाती है जो अनुसन्धान की समस्या से परिचित हो अथवा उसमे लगाव रखते हो। क्योंकि इन प्रश्नावलियो के भरने का काम ऐसे व्यक्तियो को करना पड़ता है जो उनके बारे मे जानकारी तो रखते हैं परन्तु जिनमे उनका कुछ भी व्यक्तिगत स्वार्थ नही होता अत जहां तक हो सके इनको बहुत सरल अथवा बोधगम्य बनाना चाहिए। अच्छी प्रश्नावलियो में निम्नलिखित विशेषताए होनी आवश्यक हैं :—

1 स्पष्टता—आवश्यक प्रश्न बहुत सावधानी से रखने चाहिएं और उत्तर की इकाइयो की परिभाषा बिल्कुल स्पष्ट शब्दो मे प्रश्नावली मे लिख देनी चाहिए ताकि भ्रम तथा त्रुटियो का निवारण हो सके।

2 आगणन (Calculation)—जाच के सम्बन्ध मे यदि कुछ गणितीय आगणन करना अनिवार्य हो तो यह कार्य स्वयं प्रश्नावली तैयार करने वाले को करना चाहिए तथा प्रश्न ऐसे हो कि प्रश्नावली भरने वाला कम से कम समय मे भरने का काम कर सके। प्रश्नावली भरने वाले को कोई गणितीय कार्य करने के लिये नहीं दिया जाना चाहिये।

3 संक्षिप्तता (Brevity)—प्रश्नावलियों मे जो प्रश्न दिये जाय वह बहुत संक्षिप्त तथा स्पष्ट होने चाहिए, जिनका उत्तर 'हां' या 'ना' मे दिया जा सके। इसके अतिरिक्त प्रश्नो की सख्या भी बहुत अधिक नही होनी चाहिए।

4 गुप्त सूचना (Confidential)—प्रश्नावलियो में किसी प्रकार की गुप्त सूचना को माग नहीं की जानी चाहिए अन्यथा सारी प्रश्नावलो का ही उत्तर प्राप्त करना असम्भव हो जायगा।

5 अधिक गहन सूचना (Intensive)—प्रश्नावली मे जहा तक हो सके खोद खोद कर प्रश्न नही पूछने चाहिएं, क्योंकि इससे उत्तरदाता को मानसिक चिढ उत्पन्न हो सकती है जिससे कि वह उत्तर देना ही पसन्द नही करेगा। उदाहरण स्वरूप कोई भी व्यक्ति अपनी आय, परिवार तथा अवस्था सम्बन्धी प्रश्नो के बारे मे अधिक गहन प्रश्नो के उत्तर देना नहीं चाहेगा।

6 पारस्परिक पुष्टि (Corroboratory)—प्रश्नावली मे साधारणतया ऐसे प्रश्नो का समावेश करना चाहिए जिनके उत्तर एक दूसरे की पुष्टि करते हो ताकि स्थान पर भूल से अशुद्ध उत्तर भी दे दिया जाय तो संग्रह कर्ता अनुसन्धान से उसे ठीक करने मे सफल हो सके।

7 स्वरूप (Get up)—प्रश्नावली की छपाई, कागज आदि उचित स्तर की होनी चाहिये ताकि वह प्रत्येक व्यक्ति को उत्तर देने के लिये प्रेरित कर सके।

8 भाषा—प्रश्नावली की भाषा भी विनम्र एव आकर्षक होनी चाहिये।

मोटे तौर पर अनुसूची (Schedule) और प्रश्नावली मे निम्न अन्तर

होता है —प्रश्नावली (Questionnaire) मे प्रश्नो का उत्तर सूचक द्वारा भरा जाता है और अनुसूची मे प्रश्नो का उत्तर गणक द्वारा भरा जाता है।

श्री किंग का कहना है कि उपरोक्त सावधानिया काम मे न लाने पर तो अधिकाश प्रश्नावलिया अपूर्ण अवस्था मे ही लौटाई जाती है, उनमे त्रुटियो की भरमार रहती है क्योकि एक सामान्य सूचक (Informant) उत्तर देने मे बहुत अज्ञान तथा लापरवाह होता है। अत यदि प्रश्नावली बनाने मे ऊपर लिखी हुई सब बातो पर ध्यान दिया जायगा तो सम्भवतया कुछ तथ्यो का पता लगाया जा सकता है अन्यथा नही।

अधिक से अधिक प्रश्नावलियो के उत्तर प्राप्त करने के लिए निम्न बातो पर भी ध्यान देना आवश्यक है—

१ यह स्पष्ट कर दिया जाय कि सूचना प्राप्त करने वाला कौन है—व्यक्ति, सस्था, यूनिवर्सिटी, शोधकर्त्ता, सरकार आदि।

२ समस्त सूचना प्राप्त करने का उद्देश्य क्या है? इससे यह लाभ होगा कि सूचक बिना सदेह के वाछित सूचना दे देंगे।

३ यदि प्राप्त की जाने वाली सूचना गोपनीय है तो यह विश्वास दिला दिया जाय कि प्रदत्त सूचना गोपनीय रक्खी जाएगी।

४ प्रत्येक प्रश्नावली पर यह लिख दिया जाय कि सूचको को डाक-खर्च नही देना है। "डाक-खर्च सूचना सग्रह करने वाले व्यक्ति या सस्था ने दे दिया है" Postage free लिखने से अधिक प्रश्नावलिया वापिस आने की सभावना हो जाती है।

इस प्रणाली का महत्वपूर्ण लाभ यह है कि एक विस्तृत क्षेत्र से सम्बन्धित तथ्यो का सग्रह भी थोडे ही परिश्रम से किया जा सकता है। यदि अच्छी प्रकार और सावधानी से भरी हुई प्रश्नावलिया थोडी सख्या मे भी प्राप्त हो जायें तो वह विभिन्न वर्गो अथवा क्षेत्रो की प्रतिनिधि होती हैं और उनके आधार पर ही सामान्य शुद्धतापूर्ण सारे तथ्य प्राप्त किये जा सकते हैं।

प्रश्नावलिया भेजने की पद्धति सरकारी तथा निजी दोनो ही क्षेत्र मे अनुसधान के लिए प्रयुक्त की जाती है। कभी कभी सरकार किसी प्रश्नावली के उत्तर देना वैधानिक रूप मे अनिवार्य कर देती है। भारत मे उद्योगो सम्बन्धी तथ्यो की प्रश्नावलियो के उत्तर भेजने प्रत्येक उद्योग के लिए आवश्यक हैं और सूचना न देने वाले को दण्ड दिया जा सकता है। ऐसी स्थितियो मे तथ्य सग्रहण सरलतापूर्वक तथा बहुत कम खर्च पर होता है। निजी व्यक्तियो अथवा सस्थाओ को यह सुविधा तो प्राप्त नही है परन्तु वह अपने परिचय तथा प्रभाव से इस कार्य मे सम्बन्धित व्यक्तियो का सहयोग प्राप्त कर लेते हैं।

(४) गणको के माध्यम से तथ्य सग्रहण (Through enumerators)—बहुधा सांख्यिकीय तथ्य सग्रहण मे प्रश्नावलिया केवल डाक से भेज कर उत्तर प्राप्त करना ही यथेष्ट नही रहता बल्कि अनुसूचिया भरने के लिये अनेक व्यक्तियो को नियुक्त किया जाता है जो घर घर जाकर अनुसूचिया भरते है। यह प्रणाली बहुत खर्चीली है तथा सरकारी अनुसन्धानो मे बहुधा इसका प्रयोग होता है। विस्तृत क्षेत्र सम्बन्धी जाच मे यह सर्वोत्तम तथा अधिक से अधिक विश्वसनीय तरीका है।

गणकों (Enumerators) द्वारा की जाने वाली जाच की प्रश्नावलिया डाक से भेजी जाने वाली प्रश्नावलियों से अधिक सम्पूर्ण हो सकती हैं क्योंकि गणक प्रत्येक प्रश्न का अर्थ एवं महत्व सूचक को स्वय समझाकर ठीक ठीक सूचना प्राप्त कर सकता है जब कि पिछली प्रणाली में सूचक स्वय प्रश्न का अर्थ जैसा समझते हैं वैसा जवाब देते हैं। परन्तु यह ध्यान रखना चाहिए कि प्रश्नावलियों का आकार (Size) इतना बडा नही होना चाहिए कि उनकी कई तह करनी पडें और उनके फटने का डर रहे। इसके लिए प्रश्नावली मे उत्तर के लिये काफी स्थान छोडा जाना चाहिए तथा प्रश्न के आगे उत्तर के लिए छोडी जानी वाली जगह रेखाओं से स्पष्ट घिरी हुई होनी चाहिए। प्रश्नावली का प्रत्येक प्रश्न तथा शीर्षक (Heading) इतना स्पष्ट होना चाहिए कि सामान्य योग्यता का व्यक्ति इसे अच्छी तरह समझ सके। प्रत्येक दोहरे अर्थ वाले शब्द तथा वाक्यांश को प्रश्नावली से हटा देना चाहिए अथवा उसे स्पष्ट कर देना चाहिए। बहुधा प्रत्येक गणक (Enumerator) को एक प्रश्नावली नमूने की भर कर दे देते है जिससे कोई भ्रम रहने की सम्भावना समाप्त हो जाती है।

गणक का चुनाव (Selection of enumerator)—गणकों के द्वारा तथ्य सग्रहण मे गणकों की योग्यता एव कुशलता पर ही तथ्यों की शुद्धता निर्भर रहती है। अत उनके चुनाव मे पर्याप्त सावधानी रखनी चाहिए ताकि वह पूरा काम करने मे आदि से अन्त तक प्रश्नावली को स्वय पूरी जानकारी प्राप्त कर भरें। प्रश्नावली भरने में गणक को अनेक प्रकार के स्वभाव वाले व्यक्तियों के सम्पर्क में आना पडता है। अत उसे काफी नम्र तथा व्यवहार-कुशल होना चाहिये ताकि कार्य के लिए किसी से उलझे बिना पूरी सूचना प्राप्त करने मे सफलता मिल सके। इसके अतिरिक्त गणना के लिए काम करने वाले व्यक्ति सर्वथा निष्पक्ष होने चाहियें ताकि अनुसूचियों में भरी जाने वाली सूचना सत्य एव शुद्ध हो। अनुसूचिया भरने के लिए गणकों को सम्बन्धित क्षेत्र के व्यक्तियों की भाषा तथा व्यवहार एव रीति रिवाज से परिचित होना बहुत आवश्यक है।

गणकों का प्रशिक्षण (Training of enumerators)—योग्य एव उपयुक्त गणकों का चुनाव करने मात्र से कार्य बिल्कुल ठीक हो जाना निश्चित नहीं होता, क्योंकि योग्य से योग्य व्यक्ति भी बिना अभ्यास के किसी काम को बिल्कुल ठीक नही कर सकता। अत गणकों को प्रश्नावलिया भरने का अभ्यास करा देना चाहिए तथा उन्हे प्रश्नों के सम्बन्ध मे आने वाली सभी कठिनाइयों से परिचित करा देना चाहिए। ऐसा करने के लिये उनसे समय समय पर विचार विमर्श किया जा सकता है।

प्रतिनिधि तथ्य (Representative Items)—सांख्यिकीय भाषा मे समस्त जाच के क्षेत्र को समग्र (Population या Universe) कहते हैं। किसी भी समग्र की जाच करने के लिए या तो समग्र के प्रत्येक मद (item) के सम्बन्ध मे सूचना प्राप्त की जाती है जिसे सगणना रीति (Census method) कहते है या समग्र के समस्त मदों मे से किसी रीति से प्रतिनिधि मद (Representative item) चुन लिए जाते हैं जिसे न्यादर्श रीति (Sample method) कहते हैं।

———

उदाहरण स्वरूप यदि हमें किसी कॉलिज के १००० विद्यार्थियों का मासिक व्यय ज्ञात करना है तो हम प्रत्येक विद्यार्थी के मासिक-व्यय को ज्ञात कर लेंगे और उन्हें जोड़कर १००० का भाग दे देंगे। यह रीति सगणना रीति (Census method) या (complete enumeration method) कहलाती है।

सगणना रीति और न्यादर्श रीति में तुलना—सगणना रीति में समग्र (Population or Universe) के प्रत्येक मद (item) से सूचना प्राप्त की जाती है जबकि न्यादर्श (Sample) रीति में केवल कुछ चुने हुए प्रतिनिधि मदों से ही सूचना प्राप्त की जाती है।

सगणना रीति मे प्रत्येक मद का अध्ययन होने के कारण परिणाम अधिक शुद्ध होते हैं। भूल (error) की आशंका नही रहती है। न्यादर्श रीति मे समग्र के कुछ प्रतिनिधि मदो का ही अध्ययन किया जाता है अतः भूल की मात्रा तुलनात्मक दृष्टि से अधिक होती है। इस रीति से प्राप्त किए गए निष्कर्ष भी सर्वथा शुद्ध नही होते हैं।

सगणना रीति के लाभालाभ—इस रीति से सबसे अधिक लाभ यह है कि समग्र के प्रत्येक मद से सूचना प्राप्त करने के कारण निष्कर्षों मे अधिक शुद्धता एवं यथार्थता रहती है। दूसरा लाभ यह है कि प्रत्येक क्षेत्र के प्रत्येक मद के बारे मे विस्तृत सूचना प्राप्त हो जाती है जो अन्य कई समस्याओं का अध्ययन करने मे भी सहायक होती है। भारतीय जनगणना (Population census) प्रति दस वर्ष इसी रीति से की जाती है। भारत मे निर्मित माल की सगणना (Census of manufactures) भी सन् १९४६ से प्रति वर्ष इसी रीति से हीं की जाती है।

अलाभ—यह रीति एक बड़े क्षेत्र मे विस्तृत रूप से अपनाई जाती है। परिणाम स्वरूप इसमे कई कठिनाइयां एवं बाधाएं आ जाती हैं—अधिक समय, अधिक धन, अधिक श्रम एवं अधिक शक्ति (energy) व्यय करने पड़ते हैं, साथ ही व्यवस्था सम्बन्धी कठिनाइयां भी उसी मात्रा मे बढ़ जाती हैं अतः सरकार या एक बड़ी सस्था ही इस रीति को अपना सकती है।

निदर्शन प्रणाली (Sampling)—निदर्शन प्रणाली एक ऐसी प्रणाली है जिसके द्वारा किसी दिए गए समग्र के एक प्रतिनिधि वर्ग (Group) का गहन अध्ययन करके सम्पूर्ण समग्र की विश्वसनीय तस्वीर प्राप्त की जाती है।[1]

अच्छे निदर्शन के आवश्यक तत्व (Essentials of a good sampling)

एक अच्छे निदर्शन मे निम्न तत्व होने आवश्यक हैं (१) गहन अध्ययन करने के लिए मद समग्र मे से उचित (Reasonable) मात्रा में चुने गए हों। (२) चुने गए मद सम्पूर्ण समग्र का प्रतिनिधित्व करते हो—किसी वर्ग विशेष (Group) का नहीं (३) न्यादर्श (Sample) मे प्रत्येक मद के चुने जाने पर कोई बाधा नही होनी चाहिए अर्थात् पूर्ण स्वतन्त्रता होनी चाहिए।

---

1. Sampling is a technique of securing a reliable picture of a given universe or population by an intensive enquiry of a small set or group of representative data

निदर्शन करने की मुख्य रीतियां (Important Methods of Sampling)

१ सविचार निदर्शन (Deliberate or Purposive or Conscious or Intentional sampling)

२. दैव निदर्शन (Random or Chance sampling)

३ स्तरित निदर्शन (Stratified or Mixed sampling)

४ बहु-स्तरीय निदर्शन (Multi-stage sampling)

(१) सविचार निदर्शन —सविचार निदर्शन में सग्रहकर्ता साख्यिक अपनी बुद्धि द्वारा सारे क्षेत्र अथवा सम्पूर्ण वर्ग मे से ऐसी इकाइयां चुन लेता है जो उसके विचार मे सब प्रकार की इकाइयो का प्रतिनिधित्व करती हो। प्रतिनिधि इकाइयां चुनने में साख्यिक अपने अनुभव तथा ज्ञान का प्रयोग करता है। इस प्रकार चुनी हुई इकाइयों के सम्बन्ध मे पूरी जानकारी एकत्रित की जाती है तथा वह सम्पूर्ण जाच क्षेत्र की प्रतिनिधि मान ली जाती है।

इस प्रणाली का प्रयोग करने में जहा यह गुण है कि यह समय तथा व्यय में बचत करती है वहा कुछ गम्भीर दोष भी हैं। प्रथम यह कि इसमे प्रतिनिधि इकाई के चुनाव मे पक्षपात हो सकता है। यदि चुनाव करने वाले व्यक्ति का कुछ भी झुकाव एक विचार की ओर है तो वह ऐसी इकाइयो को ही प्रतिनिधि रूप मे चुनेगा जो उसके विचार की पुष्टि करती हो। उदाहरण स्वरूप एक साम्यवादी विचारधारा वाला सग्रह-कर्ता ऐसे श्रमिको के पारिश्रमिक को प्रतिनिधि चुनेगा जिनको न्यूनतम मजदूरी मिलती हो। इसके विपरीत एक पूजीपति द्वारा चुने गए मजदूर वह होंगे जिनको अधिकाधिक मजदूरी मिलती हो। इस प्रकार दोनो प्रकार के व्यक्तियों द्वारा एकत्रित तथ्य दोषपूर्ण होंगे। एक के अनुसार औसत मजदूरी बहुत कम तथा दूसरे के अनुसार औसत मजदूरी बहुत अधिक सिद्ध होगी। अत. जब तक साख्यिक बिल्कुल निष्पक्ष नही है तब तक ठीक प्रतिनिधि इकाइयां नही चुन सकेगा और तथ्य सग्रह के भ्रामक परिणाम निकलने का भय बना रहेगा। द्वितीय इसमें "निदर्शन-भूल" (Sampling Error) का अनुमान नहीं लगाया जा सकता।

(२) दैव-निदर्शन प्रणाली (Random sampling method)—दैव-निदर्शन प्रणाली को लाटरी प्रणाली भी कहते हैं। इस प्रणाली के अन्तर्गत चुनाव, सग्रह-कर्ता द्वारा अपनी इच्छानुसार नही किया जाता क्योंकि कितना ही निष्पक्ष व्यक्ति हो उसके चुनाव मे कुछ दोष आने की सम्भावना बनी ही रहती है।

चुनाव करने की निम्न पद्धतियां हैं—

अ—ढोल घुमाकर (rotating the drum)

ब—आख पर पट्टी बाधकर तीर मारना (pricking blindfold)

स—'म' वां नम्बर (nth number)

द—टिपेट की सारणियां (Tippett's tables)

अ—ढोल घुमाकर—एक ढोल में बराबर आकार (size) के लकडी या अन्य धातु के टुकडे होते हैं जिन पर १, २, ३, ४, आदि नम्बर लिखे होते हैं। ढोल को हाथ से

या बिजली की शक्ति से घुमाया जाता है ताकि सब टुकड़े ऊपर नीचे (randomise) हो जाए। फिर किसी भी व्यक्ति द्वारा या मशीन से एक-एक टुकड़ा निकाला जाता है जिस पर लिखी हुई संख्या दर्ज कर ली जाती है। इस प्रकार से न्यादर्श में जितने मदो की आवश्यकता होती है उतने ही टुकड़े निकाल कर उनके नम्बर दर्ज कर लिए जाते हैं। उन सब संख्या वाले मदों का एक न्यादर्श (sample) बन जाता है। इनामी बोन्डो (prize bonds) के त्रैमासिक इनाम मालूम करने के लिए लगभग यही पद्धति काम मे लाई जाती है।

कभी-कभी सब इकाइयो को अलग अलग कागज के टुकड़ो पर लिखकर उन्हे किसी डिब्बे में डालकर हिला दिया जाता है और फिर किसी असम्बद्ध व्यक्ति से उसमें से जितनी इकाइयाँ चुननी हो उतनी ही पर्चियां निकलवाली जाती हैं। इस प्रकार जिन इकाइयो सम्बन्धी पर्चियाँ निकलती हैं वही प्रतिनिधि मानी जाती हैं और उनके सम्बन्ध मे ही सम्पूर्ण जांच करली जाती है। इस सम्बन्ध मे यह ध्यान रखना चाहिए कि इस प्रकार एक बार प्राप्त की गई प्रतिनिधि इकाइयो मे कोई परिवर्तन नही किया जाना चाहिए।

ब—आंख पर पट्टी बांध कर तीर मारना —सामने दीवार पर एक बहुत बड़ा वृत्ताकार या चौकोर नकशा होता है जिस पर एक से लेकर १००, २०० या १००० तक बराबर लम्बाई चौड़ाई के खाने या वृत्त (circles) बने होते हैं। उन पर बिना किसी क्रम के नम्बर लिखे होते हैं। किसी उचित दूरी से कोई भी व्यक्ति उस कागज पर तीर फेंकता है। तीर जिस नम्बर को छेदता है, उसी नम्बर को नोट कर लिया जाता है। इस प्रकार न्यादर्श मे जितने मदो की आवश्यकता हो उतने ही बार तीर मार कर नम्बर नोट कर लिए जाते हे। इन सब संख्याओ वाले मदो का एक न्यादर्श (Sample) बन जाता हैं। यदि कोई तीर दो नम्बरो के बीच मे यानी सीमा पर गिरे या एक ही नम्बर पर एक से अधिक बार गिरे तो उस फेंक को रद्द कर दिया जाता है और उसके बजाय तीर फिर से फेंकना पड़ता है।

स—'स' वाँ नम्बर (nth number)—समग्र के समस्त मदो को किसी भी क्रम मे—भौगोलिक (geographical), वर्ण क्रमानुसार (alphabetical), या संख्यात्मक (numerical)—जमा लिया जाता है। फिर 'स' वाँ (nth) नम्बर मालूम कर लिया जाता है। माना कि स=१० है तो दस-दस के अन्तर से नम्बर नोट कर लिये जाएंगे। यदि हम दूसरे नम्बर से शुरू करते हैं तो दस-दस के अन्तर पर बारहवा, बाईसवा बत्तीसवाँ आदि चुन लेंगे। यदि स=५ है और हम तीन से शुरू करना चाहते हैं तो तीसरा, आठवाँ, तेरहवा नम्बर आदि चुनेंगे। इस प्रकार से मदो की संख्या मालूम करके न्यादर्श बना लिया जाता है।

द—टिपेट की सारणी (Tippett's table)—टिपेट महोदय ने ४१६०० इकाइयों के चार-चार अंको (digits) की १०४०० संख्याओ को सारणी तैयार की है। उस सारणी से बड़ी आसानी से जितने मद चाहियें उनका नम्बर नोट करके न्यादर्श तैयार कर लिया जाता है। बड़े-बड़े सर्वेक्षणों (surveys) मे टिपेट की सारणी का ही प्रयोग किया जाता है।

दैव निदर्शन प्रणाली के दो लाभ हैं (१) मदो के चुनाव में सग्रहकर्ता की इच्छा का कोई भी असर नही पडता। (२) निदर्शन भूल (sampling error) आसानी से ज्ञात की जा सकती है क्योकि दैव निदर्शन प्रणाली सभाविता सिद्धात (Theory of Probability) पर ही आधारित है।

लेकिन इस प्रणाली का एक गभीर दोष है। दैविक रीति अपनाने के कारण कभी कभी ऐसे मदो का चुनाव हो जाता है जो समग्र का बिल्कुल भी प्रतिनिधित्व नही करते।

३—स्तरित निदर्शन (Stratified Sampling)—

सविचार निदर्शन (Deliberate Sampling) और दैव निदर्शन प्रणाली (random sampling) दोनो के लाभों को मिला कर आजकल एक नई प्रणाली प्रयोग मे लाई जाती है जिसे मिश्रित (Mixed) या स्तरित (Stratified) निदर्शन प्रणाली कहते है। इस प्रणाली मे पिछली दोनो प्रणालियो के दोष दूर हो जाते हैं।

बहुधा ऐसा होता है कि समग्र (universe) में विभिन्नता अधिक होने के कारण एक साथ समग्र एकत्रित नही किये जा सकते। ऐसी दशा मे समग्र को पहिले कई भागो (Stratum) मे विभाजित कर दिया जाता है। यह विभाजन इस प्रकार किया जाता है कि प्रत्येक भाग मे एक प्रकार के लक्षण वाले समक प्राप्त हो सकें। इसके पश्चात् प्रत्येक भाग (Strata) मे से दैव-निदर्शन द्वारा समको को एकत्रित कर लिया जाता है। इस प्रकार सभी लक्षणो वाले सब भागो के प्रतिनिधि अक प्राप्त हो जाते हैं।

आजकल यह प्रणाली अधिक प्रयोग में आने लगी है। इस प्रणाली का मुख्य गुण यह है कि इसके द्वारा विषम समग्र (Heterogeneous Universe) को समान गुणीय (homogeneous) वर्गों मे बाट कर उनमे से चुनाव करते हैं जिसमे सब प्रकार के समकों की प्राप्ति हो जाती है और उचित प्रतिनिधित्व अधिक निश्चित हो जाता है।

४—बहुस्तरीय निदर्शन (Multi-stage sampling)—इस प्रणाली के अन्तर्गत न्यादर्श (Sample) का चुनाव कई स्तरो (stages) पर होता है। मान लीजिये हमें भारतवर्ष में ग्रामीण-ऋण का सर्वेक्षण (survey) करना है। समस्त ग्रामीण भारत हमारा समग्र हुआ। समग्र को हम सर्वेक्षण की सुविधा का ध्यान रखते हुए कई क्षेत्रो (zones) मे विभाजित कर लेंगे। प्रत्येक क्षेत्र में हम जिलो (districts) की सूची तैयार कर लेंगे। जिलो की सूची मे से हमने, मान लीजिये ५० जिलो का चुनाव कर लिया। यह चुनाव दैविक या सविचार रीति से हो सकता है लेकिन बहुधा दैविक रीति ही अपनाई जाती है। यह प्रथम चरण (stage) हुआ। अब हम ५० जिलो मे तहसीलो की सूची तैयार करेंगे। मान लीजिए, इस सूची मे से हमने प्रत्येक जिले मे से दो तहसील चुन ली। यह द्वितीय चरण हुआ। १०० तहसीलो के गावो की सूची तैयार करके हमने मान लीजिए, प्रत्येक तहसील मे से १० गावो का प्रवरण कर लिया। यह तृतीय चरण हुआ। अब १००० गावो में कुटुम्ब-सूची (Household-list) तैयार करके प्रत्येक गाव मे से हम ५ कुनबों (households) को चुन लेते हैं। यह चतुर्थ चरण हुआ। अब हम इन ५००० कुनबो से अनुसूची या प्रश्नावली द्वारा सूचना सग्रह कर लेंगे। इस प्रकार

कई स्तरो पर न्यादर्श प्रणाली मे मदो के चुनने की रीति को बहुस्तरीय न्यादर्श प्रणाली कहते हैं। बडे समग्र मे आजकल इस प्रणाली का प्रयोग अधिक होने लगा है।

अन्य निदर्शन प्रणालिया (Other sampling methods) —

१ बहुचरण निदर्शन प्रणाली (Multi-phase Sampling)
२ व्यवस्थित निदर्शन प्रणाली (Systematic Sampling)
३ अभ्यश निदर्शन प्रणाली (Quota Sampling)
४ अनुक्रमिक निदर्शन प्रणाली (Sequential Sampling)
५ सुविधानुसार निदर्शन प्रणाली (Convenience Sampling)
६ संतुलित निदर्शन प्रणाली (Balanced Sampling)
७ "अजातीय पद-समूह" (Cluster Sampling)
८ विस्तृत निदर्शन प्रणाली (Extensive Sampling)

१—बहुचरण निदर्शन प्रणाली (Multi phase Sampling)—कभी कभी एक ही समग्र मे एक साथ कई प्रकार की समस्याओ के सम्बन्ध मे सूचना प्राप्त करनी होती है। ऐसी अवस्था में यदि प्रत्येक समस्या के लिए अलग अलग तथ्य एकत्रित किए जाए तो व्यय अधिक होगा। अत एक बडा न्यादर्श चुन लिया जाता है और उस में से ही प्रत्येक समस्या के लिए एक एक उप-न्यादर्श (Sub-Sample) चुन लिया जाता है। इस प्रकार पहला उप-न्यादर्श प्रथम-चरण-न्यादर्श (first-phase-sample) तथा दूसरा उप-न्यादर्श द्वितीय-चरण-न्यादर्श (second phase sample) आदि कहलाता है।

२—व्यवस्थित निदर्शन (Systematic Sampling)—इस प्रणाली मे मदों को किसी क्रम मे जमा लिया जाता है और फिर जितने मदो की आवश्यकता हो उन्हें किसी भी पद्धति से चुन लिया जाता है। यह प्रणाली दैव-निदर्शन की 'स' वा नम्बर (nth number) प्रणाली से काफी मिलती जुलती है।

३—अभ्यश निदर्शन (Quota Sampling)—इस प्रणाली के अन्तर्गत समग्र (Universe) को कई भागो मे विभाजित कर दिया जाता है। यह विभाजन इस प्रकार किया जाता है कि प्रत्येक भाग मे समकों की एकरूपता हो जाय। इसके बाद गणको (enumerators) को यह सूचना दी जाती है कि किसी भाग में से कितनी इकाइयो का चुनाव करना है। इस प्रकार इकाइयों का अभ्यश (Quota) निश्चित कर दिया जाता है। तत्पश्चात् गणक को यह अधिकार होता है कि वह प्रत्येक भाग में से अभ्यश इकाइयों का चुनाव स्वय अपनी इच्छानुसार कर ले।

यह प्रणाली एक प्रकार से तो बडी अच्छी है कि गणको को इकाइया छाटने का अधिकार होता है। इस से वे अपना कार्य बडी ईमानदारी व योग्यता से करेंगे। इकाइयो का चुनाव भी स्थानीय स्थितियो की जानकारी से ठीक प्रकार ही करेंगे और इस कारण कार्य बडा शुद्ध एव विश्वसनीय होगा। यह तभी हो सकता है जबकि गणक तत्परता तथा दायित्व व ईमानदारी से काम करें। ऐसा भी हो सकता है वे लापरवाही से काम करें। उस दशा मे सारा काम ही दोषपूर्ण एव अशुद्ध हो जायगा। अत इस प्रणाली में गणको

पर अधिक निर्भर रहना पडता है। इस प्रणाली का प्रयोग उसी समय करना चाहिए जब गणक पूर्ण रूप से प्रशिक्षित एव ईमानदार हो।

४—अनुक्रमिक निदर्शन (Sequential sampling)—साधारणतया सभी निदर्शन प्रणालियो मे पहिले न्यादर्श का चुनाव करते है और बाद मे उसमें होने वाली भूलो (errors) का अनुमान लगाया जाता है। इस प्रणाली मे इसके विपरीत होता है। इसके अन्तर्गत पहिले निदर्शन भूल (Sampling error) को ज्ञात करके उसके आधार पर न्यादर्श का आकार (size) निश्चित करते हैं। अत इस प्रणाली में परिशुद्धता की अपेक्षित मात्रा (Expected Standard of Accuracy) का अनुमान वास्तविक निदर्शन से पूर्व ही कर लिया जाता है। इसके बाद चुनाव दैव निदर्शन प्रणाली के द्वारा किया जाता है। इस प्रणाली को प्रोफेसर वाल्ड (Prof A. Wald) ने प्रतिपादित किया है।

५—सुविधानुसार निदर्शन (Convenience Sampling)—जैसाकि नाम प्रकट करता है इस प्रणाली के अन्तर्गत न्यादर्श का चुनाव सुविधानुसार किया जाता है। जैसी सुविधा प्राप्त हो उसी के अनुसार न्यादर्श का चुनाव करके समक एकत्रित कर लिए जाते है। यह पद्धति अवैज्ञानिक है तथा इसके अन्तर्गत प्राप्त न्यादर्शों के सच्चा प्रतिनिधित्व करने की सम्भावना सन्दिग्ध रहती है। इस प्रणाली का प्रयोग बहुत कम किया जाता है।

६—संतुलित निदर्शन प्रणाली (Balanced Sampling)—यदि किसी न्यादर्श के मदों का इस प्रकार से प्रवरण किया जाय कि उनके अध्ययन से निकाला गया परिणाम ठीक वही हो जो कि समग्र के सभी मदो का परिणाम है तो ऐसे न्यादर्श को सन्तुलित न्यादर्श कहा जाता है। जैसे किसी कालिज मे १००० विद्यार्थियो की ऊचाई नापने के लिए १०० विद्यार्थियो का एक न्यादर्श चुना जाता है। उनकी औसत ऊचाई ५'२" ही आती है यदि १००० विद्यार्थियो मे प्रत्येक की ऊचाई नापने के बाद भी औसत ऊचाई ५'२" आवे तो हम ऐसे न्यादर्श को सतुलित न्यादर्श कहेगे। वास्तविक रूप मे देखा जाये तो ऐसे न्यादर्श की प्रत्याशा करना एक स्वप्न मात्र ही है क्योंकि व्यावहारिक दृष्टि से ऐसा न्यादर्श चुना जाना कठिन है। यदि इस प्रणाली मे पूर्ण सफलता मिल जाये तो सगणना रीति की कोई आवश्यकता ही नही रहती।

७—"अजातीय पद-समूह" निदर्शन प्रणाली (Cluster Sampling)—यह प्रणाली स्तरित प्रणाली की विपरीत प्रणाली है। इसमें ऐसे मदो को चुनने का प्रयत्न किया जाता है जो बिल्कुल भिन्न या अजातीय (heterogeneous) हो ताकि प्रत्येक न्यादर्श एक छोटे समग्र का रूप धारण करले।

८—विस्तृत निदर्शन प्रणाली (Extensive Sampling)—इस प्रणाली मे समग्र के अधिकतम मदो को न्यादर्श मे चुन लिया जाता है। जैसे यदि समग्र मे १००० मद हो तो ८०० या ६०० मदों को न्यादर्श मे चुन लिया जाता है। यह लगभग सगणना रीति के समान ही है क्योंकि बहुत कम मदो को छोड़ा जाता है।

निदर्शन प्रणाली के लाभ—निदर्शन प्रणालियो का प्रयोग कई दृष्टिकोणो से लाभदायक है। उनमे से मुख्य लाभ निम्नलिखित हैं—

किसी अनिश्चित घटना के बारे मे मस्तिष्क में होने वाली प्रतिक्रिया को ही सम्भाविता कहते हैं।[1]

सामान्य भाषा मे यह नियम बतलाया है कि यदि एक सिक्का हवा में उछाला जाय तो यह आशा की जाती है कि वह आधी बार चित व आधी बार पट गिरेगा। यदि एक थैले में ४ लाल व ६ सफेद गेंदें है तो एक लाल गेंद की उस थैले मे से निकालने की सम्भाविता ४/१० है व सफेद गेंद के निकाले जाने की संभाविता ६/१० है। यदि एक पेड़ पर से दो व्यक्ति अलग अलग पत्ते दैविक रीति से तोडे तो यह बहुत कुछ सम्भव है कि दोनो के द्वारा तोडे हुए पत्तो की औसत लम्बाई बराबर ही हो।

इसी सिद्धात पर साख्यिकी के निम्नलिखित महत्वपूर्ण नियम आधारित हैं.

१. साख्यिकीय नियमितता नियम (Law of statistical regularity)

२ महाक जडता नियम (Inertia of large Numbers)

साख्यिकीय नियमितता नियम—इस नियम के अनुसार यदि एक बहुत बडे समूह मे से दैव-निदर्शन प्रणाली द्वारा सामान्य सख्या में मद चुन लिए जाय तो इस प्रकार चुने हुए मदो मे निश्चित रूप से बडे समूह की विशेषताएं (Characteristics) होगी और इन प्रतिनिधि मदों के लिये तथ्याक दूसरे देने हो यहाँ से तुलना करने मे नि सकोच काम मे लाये जा सकते हैं। इस नियम को कुछ साख्यिको ने साख्यिकीय नियमितता नियम कहा है। इस नियम के अन्तर्गत इस बात को आधार माना जाता है कि यदि बड़ी सख्या मे से कुछ इकाइयो का चुनाव किया जाय तो उनका व्यवहार सारे समूह के समान ही होगा। उदाहरण यदि एक सिक्का 100 बार उछाला जाय तो गिरने पर 50 बार उसका शीर्ष तथा 50 बार उसकी पीठ के ऊपर आने की सम्भावना है। अब यदि प्रत्येक उछाल के परिणाम को क्रमश लिख लिया जाय (कि कौनसा भाग ऊपर आया) और उसमें से दैव निदर्शन द्वारा 10 उछाल छाट ली जाय तो भी सामान्यत परिणाम यह होगा की चुनाव मे 5 उछाल शीर्ष ऊपर वाली तथा 5 उछाल पीठ ऊपर वाली आएगी इस प्रकार यह प्रतिनिधि सारे समूह के समान ही परिणाम प्रदर्शित करता है। इसी सिद्धान्त पर दैव निदर्शन किया जाता है। इसके द्वारा छाटी हुई इकाइया सारे समूह का प्रतिनिधित्व करती है, इसमे सदेह नही रहता। उपरोक्त उदाहरण से एक निष्कर्ष यह निकलता है कि यदि मुद्रा को उछाल का प्रयोग केवल 8 या 10 बार किया जाय तो इन उछालों के परिणामस्वरूप शीर्ष तथा पीठ के बराबर सख्या मे ऊपर आने की सम्भावना कम है और यदि इनमें से दैव-निदर्शन द्वारा प्रतिनिधि इकाइया छाटी गई हो तो वह भी सारे समूह को प्रतिनिधि नही होगी अत नियमितता नियम की एक महत्व-पूर्ण मान्यता (Assumption) यह है कि प्रयोग से सम्बन्धित समूह बहुत बड़ा होना चाहिये। समूह जितना अधिक बडा होगा उतना ही परिणाम मे अधिक शुद्धता आने की सम्भावना

1 Probability is the ratio of favourable events to the total number of equally likely events —Laplace

Probability is an attitude of mind towards uncertain events —Connor L. R.

रहेगी। ताश पर, जुए पर दाव लगाने वाले, बीमा करने वाले, अथवा अङ्कों का सौदा करने वाले व्यक्ति नियमितता नियम के आधार पर ही काम करते हैं तथा अधिक संख्या मे दाव लगाने पर उनको लाभ होने की अधिक सम्भावना रहती है।

महांक जडता नियम (Inertia of Large Numbers)

सांख्यिकीय नियमितता नियम के अन्तर्गत हम देख चुके हैं कि यदि यथेष्ट बड़ा समूह लिया जाय और उसके आधार पर तथ्य इकट्ठे किये जाय तो वह अधिक शुद्ध होंगे। इसका कारण यह है कि यदि कुछ इकाइयों में परिवर्तन एक दिशा में हुए हैं तो दूसरी इकाइयां ऐसी भी हैं जिनमे इसके विपरीत दिशा मे परिवर्तन हुए हैं। फलस्वरूप कुल परिणाम एक से ही रहेंगे। उदाहरणस्वरूप यदि हम भारत के एक राज्य का गेहूँ का उत्पादन लें तो हो सकता है कि बाढ या कम वर्षा के कारण वहा किसी वर्ष उत्पत्ति कम हुई हो परन्तु समस्त भारत का गेहूँ उत्पादन लें तो इस बात की सम्भावना अधिक है कि उत्पादन मे विशेष परिवर्तन दृष्टि-गोचर न हो क्योंकि यदि एक राज्य में बाढ अथवा सूखे से उत्पादन कम है तो इस बात की पूरी सम्भावना है कि दूसरे किसी राज्य मे फसल अच्छी हो। इसी प्रकार से ससार भर का गेहूँ उत्पादन लिया जाय तो पुराने अंको मे परिवर्तन और भी कम दिखाई देगा।

महांक जडता नियम की दो प्रमुख विशेषताएं हैं। एक तो यह कि जाच के अन्तर्गत मदों की संख्या काफी बडी लेनी चाहिए। दूसरे दीर्घ-कालीन तथ्य अल्प-कालीन तथ्यों से अधिक शुद्ध होते हैं। अल्पकाल मे विशेष कारणों से तत्कालीन परिवर्तन होते रहते हैं। दीर्घकाल मे मूल्यों मे स्थिरता आ जाती है और सामयिक तथा विशेष कारण से होने वाले परिवर्तनों को विशेष महत्व नहीं दिया जाता। व्यावहारिक जीवन मे लगभग प्रत्येक क्षेत्र में महांक जडता नियम का महत्व प्रकट होता है।

इस नियम का यह अर्थ नही लगा लेना चाहिए कि यह नियम परिवर्तन को मान्यता नही देता है परिवर्तन होता तो है पर वह प्रकट केवल दीर्घकाल मे ही होता है। लघुकालीन अवधि में ऐसा लगता है कि जडता आगई है और परिवर्तन होता ही नहीं है। लेकिन वास्तव मे ऐसी बात नही है।

तथ्यों का परीक्षण—उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट हो गया है कि तथ्यों का संग्रहण एवं संकलन किस प्रकार किन सिद्धान्तों के आधार पर किया जा सकता है। तथ्य संग्रहण के पश्चात उनकी शुद्धता तथा उपयुक्तता का परीक्षण करना बहुत आवश्यक है। परीक्षण करते समय यह देखना चाहिये कि

(1) सम्पूर्ण तथ्य जाच से सम्बन्धित हैं।

(2) सम्पूर्ण तथ्य निर्धारित परिभाषाओं के अन्तर्गत आते हैं।

(3) सम्पूर्ण सामग्री मे एकरूपता है अर्थात् सर्वत्र एक ही आधार तथा इकाइयों का प्रयोग किया गया है।

(4) तुलना के लिए प्रयुक्त की जाने वाली सामग्री तुलना के उपयुक्त है।

(5) समस्त अंक संग्रहण निष्पक्ष भाव से किया गया है।

(6) यदि तथ्यों से प्राप्त परिणाम औसत अथवा सामान्य दशा से मेल नहीं

खाता तो सारे अंकों का पुनर्निरीक्षण किया गया है।

(7) जहा मौद्रिक (Monetary) मूल्यों का प्रयोग हुआ है उनका परीक्षण सम्बन्धित मान के गुण तथा मात्रा के अनुसार हुआ है। अर्थात् जहा वस्तुओ के मूल्यो की तुलना की गई है वहा सम्बन्धित वस्तुए एक ही गुण वाली हैं तथा जाच के अन्तर्गत आने वाला पैमाना एक ही है।

उपरोक्त परीक्षण करने के पश्चात् तथ्यों का उचित विश्लेषण (analysis) करना चाहिये और यह निष्कर्ष निकालना चाहिये कि प्रत्येक का क्या महत्व है।

द्वितीयक सामग्री संग्रहण

द्वितीयक सामग्री वह सामग्री है जो पहले से ही किसी व्यक्ति, संस्था अथवा सरकार द्वारा एकत्रित की जा चुकी है। द्वितीयक सामग्री के प्रमुख स्रोत निम्नलिखित हैं-

(1) सरकारी प्रकाशन,

(2) अर्द्ध सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन तथा रिपोर्टें,

(3) समितियों तथा आयोगों की रिपोर्टें,

(4) शोध संस्थाओं के प्रकाशन

(5) विभिन्न विषयों सम्बन्धी पत्र-पत्रिकाए,

(6) बाजार समाचार आदि,

(7) शोध-कर्ताओं के प्रकाशन।

नीचे इन स्रोतों का संक्षिप्त विवरण दिया जाता है।

सरकारी प्रकाशन— प्रत्येक देश की सरकार समय समय पर विभिन्न तथ्यों का प्रकाशन करती है। वह तथ्यांक अत्यन्त विश्वसनीय एवं महत्वपूर्ण होते हैं क्यों कि सरकार तथ्यो का संग्रह बहुत वैज्ञानिक एवं सुसंगठित ढंगो से करती है। भारत सरकार का वाणिज्य मंत्रालय, उद्योग व्यापार पत्रिका, कृषि मंत्रालय Agricultural Situation in India तथा सांख्यिकीय-संगठन (C S. O) के निर्देशक द्वारा Statistical Abstract of India प्रकाशित किये जाते हैं। राजस्थान सरकार के आर्थिक तथा सांख्यिकीय विभाग निर्देशक द्वारा त्रैमासिक सांख्यिकीय पत्रिका (Quarterly Bulletin of Statistics) तथा Basic Statistics प्रकाशित की जाती है।

अर्द्ध सरकारी संस्थाओं के प्रकाशन तथा रिपोर्टें— सरकारी प्रकाशनों के अतिरिक्त नगरपालिकाए, कारपोरेशन अथवा देश का केन्द्रीय बैंक (जहा केन्द्रीय बैंक का राष्ट्रीयकरण नहीं हुआ हो) भी विभिन्न प्रकार के तथ्य प्रकाशित करते हैं। नगर पालिकाए जन्म मरण सम्बन्धी अक तथा विभिन्न रोगो से सम्बन्धित तथ्य प्रकाशित करती रहती हैं। इसके अतिरिक्त उनके द्वारा नियुक्त स्वास्थ्य जन-व्यवस्था अथवा स्वच्छता सम्बन्धी स्थितियो का अध्ययन करने सम्बन्धी समितियों की रिपोर्टों से भी महत्वपूर्ण तथ्य उपलब्ध हो सकते हैं।

समितियो तथा आयोगो की रिपोर्टें (Reports of Committees and Commissions)— सरकार, केन्द्रीय बैंक अथवा किसी उद्योग द्वारा किसी

विशेष कार्य सम्बन्धी जाच के लिए विशेष समितिया अथवा आयोग नियुक्त किए जाते हैं। इन समितियों की रिपोर्ट भी बहुत महत्वपूर्ण तथ्यो पर प्रकाश डालती है। भारत मे ग्रामीण साख सर्वेक्षण (Rural Credit Survey), वित्त आयोग (Finance Commission) तथा वर्क्स समिति की रिपोर्टों से सरकारी नीति निर्धारण करने मे बहुत सहायता मिली है।

शोध सस्थाओ के प्रकाशन (Research Institutes' Publications) समय समय पर विश्व-विद्यालयो के *शोध विभाग अनेक तथ्या का उद्घाटन* करते हैं। बम्बई, दिल्ली तथा पूना विश्व विद्यालय के शोध विभागो ने गत वर्षों मे अपने अपने क्षेत्रों से सम्बन्धित बहुत से तथ्यो का प्रकाशन किया है।

पत्र-पत्रिकायें— वाणिज्य, अर्थ-शास्त्र अथवा अन्य समाज एव भौतिक शास्त्रो सम्बन्धी पत्र पत्रिकाओ मे नियमित रूप से शोध सामग्री प्रकाशित की जाती है। भारत मे 'ईस्टर्न इकोनोमिस्ट', 'कामर्स' आदि पत्रिकाए बहुत मे अक प्रकाशित करती हैं।

बाजार समाचार आदि— शेयर बाजार, सोना-चादी बाजार तथा उत्पादन *एव विनिमय बाजारो के केन्द्रीय कार्यालयो मे मूल्य तथा माग के* अक *प्रकाशित* होते रहते हैं जिनका प्रयोग निर्देशाक बनाने तथा आर्थिक स्थिति सम्बन्धी जानकारी प्राप्त करने मे बहुत होता है। वाणिज्य सघो द्वारा भी विभिन्न अको का प्रकाशन होता रहता है।

शोध कर्ताओ के प्रकाशन— उपरोक्त सब प्रकाशनो के अतिरिक्त विभिन्न विश्वविद्यालयो के अन्तगत विभिन्न विषयों पर शोध करने वाले विद्वान् भी अपनी शोध के आधार पर तथ्यो तथा अको का प्रकाशन करते हैं।

उपरोक्त सभी साधनो से प्राप्त सामग्री का प्रयोग आगे किसी भी अनुसन्धान मे किया जा सकता है परन्तु ऐसे तथ्यो का प्रयोग करने से पूर्व यह भली प्रकार निश्चय कर लेना चाहिए कि जिस व्यक्ति अथवा सस्था द्वारा तथ्य एकत्रित किए गये हैं वह कहा तक विश्वसनीय है, अक किन साधनो से एकत्रित किए गए हैं तथा उनके एकत्रित करने का क्या उद्देश्य रहा है। इन बातो का निर्णय करने के पश्चात् ही द्वितीयक सामग्री का प्रयोग करना चाहिये। इसके अतिरिक्त निम्नलिखित सावधानिया भी काम मे लानी चाहिए।

(1) जाच का क्षेत्र तथा उद्देश्य (Object and scope of enquiry) अको को काम मे लाने मे पहले यह देख लेना चाहिए कि प्रारम्भ मे तथ्यो का संग्रह किस क्षेत्र से तथा किस उद्देश्य से किया गया है। यदि उद्देश्य एव क्षेत्र मे भिन्नता है तो यह निर्णय करना पडेगा कि वर्तमान अनुसन्धान मे वह कहा तक उपयोगी सिद्ध हो सकते हैं।

(2) इकाइयों की परिभाषा (Definition of unit)—सामग्री का उपयोग करने से पहले ही देख लेना चाहिए कि जिन इकाइयो का पूर्व अनुसन्धान में प्रयोग किया गया है वह वर्तमान अनुसन्धान के अनुकूल हैं या नही। यदि अनुकूल नही है तो उन्हे अनुकूल बनाने की चेष्टा करना आवश्यक है।

(3) पूर्व सग्रहकर्ता के संग्रह स्रोत (Sources of the previous collector)—सामग्री का उपयोग करने से पूर्व यह भी निर्णय कर लेना पड़ेगा कि

प्रस्तुत सामग्री किन स्रोतो से प्राप्त की गई थी । क्या वह स्रोत वर्तमान अनुसन्धान के उद्धरण में उपयुक्त है ? यह हो सकता है कि पूर्व संग्रहकर्ताओ के श्रमिको की मजदूरी सम्बन्धी अक केवल वृहदाकार उद्योगो से लिए गए हो परन्तु वर्तमान अनुसन्धान में लघुकाय उद्योगों के श्रमिको के अक भी चाहिए । इस प्रकार का अन्तर जानने के लिए संग्रह स्रोत ज्ञात करना आवश्यक हो जाता है ।

(4) संग्रह पद्धति (Method of Collection)—पूर्व अनुसन्धान में जो संग्रह पद्धति अपनाई गई है वर्तमान अनुसन्धान के लिए उपयुक्त भी हो सकती है, अनुपयुक्त भी । यदि छोटे से क्षेत्र में थोटी सी प्रतिनिधि इकाइयो के आधार पर अनुसन्धान किया गया हो तो यह सर्वथा सम्भव है कि वर्तमान अनुसन्धान के लिए यथोचित सिद्ध न हो ।

(5) संग्रहण का समय तथा परिस्थितियां (Time and condition of collection)—प्राप्त सामग्री का उपयोग करने से पूर्व यह भी निश्चय करना आवश्यक है कि वह जिस समय तथा परिस्थितियो से सम्बन्धित है वह सामान्य रही है अथवा असामान्य । युद्धकाल में की गई किसी जाच के अक शान्तिकाल मे उपयोगी होंगे या नहीं, यह देख लेना चाहिये । इसके अतिरिक्त परिस्थितिया बदलने पर मुद्रा के मूल्य तथा भावो आदि में भी परिवर्तन हो सकते हैं जिससे प्राप्त सामग्री को उचित संशोधन के बाद ही काम में लिया जा सकता है ।

(6) शुद्धता (Accuracy)—पूर्व सामग्री मे जिस सीमा तक शुद्धता का ध्यान रखा गया है वह कहाँ तक वर्तमान अनुसन्धान के लिए उपयुक्त है इसके आधार पर ही प्राप्त अ को का प्रयोग करना चाहिए ।

उपरोक्त सब बातो के आधार पर यह निर्णय करना चाहिए कि वर्तमान परिस्थितियो म पहले से एकत्रित किए गए तथ्य कहा तक काम मे आ सकते है । यदि संग्रहकर्ता विश्वसनीय एव निष्पक्ष हो, अ को के आधार एव पद्धति भी ठीक हो, परिस्थितियो मे भी विशेष परिवर्तन नही हुआ हो तथा तथ्य सब दृष्टिकोणो से वर्तमान अनुसंधान के लिए यथेष्ट हो तो उन्हे काम मे लेने मे कोई हर्ज नही है परन्तु इसके विपरीत स्थिति हो तो उन्हे उचित संशोधन के बाद ही काम मे लिया जाना चाहिए । यदि यह समझा जाय कि उचित संशोधन करने से तथ्य बिल्कुल बदल जाएंगे या वर्तमान अनुसंधान मे काम लेने योग्य नही बनाये जा सकते हो तो उन्हे काम मे न लाना ही बुद्धिमानी है तथा नये सिरे से तथ्य एकत्रित करना ही श्रेयस्कर होगा । कानर (Connor) के अनुसार समक, मुख्य रूप से अन्य स्रोतो के समक, बडी सावधानी से प्रयोग मे लाने चाहिए अन्यथा वे प्रयोगकर्ता को गर्त में ढकेल सकते है ।[1]

सारांश

जाच प्राथमिक तथा द्वितीयक हो सकती है । प्राथमिक जाच निम्न प्रकार से की जाती है—

(1) प्रत्यक्ष व्यक्तिगत जाच ।

---

1 Statistics, especially other people's statistics, are full of pitfalls for the user unless used with Caution, Connor

(2) अप्रत्यक्ष मौखिक जाँच।
(3) स्थानीय स्रोतों से सूचना प्राप्ति।
(4) प्रेषकों द्वारा जाँच।
(5) टेलीफोन द्वारा सूचना।
(6) प्रश्नावलियों द्वारा।
(7) गणकों के माध्यम से।

प्रश्नावलियों में निम्नलिखित गुण होने चाहिए—

(1) स्पष्टता।
(2) अल्प गणित।
(3) संक्षिप्तता।
(4) गुप्त सूचना अनावश्यक।
(5) गहन सूचना अनावश्यक।
(6) प्रश्नों की पारस्परिक पुष्टि।

गणकों के माध्यम से तथ्य संग्रह करने पर उनका उचित चुनाव करना, प्रशिक्षण तथा नमूने की भरी हुई प्रश्नावलियाँ देना आवश्यक है।

गणक परिश्रमी, व्यवहार-कुशल, चतुर, निष्पक्ष तथा सम्बन्धित स्थान की भाषा एवं रीति-रिवाज से परिचित होना चाहिये।

प्रतिनिधि तथ्यों का प्रयोग, सरल, मितव्ययतापूर्ण तथा समय बचाने वाला होता है।

निदर्शन के प्रकार। Kinds of Sampling

(1) सविचार निदर्शन। Deliberate
(2) दैव निदर्शन Random
(3) स्तरित निदर्शन Stratified
(4) बहुस्तरीय निदर्शन Multi-Stage

सविचार निदर्शन के अन्तर्गत सांख्यिक अपनी इच्छा से इकाइयाँ छाँट लेता है। इससे उसके पक्षपातपूर्ण होने का भय रहता है जिससे परिणाम भ्रमपूर्ण निकलते हैं।

दैव-निदर्शन के अन्तर्गत लाटरी के तरीके अथवा एक क्रम में संगठित कर प्रतिनिधि छाँटे जाते हैं। यह सरल तथा विश्वसनीय पद्धति है।

स्तरित निदर्शन में समस्त मदों को सजातीय मदों में बाँट दिया जाता है—फिर प्रत्येक स्तर में से मदों का चुनाव दैव निदर्शन प्रणाली से किया जाता है।

बहुस्तरीय निदर्शन में प्रत्येक क्षेत्र में से मद चुन लिए जाते हैं। चुने हुए मदों में से फिर मद चुने जाते हैं। इस प्रकार हर बार चुने हुए मदों का स्तर बनता जाता है जिसमें से फिर मदों का चुनाव किया जाता है।

अन्य निदर्शन प्रणालियाँ—1. बहु-चरण 2. व्यवस्थित 3 अभ्यंश 4 अनुक्रमिक 5 सुविधानुसार 6 सन्तुलित 7. सजातीय-मद-समूह 8. विस्तृत।

सम्भाविता-सिद्धान्त अथवा सांख्यिकीय नियमितता नियम से तात्पर्य है कि यदि अनुसंधान के अन्तर्गत काफी अधिक मदों का समावेश किया जाय ...

यथेष्ट सख्या मे दैव-निदर्शन द्वारा प्रतिनिधि छाट कर उसके सम्बन्ध में अनुसन्धान किया जाय तो वह पूरे समूह के समान ही परिणाम प्रदर्शित करेंगे।

महाक जडता नियम—इस बात की पुष्टि करता है कि अनुसन्धान के अन्तर्गत बडी सख्याओ में मद रखने पर उनके द्वारा निकलने वाले परिणाम अधिक शुद्ध होते हैं क्योकि यदि कुछ तथ्य एक दिशा की ओर परिवर्तन दिखलाते है तो दूसरे तथ्य विपरीत दिशा मे परिवर्तन भी दिखाने वाले होगे, दोनो के सयोग से क्षति-पूर्ति हो जायगी।

तथ्यो का परीक्षण—तथ्यो का परीक्षण निम्न आधारो पर करना चाहिए।

(1) तथ्य जाच से सम्बन्धित हो।
(2) परिभाषा के अन्तर्गत आ जाते हो।
(3) एकरूप हो।
(4) तुलना के उपयुक्त हो।
(5) निष्पक्ष भाव से सग्रहीत हो।
(6) पुनर्निरीक्षित हो।
(7) गुण तथा मात्रा समान प्रयोग की गई हो।

द्वितीयक सामग्री के स्रोत—

(1) सरकारी प्रकाशन।
(2) अर्द्ध-सरकारी प्रकाशन।
(3) समितियों तथा आयोगों की रिपोर्ट।
(4) शोध सस्थाओ के प्रकाशन।
(5) पत्र पत्रिकाएं।
(6) बाजार समाचार आदि।
(7) शोध-कर्ताओ के प्रकाशन।

अकों के प्रयोग मे लाने से पूर्व देखना चाहिए कि निम्नलिखित बातें वर्तमान अनुसन्धान के उपयुक्त हैं या नही।

(1) जाच का क्षेत्र व उद्देश्य।
(2) इकाइया।
(3) सग्रह के स्रोत।
(4) सग्रह पद्धति।
(5) सग्रह का समय तथा परिस्थितिया
(7) शुद्धता की सीमा।

यदि उपरोक्त बातें वर्तमान सग्रह के अनुकूल हो तो द्वितीयक अकों का प्रयोग करना चाहिये अन्यथा नये सिरे से सब सामग्री सग्रहण श्रेयस्कर होगा।

EXERCISE III

1 Comment "The theory of probability grew up about the gambling table, not in the laboratory"

2 Briefly explain the assumptions underlying the theory of sampling

3 Compare the method of "Complete Enumeration" and the method of "Random Sample Survey" and explain for what kind of enquiries the latter is of special value

4 Discuss the merits and demerits of different methods used in selecting representative data in any extensive enquiry

5 "It is never safe to take published statistics at their face value without knowing their meaning and limitations, and it is always necessary to criticise arguments, that can be based on them "—Bowley Elucidate

6 "*In collection of statistical data commonsense* is the chief requisite and experience the chief teacher" Discuss the statement with comments

7. "Statistics, especially other people's statistics, are full of pitfalls for the user unless used with caution" Elucidate the above statement and mention what are the sources of secondary data.

(II Year T D C Raj 1961)

8. What is the difference between a questionnaire and a blank form ? What precautions should be observed in drafting a questionnaire ?

9. Explain fully the method you would follow in studying the extent, causes and effects of early marriages amongst Harijans and Brahmins in your state

10 "When you can measure what you are speaking about and express it in numbers you know something about it, but when you cannot measure it, when you cannot express it in numbers your knowledge is of a meagre and unsatisfactory kind" (Lord Kelvin)

To what extent Lord-Kelvin's observations apply to Economics ?

(M A. Agra, 1944)

11. Explain the terms "Population and Random Sample" A random sample of twenty paddy fields was chosen from a district. The yield of paddy in maunds per acre in the twenty fields were as under ,

85.2, 104 3, 97.8, 125.3, 164 3, 143 2, 94.6, 109 3, 111 4, 115 8, 132 6, 151 4, 100 0, 116.2, 97 0, 88 8, 87 6, 75 2, 121 0, 120 0.

What conclusions would you draw about the average of paddy per acre in the district ? (M A Agra, 1945)

12 Statistics should not be used as a blind man does a lamp post for support instead of for illumination ? Comment on the above remark. (M. A Agra, 1946)

13 Explain in detail how would you organise a census of a cottage industry like the hand-loom industry or the gur industry (M. A Agra, 1946)

14 What is sampling and what are its uses Explain how would you design a sample survey to estimate the average size of holdings in a locality. (M. A Agra, 1947)

15 Explain how would you proceed in surveying the economic resources of a typical Indian village What are the uses of such surveys ? (M A Agra, 1945)

16 How can the method of "Random Sampling' be used for estimating correctly the yield of wheat in the U P ? (M A Agra, 1948)

17 Outline a plan for carrying out an industrial survey of your district to examine the working of various cottage industries (M A Agra, 1952)

18. You have been appointed secretary of a committee to conduct a statistical enquiry to measure the success or otherwise of "prohibition" in the U P How would you proceed ? Give details (M A. Agra, 1953)

19 How would you plan an enquiry about unemployment in Kanpur ? What published data would you utilise for this purpose ? (M A Agra, 1955)

20 "Random Sampling owes importance to the fact that we can assess the results obtained from it in terms of probability, otherwise the reliability of estimates remain a matter of individual opinion."

Elucidate this statement. (M A Agra, 1956)

21 Explain in detail how would you proceed to organise a "Census of wages" ? Draw up a blank form or forms to obtain the information required (B Com, Agra, 1937; M A Agra, 1950)

22 How far do the results of statistical investigations depend upon correct sampling ? Compare the different methods used to secure representative data (B Com Agra, 1939)

23 State and explain the law of statistical regularity Discuss the method generally used in sampling (B Com Agra, 1941)

24 "In making house to house enquiry everything depends upon the skill, tact and reliability of the investigators." Prove the correctness of the above remark in collecting the family budgets of cultivators in the U. P (B Com Agra & Raj 1946)

25 What methods would you employ in the collection of data when the field of enquiry is (a) small, (b) fairly large, and (c) very large, with due regard to accuracy, labour and costs (B Com Agra & Raj 1947)

26 The municipal board of a big city wants to introduce com-

अध्याय ५

सामग्री का संपादन

(Editing of Data)

'If a man will begin with certainties he shall end in doubts, but if he will be content to begin with doubts he shall end in certainties.'

—Bacon

समंकों का संग्रहण कार्य समाप्त कर लेने के पश्चात् सांख्यिक को जितनी प्रश्नावलियां प्राप्त होती हैं उन सबको ध्यान से पढ़ना आवश्यक होता है क्योंकि इनमें से कुछ प्रश्नावलियां प्राय अधूरी होती हैं तथा कुछ की प्रविष्टियां देखने मात्र से अशुद्ध अथवा अविश्वसनीय लगती हैं। अत इनमें से कुछ को तो बिल्कुल छोड़ देना आवश्यक होता है तथा शेष में उचित परिवर्तन अथवा परिवर्द्धन करने की आवश्यकता होती है। इस काट छांट तथा सुधार की क्रिया को सम्पादन कहा जाता है।

सम्पादन कार्य में सांख्यिक को समंक संग्रहण के अन्तिम उद्देश्य का ध्यान रख कर न केवल अपूर्ण प्रश्नावलियों का सर्वथा त्याग करना पड़ता है बल्कि शेष में उचित संशोधन भी करना होता है। सम्पादन क्रिया को मुख्यत निम्न भागों में विभाजित करना उचित है।

(१) पूर्ति : जो प्रश्नावलियां किसी दृष्टि से अपूर्ण होती हैं उन्हें पूरा करने के लिये उनसे सम्बन्धित व्यक्तियों (उत्तरदाताओं) को पुन पत्र लिखे जाते हैं अथवा टेलीफोन आदि के माध्यम से अपूर्ण प्रश्नों के उत्तर प्राप्त किये जाते हैं। यदि पुनः प्रयत्न करने पर भी सन्तोषजनक उत्तर प्राप्त नहीं किये जा सकें तो सम्बन्धित प्रश्नावलियों को गणना क्रम से सर्वथा निकाल दिया जाता है।

(२) उत्तरों की पुष्टि - प्रश्नावलियों को पढ़ने से अनुभवी सांख्यिक को यह ज्ञान हो जाता है कि उत्तर देने वाले ने उत्तर सही दिये हैं अथवा नहीं। कुछ उत्तर तो परस्पर पुष्टिकारक होते हैं। उदाहरणार्थ एक पति द्वारा अपनी आयु ४१ वर्ष, अपनी पत्नी की आयु ३५ वर्ष तथा अपनी प्रथम सन्तान की आयु २० वर्ष बतलाई गई हो तो स्वभावत उनका विवाह क्रमश २० तथा १४ वर्ष की आयु में हुआ होगा। इसी प्रकार आय, व्यय, तथा बचत आदि के समंकों की शुद्धि परीक्षा हो सकती है। कभी कभी तो इस प्रकार की अशुद्धियां सांख्यिक को अपने अनुभव से ही ठीक कर लेनी चाहियें परन्तु आवश्यक समझा जाने पर इनकी पुष्टि उत्तरदाता से भी की जा सकती है।

(३) पुनर्व्यवस्था - कभी कभी उत्तरदाताओं द्वारा दिये गये उत्तर वांछित क्रम अथवा आधार पर नहीं दिये जाते। उदाहरण स्वरूप यदि किसी साबुन निर्माता द्वारा साबुन की वार्षिक खपत मांगी गई हो और उत्तर देने वाले ने साप्ताहिक अथवा मासिक समंक दिये हों तो उन्हें वार्षिक में परिवर्तित करना आवश्यक होता है, इस प्रकार सभी प्रश्नावलियों के समंकों को एक आधार पर लाना आवश्यक है ताकि उनके वर्गीकरण एवं सारणीयन में सुविधा हो सके।

मान लगाए जाते हैं। यह स्वाभाविक ही है कि ऐसे अनुमान सर्वथा शुद्ध एव सत्य नहीं हो सकते परन्तु बहुत कुछ शुद्धता के निकट होते हैं। अत यह निश्चित करना उचित होता है कि शुद्धता किस सीमा तक कायम रखनी है।

शुद्धता का परिमाण (Degree of accuracy)—यह बात ध्यान में रखते हुए कि सम्पूर्ण शुद्ध तथ्य एकत्रित करने अत्यन्त कठिन हैं यह आवश्यक है कि यह निश्चित कर लिया जाय कि प्रत्येक अनुमान मे शुद्धता का किस मात्रा तक ध्यान रखा जायगा। एक बार निश्चित करने के पश्चात् इस मात्रा को अन्त तक कायम रखा जाना चाहिए। इस सम्बन्ध में यह कहना भी आवश्यक है कि प्रत्येक क्षेत्र मे भिन्न भिन्न परिमाणों में शुद्धता की आवश्यक पडती है। भौतिक विज्ञानो के क्षेत्र मे तथ्यो की अधिकाधिक शुद्धता आवश्यक है तथा वहा शुद्धता नापने के यन्त्र भी बहुत बारीक रखने पडते हैं जो शुद्धता का आवश्यक परिमाण निश्चित कर सकें। सामाजिक विज्ञानों में सम्पूर्ण शुद्धता की आवश्यकता नही, वहा सामान्य शुद्धता ही यथेष्ट है। साख्यिकीय दृष्टिकोण मे भी सामान्य त्रुटियां तथ्यो को विशेष प्रभावित नही करती। श्री किंग के शब्दो मे *"अधिकतम शुद्धता प्राप्त करने के प्रयत्न बहुधा केवल समय नष्ट करते हैं।"* [1]

विभिन्न क्षेत्रो मे शुद्धता का परिमाण वस्तु अथवा तथ्यो के गुण पर निर्भर करता है। *यदि भारतीय जूट के अक पैसो तक शुद्ध दिखलाये जाय तो यह हास्यास्पद* होगा, इसके विपरीत साग सब्जी अथवा नमक जैसी वस्तु का मूल्य पैसो मे दिखलाया जा सकता है। कोयले के एक बडे ढेर का वजन टनो या मनो मे दिखलाना ही उचित है, क्योकि कुछ सेर अथवा पौंड कोयले का विशेष महत्व नही है। परन्तु एक रसायन शास्त्री यदि अपने विष के स्टॉक को नापना चाहता है तो यह अनुमान रत्ती, चावल या मिलीग्राम तक शुद्ध होना चाहिये क्योकि विष की थोडी मात्रा ही बहुत महत्वपूर्ण होती है। इसी प्रकार घास का ढेर सेरो मे तथा स्वर्ण का अनुमान तोले और माशे मे करना उचित होता है अत यह स्पष्ट है कि शुद्धता का परिमाण वस्तु के गुण तथा कार्य के उद्देश्य पर निर्भर करता है। साधारणतया जब अको को सारणियो में दिखलाया जाता है तो ऊपर ही अको की शुद्धता का परिमाण लिख दिया जाता है।

उपरोक्त वर्णन से यह स्पष्ट है कि शुद्धता की सीमा वस्तु के गुण पर निर्भर करती है परन्तु एक विशेष गुण वाली वस्तु को भी कई प्रकार से दिखलाया जा सकता है। नीचे कोयले की मात्रा के कुछ उदाहरण दिये जाते हैं।

(अ) सम्पूर्ण अको में कोयले की मात्रा 1000 टन है।

(आ) कोयले की मात्रा 1000$\pm$5 टन है।

(इ) कोयले की मात्रा 999 5 और 1000 5 टन के बीच है।

(ई) कोयले की मात्रा 1000 टन है और यह C5 प्रतिशत तक शुद्ध है।

---

1 Attempts to obtain the greatest possible degree of accuracy are frequently merely wastes of time

(Elements of Statistical Methods by King, Page 65)

उपरोक्त उदाहरण मे विभिन्न प्रकार से दिए हुए अंको मे बहुत मामूली अन्तर है परन्तु बहुत से अन्य मामलो मे अन्तर इससे अधिक हो सकते हैं। उदाहरणत हम किसी व्यक्ति की आयु वर्षों मे, आय रुपयो मे तथा दो नगरो का फासला मीलो में प्रकट करते हैं और क्रमश, महीनो, आनो तथा फर्लांगो को विशेष महत्व नही देते। इस प्रकार शुद्धता का परिमाण वर्षों, रुपयों तथा मीलो तक ही होता है।

उपसादन (Approximation)—बहुधा जाच तथा अनुसन्धान के परिणामस्वरूप बहुत बडी बडी सख्याए प्राप्त होती हैं। यह बडी सख्याए स्मरण नहीं रखी जा सकती और देखने मे भी भार सी लगती हैं। बडी सख्याए अधिक जगह घेरती हैं तथा उनका प्रयोग व्यावहारिक भी नही है। इन सब कारणो से अकों को सक्षिप्त कर लिया जाता है। परिणामस्वरूप छोटी सख्याए तुलनाओ को सरल बना देती हैं तथा आकलन (Calculation) कार्य भी आसान हो जाता है। यह स्पष्ट है कि 5,41,932 के स्थान पर 5·42 लाख प्रयुक्त किया जाय,तो देखने, समझने, व्यवहार करने तथा स्मरण रखने मे बहुत आसानी हो जाती है।

उपसादन की रीतियां—उपसादन करने मे निम्नलिखित रीतियो का प्रयोग किया जाता है —

(1) निकटतम सख्या मे परिवर्तित करना —बहुत ही बडी सख्याओ को आगे वाली या पहले की निकटतम सख्या मे बदल लेते है। नीचे की सारणी में कुछ सख्याओ को निकटतम सख्याओं मे सक्षिप्त किया गया है।

उदाहरण न० 51

भारत में भूमि क्षेत्रफल×

प्रदेश	एकडों मे	करोड एकडो में	करोड़ एकडा मे
1. हिमालय प्रदेश	15,25,74,080	15·26	15
2 उत्तरी मैदानी प्रदेश	18 91,93,600	18 92	19
3 दक्षिणी पहाडी तथा पठारी प्रदेश	33,29,08,160	33 29	33
4. पश्चिमी घाट तथा तटीय प्रदेश	6,95,21,280	6 95	7
5. पूर्वी घाट तथा तटीय प्रदेश	6,63,14,880	6 63	7
6 अडमान तथा निकोबार द्वीप	20,57,600	0 21	–
	81,25,69,600	81 26	81

उपरोक्त सारणी में 1951 की जन-गणना के समय एकत्रित किए गऍ भूमि सम्बन्धी अंक दिए गए हैं। अब यदि यह कहा जाय कि भारत मे कुल भूमि 81,25, 69,600 एकड है और प्रत्येक प्रदेश (ऊपर के विवरण अनुसार) की भूमि की मात्रा भी पृथक् पृथक् दी जाय तो इतनी बडी सख्याओं से व्यवहार करना बहुत कठिन हो जायगा। इसके विपरीत यदि यही सख्याएं करोड एकडो मे दे दी जायं (जैसी कि ऊपर की सारणी मे दी गई है) तो अकों को समझना बहुत सरल हो जाता है। अन्तिम

× Census of India—1951 Paper No. 2 Page 18

खाने में दिये हुये अक तो और भी अधिक सरल हो गए हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि 81,25,69,600 एकड के स्थान पर 81 26 करोड एकड अथवा केवल 81 करोड एकड कहना अधिक युक्ति सगत एव व्यावहारिक जान पडता है।

उपरोक्त विधि के अन्तर्गत पूर्ण सख्याए लेने मे इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि जहा सख्या आधे अथवा आधे से अधिक हो उसे एक मान लिया जाय। जैसे 4358 को यदि सहस्रो मे सक्षिप्त करना है तो 4 4 हजार लिखना उचित रहेगा क्योंकि 358, 350 से अधिक भी है और वह 300 की बजाय 400 के अधिक निकट है। इसी प्रकार 5,43,211 को लाखो मे सक्षिप्त करना है तो 5 43 लाख लिखना ठीक है क्योंकि 43,211, 43000 के ही अधिक निकट है 44000 के नही। उपरोक्त दोनो सख्याओ को यदि क्रमश केवल हजारो तथा लाखो मे सक्षिप्त करना हो और दशमलव का प्रयोग नही करना हो तो यह सख्याए क्रमश 4 हजार तथा 5 लाख ही पढी जायेंगी। परन्तु साधारणतया जिस मात्रा में सक्षिप्त करना हो उसमे दो अक आगे लेना ठीक रहता है।

२ कुछ अङ्को को बिल्कुल हटा करके—इस रीति के अन्तर्गत जितनी सख्याए दी जाती हैं उन्हे सक्षिप्त करने के लिए उनके अन्त के कुछ अक बिल्कुल छोड दिए जाते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण न० 52

भारत की जनसंख्या १९०१–६१

वर्ष	जन सख्या	लाखो मे	करोडो में
1901	23,62,81,245	23 62	23
1911	25,21,22,410	25.21	25
1921	25,13,52,261	25 13	25
1931	27,90,15,498	27 90	27
1941	31,87,01,012	31 87	31
1951	36,11,29 622	36 11	36
1961	43,92,35,082	43 92	43

उपरोक्त तालिका मे गत सात दशाब्दी की जन सख्याओ के अको को सक्षिप्त किया गया है। लाखो मे सक्षिप्त करते समय अन्त की पाच तथा करोडो मे सक्षिप्त करने मे अन्त की सात सख्याए हटा दी गई हैं। सक्षिप्त करने की यह पद्धति अत्यन्त सरल एव सुविधाजनक है परन्तु इसके द्वारा सक्षेपण के परिणाम कभी कभी औचित्य के निकट नहीं होते। प्रस्तुत उदाहरण मे ही 1901, 1931, 1941 तथा 1961 की जनसख्याए लाखो मे तो सम्पूर्ण जनसख्या से बहुत भिन्न नही है परन्तु इनका करोडो में सक्षेपण होने पर वह सख्या मे अधिक दूर हो गई हैं। इन वर्षों की वास्तविक जनसख्याए क्रमश 24 28, 32 तथा 44 करोड के अधिक समीप हैं। इससे निष्कर्ष निकलता है कि सख्याए हटाने की पद्धति मे अधिक सख्याए नही हटानी चाहियें।

3 दशमलव मे परिवर्तित करना—अंकं अथवा सख्यात्मक तथ्य सक्षेपण

की एक विधि यह है कि इन्हें दशमलव मे परिवर्तित कर प्रस्तुत किया जाय। दशमलव मे परिवर्तन करने की विधि यह है कि सम्पूर्ण सख्याओ के योग को 100 मान कर अलग-अलग सख्याओ को उसकी तुलना मे परिवर्तित कर लिया जाय। नीचे इसका एक उदाहरण दिया जाता है।

उदाहरण न० 53

एक परिवार का मासिक आय-व्ययक
(BUDGET)

	व्यय की मद	व्यय रु० मे	प्रतिशत व्यय
1	भोजनादि	100	50
2	वस्त्र	24	12
3	आवास	20	10
4	प्रकाश तथा ईधन	12	6
5	शिक्षा	12	6
6	स्वास्थ्यादि	10	5
7	मनोरजनादि	12	6
8	बचत	10	5
	योग	200 रु०	100

उपरोक्त उदाहरण मे यह बात स्पष्ट हो जाती है कि जिस परिवार की मासिक आय २०० रु० है उसका विभिन्न मदो पर कितने कितने प्रतिशत व्यय है। इससे विभिन्न मदो पर किए गये व्यय का तुलनात्मक महत्व ज्ञात हो जाता है। यदि सख्याए बहुत बडी हो तो प्रतिशतो का महत्व और भी स्पष्ट होता है क्योकि बडी मदो मे सम्पूर्ण सख्याओ की तुलना करना अधिक बोध-गम्य नही है। बहुत सी बार दो सख्याओ की तुलना करनी होती है उनके लिए सरल पद्धति यह होती है कि एक सख्या को दूसरी की प्रतिशत मे रख लेते हैं। निम्न उदाहरण मे यह भी स्पष्ट हो सकता है।

उदाहरण न० 54

अ ब स कम्पनी का आय व्यय सम्बन्धी विवरण

वर्ष	कुल आय	चालू व्यय	व्यय प्रतिशत	व्यय प्रतिशत १ प्रतिशत तक शुद्ध
1952	5,48,352	3,22,455	59 11	59 0
1953	5,49,421	3,26,346	59 39	59 0
1954	5,49,834	3,31,432	60 28	60 0
1955	5,54,126	3,46,211	62 48	62 0
1956	5 60 345	3,68,424	6[illegible] 71	66 0

उपरोक्त तालिका मे एक बस कम्पनी की कुल आय (Gross Income) तथा चालू व्यय का विवरण दिया गया है तथा आय की तुलना मे उनके व्यय की प्रतिशत भी

खाने में दिये हुये अंक तो और भी अधिक सरल हो गए हैं। इस प्रकार हम देखते हैं कि 81,25,60,600 एकड के स्थान पर 81 26 करोड एकड अथवा केवल 81 करोड एकड कहना अधिक युक्ति सगत एव व्यावहारिक जान पडता है।

उपरोक्त विधि के अन्तर्गत पूर्ण सख्याए लेने में इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि जहा सख्या आधे अथवा आधे से अधिक हो उसे एक मान लिया जाय। जैसे 4358 को यदि सहस्रो मे सक्षिप्त करना है तो 4 4 हजार लिखना उचित रहेगा क्योंकि 358 350 से अधिक भी है और वह 300 की बजाय 400 के अधिक निकट है। इसी प्रकार 5,43,211 को लाखो मे सक्षिप्त करना है तो 5 43 लाख लिखना ठीक है क्योंकि 43,211, 43000 के ही अधिक निकट है 44000 के नही। उपरोक्त दोनो सख्याओ को यदि क्रमश केवल हजारो तथा लाखो मे सक्षिप्त करना हो और दशमलव का प्रयोग नही करना हो तो यह सख्याए क्रमश 4 हजार तथा 5 लाख ही पढी जायेंगी। परन्तु *साधारणतया जिस मात्रा में सक्षिप्त करना हो उससे दो अक आगे लेना ठीक रहता है।*

2 कुछ अङ्को को बिल्कुल हटा करके—इस रीति के अन्तर्गत जितनी सख्याए दी जाती हैं उन्हें सक्षिप्त करने के लिए उनके अन्त के कुछ अक बिल्कुल छोड दिए जाते हैं।

निम्नलिखित उदाहरण मे यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण न० 52

भारत की जनसंख्या १९०१–६१

वर्ष	जन सख्या	लाखो मे	करोडो मे
1901	23,62,81,245	23 62	23
1911	25,21,22,410	25 21	25
1921	25,13,52,261	25 13	25
1931	27,90,15,498	27 90	27
1941	31,87,01,012	31 87	31
1951	36,11,29,622	36 11	36
1961	43,92,35,082	43 92	43

उपरोक्त तालिका मे गत सात दशाब्दो की जन सख्याओ के अको का सक्षिप्त किया गया है। लाखो मे सक्षिप्त करते समय अन्त की पाच तथा करोडो मे सक्षिप्त करने मे अन्त की सात सख्याए हटा दी गई हैं। सक्षिप्त करने की यह पद्धति अत्यन्त सरल एव सुविधाजनक है परन्तु इसके द्वारा सक्षेपण के परिणाम कभी कभी औचित्य के निकट नही होते। प्रस्तुत उदाहरण मे ही 1901, 1931, 1941 तथा 1961 की जनसख्याए लाखो मे तो सम्पूर्ण जनसख्या से बहुत भिन्न नही है परन्तु इनका करोडो में सक्षेपण होने पर वह सख्या से अधिक दूर हो गई है। इन वर्षों की वास्तविक जनसंख्याए क्रमश 24, 28, 32 तथा 44 करोड के अधिक नजदीक हैं। इससे निष्कर्ष निकलता है कि सख्याए हटाने की पद्धति मे अधिक सख्याए नही हटानी चाहियें।

3 दशमलव मे परिवर्तित करना—अकं अथवा सख्यात्मक तथ्य सक्षेपण

की एक विधि यह है कि इन्हें दशमलव में परिवर्तित कर प्रस्तुत किया जाय। दशमलव में परिवर्तन करने की विधि यह है कि सम्पूर्ण संख्याओं के योग को 100 मान कर अलग-अलग संख्याओं का उसकी तुलना में परिवर्तित कर लिया जाय। नीचे इसका एक उदाहरण दिया जाता है।

उदाहरण नं० 53

एक परिवार का मासिक आय-व्ययक
(BUDGET)

	व्यय की मद	व्यय रु० में	प्रतिशत व्यय
1	भोजनादि	100	50
2	वस्त्र	24	12
3	मकान	20	10
4	प्रकाश तथा ईंधन	12	6
5	शिक्षा	12	6
6	स्वास्थ्यादि	10	5
7	मनोरंजनादि	12	6
8	बचत	10	5
	योग	200 रु०	100

उपरोक्त उदाहरण में यह बात स्पष्ट हो जाती है कि जिस परिवार की मासिक आय २०० रु० है उसका विभिन्न मदों पर कितने कितने प्रतिशत व्यय है। इससे विभिन्न मदों पर किए गए व्यय का तुलनात्मक महत्त्व ज्ञात हो जाता है। यदि संख्याएँ बहुत बड़ी हों तो प्रतिशतों का महत्त्व और भी स्पष्ट होता है क्योंकि बड़ी मदों में सम्पूर्ण संख्याओं की तुलना करना अधिक बोधगम्य नहीं है। बहुत सी बार दो संख्याओं की तुलना करनी होती है उसके लिए सरल पद्धति यह होती है कि एक संख्या को दूसरी की प्रतिशत में रख लेते हैं। निम्न उदाहरण में यह भी स्पष्ट हो सकता है।

उदाहरण नं० 54

अ ब स कम्पनी का आय व्यय सम्बन्धी विवरण

वर्ष	कुल आय	चालू व्यय	व्यय प्रतिशत	व्यय प्रतिशत १ प्रतिशत तक शुद्ध
1952	5,45,352	3,22,155	59.11	59.0
1953	5,49,421	3,26,316	59.39	59.0
1954	5,49,834	3,31,432	60.28	60.0
1955	5,34,126	3,[illegible]6,211	62.[illegible]	62.0
1956	5,60,315	3,[illegible]	[illegible]	66.0

उपरोक्त तालिका में अ ब स कम्पनी की कुल आय (Gross Income) तथा चालू व्यय का विवरण दिया गया है तथा आय की तुलना में उसके व्यय की प्रतिशत भी

दी गई है। प्रतिशत का हिसाब भी दो तरह से लगाया गया है। चतुर्थ खाने में तो दशमलव के दो बिन्दुओं तक शुद्ध हिसाब किया गया है तथा पचम खाने मे निकटतम सम्पूर्ण अक रखे गये हैं।

दशमलव प्रणाली द्वारा अको की तुलना अधिक सरल हो जाती है परन्तु कभी कभी इनका हिसाब बहुत लम्बा हो जाता है। परन्तु हिसाब लगाने के लिये लम्बे अको को सक्षिप्त कर लेना चाहिये। जैसे ऊपर के उदाहरण मे ही 5,45,352 के स्थान पर 545 लेकर और 3,22,455 के स्थान पर 322 लेकर ही प्रतिशत निकाल लेने से भी परिणामो मे विशेष अन्तर नही आयगा।

सक्षिप्त किए हुए अको से प्रतिशत निकाल कर तुलना करना अत्यन्त सरल होता है और परिणाम भी शुद्ध होते हैं, परन्तु सक्षिप्त किये गए अको का प्रयोग सावधानी से करना चाहिए क्योकि यदि सक्षिप्त अको को आगे भाग देकर गुणा करके अथवा वर्गमूल आदि निकाल कर परिणाम निकालते हैं तो शुद्धता मे काफी अन्तर पड सकता है। अत जहा परिणाम निकालने से पूर्व अको को जोड गुणा आदि के किसी अन्य क्रम मे काम में लाना आवश्यक है वहा सम्पूर्ण अको का ही प्रयोग करना चाहिए। दूसरे, जहा शुद्धतम परिणाम निकालने हो वहा भी सक्षिप्त अको का प्रयोग न करना श्रेयस्कर है।

अको के सक्षेपण अथवा उपसादन करने के पश्चात् इस बात की ओर ध्यान रखना चाहिए कि उपसादित अक किस प्रकार रखने है। यदि 345 को उपसादित किया जाता है तो 300 रखना चाहिए या 3 रखकर ऊपर "सैंकडो" मे लिख देना चाहिये। यदि 2 8 गज को उपसादित किया गया तो 3 0 गज लिखना चाहिये ताकि यह उससे भिन्न रह सके। केवल 1 गज लिखने का तात्पर्य यह है कि यह शुद्ध अक है, संक्षिप्त किया हुआ नही, जबकि 3 0 गज से यह स्पष्ट है कि यह निकटतम शुद्ध अक है।

भूले (Errors)—साख्यिकी मे अनेक तथ्य अनुमान पर आधारित होते हैं। वास्तविक तथा अनुमानित अको में जो भूल होती है वह साख्यिकीय भूल कहलाती है। यहा भूल तथा गलती (Mistake) मे अन्तर समझ लेना चाहिए। गलती किसी कार्य को गलत तरीके से करने अथवा गलत साधन अपनाने से होती है जबकि भूल केवल अनुमानित तथ्यो के कम या ज्यादा होने के कारण होती है।

भूल दो प्रकार की होती है।

(1) असली भूल (Absolute Error)

(2) सापेक्षिक भूल (Relative Error)

असली भूल (Absolute Error)—यदि अनुमान लगाए कि नगर 'क' की जनसंख्या 45,000 है और वास्तविक जनसख्या 45,800 हो तो इन अनुमानित तथा असली तथ्यो मे जो अन्तर है अर्थात 800, वह असली भूल है।

सापेक्षिक भूल (Relative Error)—यदि असली भूल को अनुमान के अनुपात मे प्रकट किया जाय तो परिणामस्वरूप सापेक्षिक भूल निकल आयेगी। ऊपर के उदाहरण में सापेक्षिक भूल $\frac{800}{45000}$ अर्थात् ·0177 है। कभी कभी सापेक्षिक भूल को प्रतिशत भूल के रूप में भी प्रकट किया जाता है। वर्णित उदाहरण मे प्रतिशत भूल

(Percentage Error) 1·77 होगी। यहां यह बतला देना सर्वथा उपयुक्त होगा कि सापेक्षिक भूल असली भूल की बजाय अधिक अच्छा माप दण्ड है जैसा कि निम्नलिखित उदाहरण से प्रकट होगा—

उदाहरण नं० 55

एक सभा में 99 व्यक्ति हैं, अनुमान लगाया गया कि 100 हैं। दूसरी सभा में 99,999 व्यक्ति हैं, अनुमान लगाया गया कि 1,00,000 हैं। इस उदाहरण के अनुसार एक सभा में सम्बन्धित अंकों में सापेक्षिक भूल $\frac{1}{100}$ अर्थात् ·01 है तथा दूसरी सभा की सापेक्षिक भूल $\frac{1}{100000}$ अर्थात् ·00001 है। इससे स्पष्ट है कि दूसरी सभा के अनुमान में सापेक्षिक भूल पहली सभा के अनुमान से बहुत कम है और वास्तव में यही परिणाम शुद्ध भी है।

भूलों के स्रोत (Sources of Errors)

भूल बहुधा निम्न स्रोतों से निकलती हैं—

(१) मूल भूल (Error of Origin)—(अ) सामग्री संग्रह करते समय कोई वजन, इंच, फुट आदि में अंकित कर देना, (आ) सूचकों द्वारा गलत सूचना देना, (इ) गणक का अयोग्य होना (ई) अनुपयुक्त इकाई (Unit) का चुन लेना।

(२) अपर्याप्तता भूल (Error of Inadequacy)—(अ) यह भूल या तो न्यादर्श के बहुत छोटा होने से होती है जिससे मदों की संख्या उचित (reasonable) न हो या (आ) सम्पूर्ण जांच के क्षेत्र से सूचना एकत्र नहीं हो पाई हो, कोई भाग छूट गया हो।

(३) प्रहस्तन भूल (Error of Manipulation)—यह भूल या तो उपसादन (Approximation) के गलत तरीके अपनाने से होती है या नापने, गिनने या तोलने समय होती है।

असली भूल को निम्न प्रकार से वर्गीकृत कर सकते हैं।

(१) पक्षपातपूर्ण भूल (Biased Error) तथा (२) पक्षपातहीन भूल (Unbiased Error)।

पक्षपातपूर्ण भूलें— पक्षपातपूर्ण भूलें वह हैं जो गणक के पक्षपात के कारण अथवा मापक यन्त्र के दोष के कारण होती हैं। यदि हम अंक एकत्रित करने के पश्चात् यह निश्चय करें कि हम अंकों को संक्षिप्त करने के लिए अन्त के तीन तीन अंक (अथवा न्यूनाधिक) छोड़ देंगे तो इससे जो भूल उत्पन्न होगी वह पक्षपातपूर्ण होगी क्योंकि हमने निर्णय एक दिशा के पक्ष में किया है।

यह बात निम्न उदाहरण से स्पष्ट हो जायगी—

उदाहरण नं० 56

वास्तविक अंक	:	295	212	325	358	312
संक्षिप्त अंक	:	200	200	300	300	300
भूल	:	95	12	25	58	12 = 202

इस प्रकार हम देखते हैं कि पक्षपातपूर्ण भूलें एक ही दिशा मे बढती हैं और इसलिए इनको बढती हुई भूलें (cumulative errors) भी कहते हैं। पक्षपातपूर्ण भूलें मापक यत्र के दोष के कारण भी हो सकती हैं। जैसे यदि हमने एक गज-शलाका (yard stick) से 100 गज भूमि नापी और यदि शलाका 1 इच कम लम्बी हो तो हमारे नाप मे 100 इच की भूल होगी। यह भी पक्षपातपूर्ण भूल का एक उदाहरण है। इस उदाहरण से भी स्पष्ट है कि पक्षपातपूर्ण भूलें बढती हुई (cumulative) या अपूरक (non-compensating) होती हैं।

पक्षपातहीन भूलें (Unbiased errors)—वह भूलें हैं जो बडी सख्याओ के संक्षेपण (approximation) के कारण उत्पन्न होती हैं। यदि हम सख्याओ को उनकी निकटतम सम्पूर्ण सख्याओ मे बदल दें तो इस किया से जो भूल होगी वह पक्षपातहीन भूल होगी। ऐसी भूलें वास्तविक सख्या की दोनो दिशाओं मे हो सकती हैं अर्थात् यदि अनुमानित सख्या वास्तविक से अधिक ली गई है जैसे 469 को 500 मे परिवर्तित कर दिया जाय तो भूल सकारात्मक है और यदि 339 को 300 किया गया तो भूल नकारात्मक है। दोनो दिशाओ मे होने के कारण पक्षपातपूर्ण भूलें पूरक (compensating) होती हैं। एक दिशा मे कम ली गई सख्याएं दूसरी दिशा मे अधिक ली गई संख्याओ से पूरित होती रहती हैं। एक उदाहरण से पक्षपातहीन भूल भी स्पष्ट हो जायगी—

उदाहरण न० 57

वास्तविक सख्या	295	212	325	358	312
अनुमानित अक	300	200	300	400	300
भूल	-5	+12	+25	-42	+12 = + 2

उपरोक्त उदाहरण से हम देखते हैं कि पक्षपातहीन भूलो का योग +2 है जो नगण्य है। नीचे विद्यार्थियो की सुविधा के लिए पक्षपातपूर्ण तथा पक्षपातहीन भूलें समझने के लिए एक सम्मिलित उदाहरण दिया जाता है —

उदाहरण 58

पक्षपातपूर्ण तथा पक्षपातहीन भूल सम्बन्धी तालिका

शुद्ध सख्या	हजारो मे वर्णित शुद्ध सख्या	पक्षपातहीन असली भूल	अन्तिम तीन अक छोडकर हजारो मे	पक्षपातपूर्ण असली भूल
44,352	44	352	44	352
24,832	25	-168	24	832
51,676	52	-324	51	676
43,182	43	182	43	182
1,64,042	164	+42	162	2042

उपरोक्त उदाहरण से पक्षपातपूर्ण तथा पक्षपातहीन असली भूल स्पष्ट हो जाती है, इससे सापेक्षिक भूल निकाली जा सकती है।

पक्षपातपूर्ण सापेक्षिक भूल (Biased Relative error) $= \frac{2012}{162000} = 013$

पक्षपातहीन सापेक्षिक भूल (Unbiased Relative error) $= \frac{42}{164000} = 00026$

इस विवरण से यह स्पष्ट है कि पक्षपातहीन सापेक्षिक भूल सदा पक्षपातपूर्ण सापेक्षिक भूल से कम होती है।

अनुपातों पर भूलों का प्रभाव—जब हम दो संख्या समूहों की अनुपातों के द्वारा तुलना करते हैं तो पक्षपातपूर्ण सापेक्षिक भूल तथा पक्षपातहीन सापेक्षिक भूल दोनों का ही प्रभाव नगण्य होता है। निम्न उदाहरण से यह बात भी स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 5 9

तुलनीय वास्तविक अंक 1	2	निकटतम हजार तक शुद्ध अंक 1	2	तीन अंक छोड़कर हजार तक शुद्ध अंक 1	2
12,645	37935	13	38	12	37
अनुपात 1	3	1	292 3	1	308 3

भूलों का अनुमान लगाना (Estimation of errors) बहुधा ऐसा होता है कि हमारे सामने केवल अनुमानित अंक ही प्रस्तुत हैं, वास्तविक अंकों का पता नहीं है, ऐसी अवस्था में भी भूल तो रहेगी ही, परन्तु उसका परिमाण कितना होगा, यह कैसे ज्ञात होगा? इसकी पद्धति भी सरल है। यदि हमने अनुमानित संख्याएं हजारों में लिखी है तो भूल एक हजार के आधे 500 से अधिक नहीं हो सकेगी। संख्या सैंकड़ो में होने पर भूल सैंकड़े के आधे अर्थात् 50 से अधिक नहीं हो सकती है। ऐसी भूल को सम्भावना भूल (Possible Error) भी कहते हैं। इस तथ्य को प्रकट करने के लिए निम्नलिखित उदाहरण दिया जाता है।

उदाहरण नं० 5 10

अनुमानित संख्या	कम से कम वास्तविक मूल्य	अधिक से अधिक वास्तविक मूल्य	Possible Error सम्भावना भूल
53,000 (हजार तक शुद्ध)	52,500	53,500	$\pm$ 500
400 (सैंकड़े तक शुद्ध)	350	450	$\pm$ 50

श्री बोडिंगटन के मतानुसार, असली भूल की सीमा तो इस प्रकार अनुमान सीमा के आधे से अधिक नहीं होगी, परन्तु यदि कुछ मदों के योग में जिनमें पक्षपातहीन भूल होने की सम्भावना है, असली भूल का अनुमान लगाना हो तो औसत असली भूल को मदों के वर्गमूल से गुणा कर देना चाहिए।

भूल दो प्रकार की होती है। असली भूल तथा सापेक्षिक भूल। असली भूल दो प्रकार की होती है—पक्षपातहीन तथा पक्षपातपूर्ण भूल।

पक्षपातहीन भूल—सामान्य रूप से मापों के अनुमानित अथवा उपसादित करने से उत्पन्न होती है। यह पूरक होती है।

पक्षपातपूर्ण भूल—गणक के पक्षपात अथवा जाँच यंत्र के अशुद्ध होने के कारण होती है। यह बढ़ती हुई होती है।

EXERCISE V

1 "Statistical method does not aim at mathematical exactitude" Discuss

2 What standard of accuracy would you adopt in the statistical measurement of (a) wages, (b) stock of coal, (c) stock of poison, (d) a dune of sand (e) a piece of gold and (f) a big crowd ?

3 Discuss the main sources of errors and their effects

4. Distinguish between (a) absolute and relative errors and (b) biassed and unbiassed errors and explain the steps that are taken to meet the effect (B Com, Agra, 1940)

5 In what ways does a statistical error differ from a mistake ? What classes of errors are there and how may they be measured. (B Com Alld 1943) (B Com Raj, 1961)

6 What precautions should be taken to avoid biassed errors in any statistical investigation ?

7 State the various methods of estimating biassed and unbiassed errors both absolutely and relatively Examine the characteristics of each

8 "Of the biassed errors the statistician should have none, but of the unbiassed ones the more the merrier notwithstanding that they are also errors" Elucidate

9 "Unbiassed errors are of little importance compared with biassed errors in a sample estimate, but biassed errors diminish when the ratio of the two similar estimates is taken" Discuss

10 (a) State the main sources of errors in Statistics and their effects.

(b) State the important methods of approximation and their utility in Statistics

11 "In the economic survey it would be better to collect fairly accurate data or statistics to which the degree of accuracy could be assigned, even on a limited scale, rather than a mass of data of varying degree of accuracy, extending over a wide area By all means let us have quantity as well as quality but if there is choice between

quantity and quality, the latter is the most essential in statistical investigations " Explain the above statement with necessary comments

12 What is Approximation ? State the different ways of approximating figures and discuss the merits of each

13 Mention the advantages of approximation in Statistics What degree of accuracy is generally required in each statistical investigation ? (M Com Raj, 1951)

14. Discuss the various types of errors likely to creep into statistical investigations and suggest how to avoid or correct them

(B Com. Agra 1949)

15 Discuss the standard of accuracy required in statistical calculations To what extent should approximation be used. ?

(M A. Agra, 1949)

अध्याय ६

वर्गीकरण तथा सारणीयन

(Classification and Tabulation)

"A good statistical table is a triumph of ingenuity and technique, a masterpiece of economy of space combined with a maximum of clearly presented information."

Harry Jerome

जब विभिन्न तथ्यों का संग्रहण समाप्त हो जाता है तो सांख्यिक के समक्ष तथ्यों तथा अङ्कों का एक ढेर सा लग जाता है। इस ढेर से प्रस्तुत रूप में कोई भी निष्कर्ष निकालना लगभग असम्भव है। अतः उसे समस्त अङ्कों का ऐसे ढंग से वर्गीकरण करना पड़ता है जिससे वह अधिक सरल एवं बोधगम्य हो सकें। इसके लिए दो बातें विशेष रूप से ध्यान में रखनी पड़ती हैं—

(1) विस्तृत तथ्यों को संक्षिप्त करना तथा (2) एक से तथ्यों को एक स्थान पर प्रस्तुत करना। उदाहरणतया किसी राज्य के जनसंख्या सम्बन्धी सभी अङ्क एक स्थान पर उपस्थित होने पर यह आवश्यक है कि उन अङ्कों में से समान बातें अलग अलग निकाली जाय। एक आयु अथवा वर्ग के पुरुष अलग, स्त्रियां अलग तथा बच्चे अलग निकाले जा सकते हैं। आमदनी लेनी हो तो 100 रुपये से कम आमदनी वालों को एक अलग वर्ग में छाटना होगा, 100 से 200 वालों को अलग, अथवा और किसी भी वर्ग के अनुसार समान आय वालों को अलग करना आवश्यक है। इस प्रकार समस्त अङ्कों को समानधर्मी समूहों में रखने की क्रिया को ही वर्गीकरण कहते हैं। कॉनर के शब्दों में वर्गीकरण वस्तुओं को उनकी साम्यता अथवा सम्बन्धानुसार श्रेणीबद्ध करने की क्रिया को कहते है जिससे विभिन्न तथ्यों में पाई जाने वाली एकता का पता चल सके[1]।

उपरोक्त विवरण से यह स्पष्ट है कि वर्गीकरण निम्नलिखित उद्देश्यों के लिये किया जाता है—

(1) अङ्कों की साम्यता की अभिव्यक्ति—एक ही प्रकार के तथ्यों को एक स्थान अथवा वर्ग के अन्तर्गत लेने से पता चल जाता है कि कितनी इकाइयां एक दूसरे के अधिक समीप हैं तथा कितनी भिन्न हैं।

(2) सरलता —तथ्यों के विवरण का आवश्यक विस्तार समाप्त कर उसे संक्षेप में ऐसे ढंग से प्रस्तुत किया जाता है जिससे सारे समूह की विशेषताएं शीघ्रता-पूर्वक ज्ञात हो जाती है।

---

1. Classification is the process of arranging things (either actually or rationally) in groups or classes according to their resemblances and affinities and gives expression to the unity of attributes that may subsist amongst a diversity of individuals —L R Connor (Statistics in Theory and Practice)

(3) अध्ययन—वर्गीकरण किये बिना अङ्कों का तुलनात्मक अध्ययन करना असम्भव नहीं तो कठिन अवश्य होता है।

इस प्रकार सारे अङ्क समूह में, चाहे वह एक से व्यक्तियों (जैसे श्रमिकों) के सम्बन्ध में ही तथ्य एकत्रित किये गए हों, विभिन्नताएं अवश्य होती हैं। वर्गीकरण इस प्रकार की विभिन्नताओं को भी एक अथवा कुछ वर्गों में एक स्थान पर प्रस्तुत करने में सहायक होता है।

सांख्यिकी के अन्य कार्यों की भांति वर्गीकरण का कार्य भी बहुत सावधानी से किये जाने की आवश्यकता है। अनुभवी एवं कुशल व्यक्ति की देखरेख बिना बहुत से एक वर्गीय आवश्यक तथ्य भी विभिन्न वर्गों में आ जाते हैं जिससे वर्गीकरण अशुद्ध एवं अविश्वसनीय हो सकता है। वर्गीकरण करते समय निम्नलिखित बातों का ध्यान रखना चाहिए—

(1) वर्गीकरण अत्यन्त स्पष्ट होना चाहिए.—जो भी वर्ग बनाए जायें वह उचित रूप से परिभाषित हों तथा उनका अर्थ स्पष्ट हो। यदि शिक्षितों तथा अशिक्षितों के वर्ग बनाते हैं तो यह बात स्पष्ट होनी चाहिये कि शिक्षितों से क्या तात्पर्य है। इस वर्ग के अन्तर्गत साक्षर व्यक्ति (जो केवल सामान्य अक्षर ज्ञान रखता है) को भी रखना है अथवा नहीं। इसी प्रकार यदि श्रमिकों को पुरुष, स्त्रियों तथा बच्चों में वर्गीकृत करना है तो कितनी वर्ष की आयु तक के व्यक्तियों को बच्चों में रखा जायगा यह स्पष्ट करना चाहिये। फिर यह भी तय करना चाहिये कि बच्चों में लड़के और लड़कियां दोनों को रखा जायगा या इनके अलग अलग वर्ग बनाये जायेंगे।

(2) वर्गीकरण के सिद्धान्त में स्थायित्व होना चाहिए.—साधारणतया एक बार यह तय कर लेना चाहिये कि एक अङ्क समूह में कितने वर्ग होंगे तथा प्रत्येक वर्ग में कौन कौन से मद सम्मिलित किए जायेंगे। तय कर लेने के बाद बार बार इसमें परिवर्तन नहीं करना चाहिये क्योंकि ऐसा करने से सारे तथ्यों को नये सिरे से लेना होगा। इसमें श्रम अधिक होगा। इसके अतिरिक्त यदि एक बार एक ढंग से वर्गीकरण किया और दूसरी बार दूसरे ढङ्ग से तो दोनों में तुलना करना सम्भव नहीं होगा।

(3) वर्गीकरण परिवर्तनशील होना चाहिए.—स्थायित्व का तात्पर्य यह नहीं कि एक बार जो वर्गीकरण कर दिया उसमें कभी परिवर्तन किया ही नहीं जा सके। परिस्थितियां सदैव बदलती रहती हैं अतः वर्गीकरण इस प्रकार से किया जाना चाहिये कि बदलती हुई परिस्थितियों के अनुसार ही उसको फिर ढाला जा सके और नये वर्गीकरण से उसकी तुलना हो सके।

(4) वर्गीकरण करते समय यह ध्यान रखना चाहिये कि वर्ग न तो विस्तृत हों न ही बहुत संकीर्ण। तथ्यों की संख्या तथा गुण देख कर वर्गों की संख्या तथा अन्तर निर्धारित करना चाहिए। यदि विस्तार (magnitude) बहुत अधिक रख दिया गया तो वर्गों की संख्या तो बहुत कम हो जायेगी परन्तु यह हो सकता है कि वर्ग तुलना की दृष्टि से अधिक विश्वसनीय न रह जाय।

(5) वर्गीकरण पूर्णकाय होना चाहिये इसका तात्पर्य यह है कि वर्गीकरण इतना पूर्ण होना चाहिये कि जाँच से सम्बन्धित प्रत्येक मद के लिये एक निश्चित

वर्ग निर्धारित हो सके। कभी कभी एक 'विविध' अथवा 'अन्य' शीर्षक वर्ग बना दिया जाता है जिसमें बचे हुए सभी मद सम्मिलित कर दिये जाते हैं। यह पद्धति सर्वथा दोषपूर्ण है।

रीतियां —वर्गीकरण की दो रीतियां हैं—

सरल, बहुगुणी गुणानुसार तथा वर्गान्तर अनुसार

गुणानुसार वर्गीकरण —(Classification according to attributes) —जब वर्गीकरण ऐसे गुणों के अनुसार किया जाता है, जो संख्या में नहीं नापे जा सकते तो वह गुणानुसार वर्गीकरण कहलाता है। उदाहरणतया व्यवसाय, शिक्षा, स्वास्थ्य आदि अंकों में नहीं नाप जा सकते। व्यवसाय क्या है, शिक्षा कहां तक है आदि कह सकते हैं परन्तु यह मन, वर्ष, गज आदि में नहीं नापे जा सकते।

गुणानुसार वर्गीकरण भी सरल अथवा बहुगुणी हो सकता है। हम किसी भी स्थान की जनसंख्या को पुरुष तथा स्त्रियों, शारीरिक श्रमिकों तथा मानसिक श्रमिकों आदि में बांट सकते हैं। इस प्रकार का वर्गीकरण सरल वर्गीकरण कहलाता है परन्तु यदि हम जनसंख्या को पुरुषों तथा स्त्रियों में बांट कर फिर एक और विभाजन करें जिसमें विवाहित तथा अविवाहित पुरुषों तथा स्त्रियों को फिर से अलग करें तो ऐसा विभाजन बहुगुणी वर्गीकरण (Manifold Classification) कहलाएगा। उपरोक्त उदाहरण में चार वर्ग बन जायेंगे। विवाहित पुरुष तथा अविवाहित पुरुष, विवाहित स्त्रियां और अविवाहित स्त्रियां।

बहुधा ऐसे गुणों के अनुसार भी वर्गीकरण करना पड़ता है जो अनिश्चित हों। पुरुष अथवा स्त्री तो निश्चित गुण है परन्तु यदि हमें स्वास्थ्य के अनुसार वर्गीकरण करना पड़े तो किस व्यक्ति को स्वस्थ तथा किसे अस्वस्थ माना जायगा यह निश्चित करना उतना सरल नहीं है। पुनश्च यदि अच्छे स्वास्थ्य तथा खराब स्वास्थ्य के अनुसार वर्गीकरण करना है तो भी कठिनाई आयेगी क्योंकि यह आवश्यक नहीं कि कोई मोटा ताजा व्यक्ति अधिक स्वस्थ माना जाय और दुबला पतला व्यक्ति कम स्वस्थ। ऐसी स्थिति में एक आधार निश्चित करना पड़ेगा जिसे मान कर ही वर्गीकरण किया जा सकेगा।

वर्गान्तर के अनुसार वर्गीकरण (Classification according to class intervals) —

जिन तथ्यों को संख्याओं में वर्णित किया जा सकता है उनका वर्गीकरण साधारणतया वर्गान्तर के अनुसार किया जाता है। लम्बाई, आय तथा आयु क्रमशः इंचों, रुपयों तथा वर्षों में नापी जा सकती हैं। अतः इनसे सम्बन्धित समूह बना दिए जाते हैं। जैसे 55 से 60 इंच लम्बाई वाले विद्यार्थी एक वर्ग में, 60 से 65 इन्च वाले दूसरे वर्ग में तथा इसी प्रकार सब विद्यार्थियों को भिन्न भिन्न वर्गों में रख दिया जायगा। इसी प्रकार 50 रुपये से 100 रुपये तक वाले, 100 से 150 रुपये तक वाले व्यक्ति अलग अलग दो वर्गों में रख दिए जायेंगे। यहां 55-60, 60-65, 50-100 तथा 100-150 वर्गान्तर (Class-intervals) कहलाते हैं। 55 और 60 या 60 और 65 वर्ग सीमाएं (Class limits) हैं तथा दोनों सीमाओं के अन्तर वर्गविस्तार (Class-

संख्या 50 है और बड़ी से बड़ी संख्या 72 अर्थात् कुल 22 का विस्तार है। इस दृष्टि से यदि वर्ग-विस्तार (magnitude) 2 का लें तो अधिक सुन्दर रहेगा क्योंकि ऐसा करने से कुल १२ वर्गान्तर बनेंगे।

मद (Item) और मूल्य (size) में अन्तर

किसी भी सांख्यिकी के प्रश्न को ठीक रूप से हल करने के लिए मद (item) और मूल्य (size) में अन्तर जान लेना आवश्यक है। मद (item) जिसके अन्य नाम (frequency) आवृत्ति या (observation) भी हैं, वह है जिसका मापन किया जाता है (that which is measured)। मूल्य (size), जिसके अन्य नाम (value, measurement या variate) हैं, वह है जिसमें मद (item) का मापन किया जाता है (in terms of which the item is measured) या जिस विषय का अध्ययन किया जारहा है (the subject under study)। उदाहरण के लिए निम्न तालिका में 20 विद्यार्थियों के प्राप्तांक दिए हुए हैं—

विद्यार्थी	प्राप्तांक
3	17
5	20
8	25
4	29

उपरोक्त तालिका में विद्यार्थियों का मापन किया गया है अतः विद्यार्थी मद (item) हुए। विद्यार्थियों का मापन अंकों में हुआ है अतः अंक मूल्य (size) हुए।

17 अंक 3 विद्यार्थियों को मिले अर्थात् 17 अंक की 3 बार आवृत्ति (frequency) हुई। इसी प्रकार 25 अंक 8 विद्यार्थियों को मिले अर्थात् 25 अंक की 8 बार आवृत्ति (frequency) हुई, मद (item) वाला स्तम्भ (column) ही आवृत्ति (frequency) का स्तम्भ होता है।

दूसरा उदाहरण—

ऊँचाई फुट	इंच	व्यक्ति
4	6	10
4	9	20
5	0	50
5	3	15
5	6	5
		100

उपरोक्त उदाहरण में 100 व्यक्तियों की ऊँचाई मापी गई है अतः व्यक्ति मद या आवृत्ति हुए और इन व्यक्तियों को ऊँचाई में मापा गया है अतः ऊँचाई मूल्य (value or size) हुई। यह आवश्यकता नहीं है कि प्रथम स्तम्भ मूल्य या मद का ही हो। प्रथम स्तम्भ दोनों में से किसी का भी हो सकता है। ऊपर दिए हुए प्रथम उदाहरण में तो प्रथम स्तम्भ मद का है जब कि दूसरे उदाहरण में प्रथम स्तम्भ मूल्य का है।

विचलन हो। प्रत्येक मद का अलग-अलग महत्व होता है। प्रत्येक मूल्य बहुधा पूर्णांक होता है भिन्न (fraction) में नहीं। जैसे

बच्चों की संख्या X	परिवारों की संख्या f
1	10
2	20
3	50
4	12
5	8

उपरोक्त उदाहरण में परिवारों को मापा गया है अतः वह मद हुए। उनको उनके बच्चों की संख्या में मापा गया है अतः बच्चे मूल्य हुए। उपरोक्त तालिका का अध्ययन करने से हमें ज्ञात होता है कि 1 बच्चे वाले 10 परिवार हैं, 2 बच्चे वाले 20 परिवार हैं, 3 बच्चे वाले 50 परिवार हैं, आदि। इसमें मद को यथार्थता से मापा गया है व प्रत्येक मूल्य का विचलन पूर्णांक में है। प्रत्येक मूल्य पूरी संख्या में दिया गया है, भिन्न में नहीं। किसी भी परिवार के $1\frac{1}{2}$ या $2\frac{1}{2}$ बच्चे होने का प्रश्न ही नहीं उठता है। उपरोक्त तालिका से यह भी स्पष्ट होता है कि 1 की आवृत्ति 10 और 2 की आवृत्ति 20 है। 1 और 2 के बीच में विच्छिन्नता (break) है अर्थात् 1 के बाद और 2 के पहिले अन्य किसी मूल्य की आवृत्ति नहीं होती है।

संतत (Continuous) माला—इसे अविच्छिन्न (unbroken) या अखण्डित माला भी कहते हैं। इस माला में मूल्य वर्गों (groups) में दिया रहता है पूर्णांकों में नहीं। इसमें मदों (items) को व्यक्तिगत रूप (individually) से पूर्ण यथार्थता (exactness) से मापा नहीं जा सकता है। मूल्यों में भी अविच्छिन्नता या सततता (continuity) रहती है और आपस में बहुत कम विचलन होता है। जैसे—

उम्र (वर्षों में) X	विद्यार्थी f
13-16	50
16-19	300
19-22	500
22-25	150

उपरोक्त उदाहरण में विद्यार्थियों को मापा गया है अतः विद्यार्थी मद हुए और उन्हें उम्र में मापा गया है अतः उम्र मूल्य हुई। उम्र को वर्गों (groups) में प्रस्तुत किया गया है। 13–16 वर्ष की उम्र वाले विद्यार्थी 50 है, 16-19 वर्ष की उम्र वाले 300 विद्यार्थी हैं, आदि। इस तालिका में व्यक्तिगत (individual) विद्यार्थी की उम्र ज्ञात नहीं की जा सकती है। उम्र के वर्गों में भी सततता (continuity) है। पहिला वर्ग 16 पर प्रारम्भ होता है तो दूसरा वर्ग 19 पर समाप्त होता है इसी प्रकार दूसरा वर्ग 19 पर समाप्त होता है तो तीसरा वर्ग 19 पर चालू हो जाता है। अतः इसमें विच्छिन्नता नहीं है। सांख्यिकीय दृष्टि से संतत माला को अखण्डित या व्यक्तिगत माला से श्रेष्ठ माना जाता है। संतत माला में मूल्य सदा वर्गों में ही दिये रहते हैं। इस माला को अनेक प्रकार से प्रस्तुत किया जाता है—

1

मूल्य	मद
0 – 10	50
10 – 20	80
20 – 30	100
30 – 40	120
40 – 50	70

2

मूल्य	मद
0 – 9	50
10 – 19	80
20 – 29	100
30 – 39	120
40 – 49	70

3

मूल्य	मद
0 –	50
10 –	80
20 –	100
30 –	120
40 –	70

4

मूल्य	मद
– 10	50
– 20	80
– 30	100
– 40	120
– 50	70

5

मूल्य	मद
– 10	50
– 20	80
– 30	100
– 40	120
40 – 50	70

6

मूल्य	मद
0–	50
10–	80
20–	100
30–	120
40–50	70

अतः हम कह सकते हैं कि व्यक्तिगत माला में आवृत्ति प्रत्येक मूल्य की सदा एक ही होती है जबकि खण्डित एवं सतत माला में मूल्यों की आवृत्ति बहुधा एक से अधिक होती है। व्यक्तिगत माला में आवृत्ति का कोई स्तम्भ नहीं होता जबकि खण्डित एवं सतत माला में मूल्य एवं आवृत्ति दोनों के सम्मिलित होते हैं। खण्डित माला में मूल्य पूर्णांकों में दिया जाता है जबकि सतत माला में मूल्य वर्गों में दिया जाता है। सतत माला दो प्रकार की होती है—

१ असम्मिलित (Exclusive) एवं सम्मिलित (inclusive) माला।

२ संचयी आवृत्ति (cumulative frequency) माला और साधारण आवृत्ति (Simple frequency) माला

(१) असम्मिलित एवं सम्मिलित मालाएं —

असम्मिलित माला (Exclusive series)—असम्मिलित माला में मदों का वर्गीकरण करते समय वर्गान्तर की एक सीमा–ऊपर या अपर–सम्मिलित नहीं की जाती है। इस प्रकार की माला की पहिचान यह है कि पिछले वर्गान्तर की अपर सीमा और उससे अगले वर्गान्तर की अवर सीमा, दोनों एक ही होती हैं। असम्मिलित माला कई प्रकार से प्रस्तुत की जाती है—

(1)

मूल्य	आवृत्ति
0 – 10	20
10 – 20	40
20 – 30	80
30 – 40	50
40 – 50	10

(2)

मूल्य		आवृत्ति
10 and above but below	20	10
20 „ „ „ „	30	15
30 „ „ „ „	40	35
40 „ „ „ „	50	30
50 „ „ „ „	60	10

(3)

मूल्य		आवृत्ति
Exceeding 10 but not exceeding	20	8
„ 20 „ „ „	30	10
„ 30 „ „ „	40	22
„ 40 „ „ „	50	7

(4)

मूल्य	आवृत्ति
5 to 15	1
15 to 25	3
25 to 35	8
35 to 45	12

उपरोक्त चारों तालिकाओं में पिछले वर्गान्तर की अपर सीमा वही है जो कि उससे अगले वर्गान्तर की अधर सीमा। तालिका 1 और 2 में अपर सीमा असम्मिलित (excluded) है और तालिका 3 व 4 में अधर सीमा असम्मिलित (excluded) है।

उदाहरणार्थ तालिका 1 के प्रथम वर्गान्तर में 0 से लेकर 9 99 तक के मूल्य वाले मद सम्मिलित किये जायेंगे, लेकिन पूरे 10 मूल्य वाला मद अगले वर्गान्तर (10–20) में सम्मिलित किया जायेगा। इसी प्रकार दूसरे वर्गान्तर में पूरे 10 से लेकर 19 99 वाले मूल्य के मद सम्मिलित किए जायेंगे लेकिन पूरे 20 मूल्य वाला मद अगले यानी तीसरे वर्गान्तर (20–30) में सम्मिलित किया जायगा।

सम्मिलित माला (Inclusive series)—

सम्मिलित माला में वर्गान्तर की दो सीमाएं उसी वर्गान्तर में सम्मिलित होती हैं जिसमें वे लिखी होती हैं। इस प्रकार की माला की पहिचान यह है कि पिछले वर्गान्तर की अपर सीमा और उससे अगले वर्गान्तर की अधर सीमा दोनों एक नहीं होती हैं। जैसे–

Marks	Boys
10 – 19	8
20 – 29	10
30 – 39	25
40 – 49	5
50 – 59	2
60 – 69	1

उपरोक्त तालिका में पिछले वर्गान्तर की अपर सीमा और उससे अगले वर्गान्तर की अधर सीमा बराबर नहीं है। प्रश्न हल करते समय सम्मिलित माला को असम्मिलित माला में परिवर्तित कर लेना चाहिए ताकि किसी भी वर्गान्तर की अपर व अधर सीमा शुद्ध रूप से मालूम की जा सकें। ऊपर दी हुई सारिणी में प्रत्येक वर्गान्तर की अपर सीमा और उससे अगले वर्गान्तर की अधर सीमा में एक का अन्तर है। इस अन्तर का आधा तो हम प्रत्येक वर्गान्तर की अपर सीमा में जोड देंगे और आधा अधर सीमा में से घटा देंगे। परिणामस्वरूप उपरोक्त तालिका निम्न प्रकार की बन जाएगी :

Marks	Boys
9 5 – 19 5	8
19·5 – 29·5	10
29 5 – 39·5	25
39·5 – 49·5	5
49 5 – 59 5	2
59·5 – 69 5	1

यह तालिका असम्मिलित माला (exclusive series) बन गई। उदाहरण के लिए (30–39) वाला वर्गान्तर अब (29 5–39·5) बन गया। प्रश्न हल करने के लिए अपर व अधर सीमा क्रमशः 39 5 व 29·5 हो गई। इस वर्गान्तर (30-39) में पूरे 29 5 से 39 499· मूल्य वाले मद शामिल किए जायेंगे और (40–49) वाले वर्गान्तर में पूरे 39 5 से लेकर 49 499 मूल्य वाले मद शामिल किए जायेंगे। पूरे 49 5 मूल्य वाला मद अगले वर्गान्तर (50–59) में शामिल होगा। सम्मिलित माला में

अन्तिम वर्गान्तर की अपर सीमा नहीं दी रहती। उनके बजाय Below, under, less than, not exceeding आदि शब्द तो प्रथम वर्गान्तर की अधर सीमा स्थान पर और 'above' या 'exceeding' शब्द अन्तिम वर्गान्तर की अपर सीमा के स्थान पर लिखा रहता है। ऐसी सारणियों को विवर्तमुखी (open end tables) कहते हैं। जैसे—

(1)

size	frequency
Below 10	8
10 — 20	2
20 — 30	20
30 — 40	15
40 and above	5

(2)

size	frequency
Below 10	10
10 — 15	18
15 — 25	22
25 — 35	30
35 — 50	12
50 and above	8

इस प्रकार की सारणियों में प्रश्न हल करने के लिए प्रथम वर्गान्तर की अधर सीमा और अन्तिम वर्गान्तर की अपर सीमा तय करना आवश्यक हो जाता है। दोनों सीमाएं ज्ञात करने के लिए हम निकटतम वर्गान्तरों का वर्ग-विस्तार (interval) ही प्रथम व अन्तिम वर्गान्तरों का वर्ग-विस्तार मान लेते हैं।

तालिका 1 में प्रथम वर्गान्तर के निकटतम वर्गान्तर (10–20) का वर्ग-विस्तार (interval) 10 है अतः प्रथम वर्गान्तर का वर्ग विस्तार भी 10 ही माना जाएगा और उसकी अधर सीमा 20 होगी। अन्तिम वर्गान्तरों के निकटतम वर्गान्तर (30–40) का वर्ग-विस्तार भी 10 है अतः अन्तिम वर्गान्तर का वर्ग-विस्तार भी 10 ही माना जावेगा और उसकी अपर सीमा 50 होगी।

तालिका 2 में प्रथम वर्गान्तर के निकटतम वर्गान्तर का वर्ग-विस्तार 5 है अतः प्रथम वर्गान्तर का वर्ग-विस्तार भी 5 ही होगा और उसकी अधर सीमा (समानता-uniformity की दृष्टि से) भी 5 होगी। इसी प्रकार अन्तिम वर्गान्तर के निकटतम वर्गान्तर का वर्ग विस्तार 15 है अतः अन्तिम वर्गान्तर का वर्ग विस्तार भी 15 माना जावेगा और उसकी अपर सीमा (समानता की दृष्टि से) 65 होगी।

हमें यह ध्यान रखना आवश्यक है कि (below, under, less than, not exceeding) आदि शब्द यदि मूल्य के पहिले केवल प्रथम वर्गान्तर में ही लिखे हों और अन्य वर्गान्तरों में प्रत्येक में अपर व अधर सीमा दी हुई हो तो ऐसी माला को आवृत्ति सरल आवृत्ति (simple frequency) ही मानी जाएगी। सचयी आवृत्ति (cumulative frequency) वाली माला मानी जाने के लिए प्रत्येक वर्गान्तर में उपरोक्त शब्द होने आवश्यक हैं। विवर्तमुखी सारणी हमेशा संतत माला में होती है।

यहां इस बात को स्पष्ट रूप से समझना आवश्यक है कि उपरोक्त तीनों मालाएं values को तीन प्रकार से प्रस्तुत करने की रीतियां हैं। मूल्यों को हम चाहे जिस रीति से—व्यक्तिगत, खण्डित या सतत माला में प्रस्तुत कर सकते हैं, और उन्हें एक प्रकार की माला से अन्य प्रकार की माला में परिवर्तित कर सकते हैं। यह निम्न उदाहरण से स्पष्ट होगा।

बना कर आसानी से परिदर्शन कर सकते हैं। व्यक्तिगत माला में सबसे छोटा मूल्य 50 इंच है व सबसे बड़ा मूल्य 72 इंच है। अत हम मूल्य के स्तम्भ में ऊंचाई को आरोही क्रम (ascending order) में लिखेंगे। ऊंचाई का अवरोही क्रम (descending order) में भी अनुविन्यास (array) किया जा सकता है।

मिलान तालिका

(Tally Sheet)

ऊंचाई (इंचों में)	संख्याएं	आवृत्ति	ऊंचाई (इंचों में)	संख्याएं	आवृत्ति
1	2	3	1	2	3
50	II	2	62	𝍸 II	7
51	I	1	63	𝍸 I	6
52	I	1	64	IIII	4
53	𝍸 I	6	65	𝍸 III	8
54	𝍸	5	66	III	3
55	𝍸 II	7	67	II	2
56	𝍸 III	8	68	III	3
57	𝍸	5	69	II	2
58	𝍸 II	7	70	II	2
59	𝍸	5	71	I	1
60	𝍸 I	6	72	I	1
61	𝍸 III	8			100

मिलान तालिका (Tally Sheet) बनाने की विधि—उपरोक्त उदाहरण में पहिला मूल्य 58 इन्च है। तालिका के दूसरे स्तम्भ में 58 के सामने एक खड़ी लकीर खींच दीजिए। दूसरा मूल्य 55 इन्च है। दूसरे स्तम्भ में 55 के सामने भी एक खड़ी लकीर खींच दीजिये। इस प्रकार से प्रत्येक मूल्य के सामने खड़ी लकीरें (एक के बाद दूसरी दूसरी के बाद तीसरी) खींचते जाइये। जब चार लकीरें किसी मूल्य के सामने खींच दी जावें तो पांचवी लकीर खड़ी मत खींचिए किन्तु चारों खड़ी लकीरों को एक तिरछी लकीर (𝍸) से काट दीजिए। इस प्रकार से प्रत्येक मूल्य के सामने लकीरों के 5-5 के वर्ग (group) बनते जावेंगे जिससे तीसरे स्तम्भ में इनका योग देना सरल हो जायगा।

व्यक्तिगत माला से सीधी (या खंडित माला से) सतत माला भी बनाई जा सकती है।

वर्ग-विस्तार (interval) 6 मानते हुए सम्मिलित माला निम्न प्रकार से बनेगी।

मिलान तालिका

लम्बाई (इन्चो में)	सख्याए	आवृत्ति
1	2	3
50 - 55	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
55 - 60	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	32
60 - 65	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	31
65 - 70	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
70 - 75	IIII	4
	योग	100

वर्ग-विस्तार पाच मानते हुए सम्मिलित माला निम्न प्रकार से बनेगी—

मिलान तालिका

लम्बाई (इन्चो मे)	सख्याए	आवृत्ति
1	2	3
50 - 54	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	15
55 - 59	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ II	32
60 - 64	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	31
65 - 69	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ III	18
70 - 74	IIII	4
	योग	100

वर्ग-विस्तार चार मानते हुए सम्मिलित माला निम्न प्रकार से बनेगी—

मिलान तालिका

लम्बाई (इन्चो मे)	सख्याए	आवृत्ति
1	2	3
50 - 53	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
54 - 57	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	25
58 - 61	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ I	26
62 - 65	~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~ ~~IIII~~	25
66 - 69	~~IIII~~ ~~IIII~~	10
70 - 74	IIII	4
	योग	100

खण्डित माला से हम वापिस व्यक्तिगत माला बना सकते है लेकिन सततमाला से खण्डित माला या व्यक्तिगत माला वापिस नही बनाई जा सकती है ।

समयानुसार (Temporal), स्थानानुसार (Spatial) एव परिस्थिति-अनुसार (Conditional) माला —

समयानुसार (Temporal) माला —इस माला मे तथ्यो को समय, घन्टे दिन, महीने या वर्ष के अनुसार जमाया जाता है, जैसे—रोगी का तापमान चार चार घन्टे मे, किसी दुकानदार की दैनिक बिक्री, कम्पनी की मासिक शुद्ध आय या खाद्यान्न की वार्षिक उपज, आदि। ऐसी माला सदा व्यक्तिगत माला होती है।

स्थानानुसार (Spatial) माला —इस माला मे एकत्रित तथ्यो को स्थान के अनुसार जमाया जाता है, जैसे—भारत की जनसख्या राज्यानुसार, राष्ट्रीय आय देशानुसार, गेहूँ की उपज जिला अनुसार वर्षा क्षेत्रानुसार, आदि। ऐसी माला भी सदैव व्यक्तिगत माला होती है।

परिस्थिति-अनुसार (Conditional) माला —इस माला मे एकत्रित तथ्यो को उनकी परिस्थिति के अनुसार प्रस्तुत किया जाता है। जैसे आकडो को अक (marks), ऊँचाई, उम्र, वजन आदि के अनुसार जमाना। यह माला व्यक्तिगत, खडित एव सतत तीनो प्रकार की हो सकती है।

सारणीयन (Tabulation)

तथ्यो का वर्गीकरण करने के बाद उन्हे सुव्यवस्थित रूप मे प्रस्तुत करना होता है ताकि सम्बन्धित सूचना का उचित रूप मे प्रयोग किया जा सके और सब अक भली प्रकार एक स्थान पर ही रखे जा सके।

श्री बोडिंगटन के कथनानुसार प्रस्तुतीकरण की प्रणाली महत्वपूर्ण है क्योकि सम्बन्धित व्यक्तियो के सामने यदि एक ठीक मामला भी अच्छे ढग से नही रखा जाय तो उसे समर्थन प्राप्त होना सम्भव नही और ठीक ढग से प्रस्तुत किए जाने पर एक निर्बल मामला भी सरलता से समर्थन प्राप्त कर सकता है। अत तथ्यो को प्रस्तुत करना उतना महत्वपूर्ण नही जितना उन्हे उचित ढग से प्रस्तुत करना आवश्यक है। किसी व्यापार अथवा उद्योग से सम्बन्धित तथ्यो को ऐसे ढग से प्रस्तुत करना चाहिए कि वह सरलता से समझे जा सकें तथा विशेष समय नष्ट किये बिना ही उनका अध्ययन किया जा सके। तथ्य ऐसे ढग से प्रस्तुत करने चाहिये कि वह ध्यान आकर्षित कर सकें, आवश्यक सूचना दे सकें तथा उनके सम्बन्धित परिणामो के बारे मे की जाने वाली विशेष कार्यवाही का पूर्वाभास दे सकें, ताकि उसकी (कार्यवाही की) व्यवस्था की जा सके। इसलिए समाचार पत्रो मे शीर्षक ही ऐसे ढग से दिए जाते हैं कि उनके द्वारा नीचे दिए गए विवरण को समझा जा सकता है। इसमे समय की बचत होती है और अधिक महत्वपूर्ण विषयों पर विशेष ध्यान दिया जा सकता है।

तथ्यों को मुख्यतया दो रीतियों द्वारा प्रस्तुत किया जा सकता है।

(1) सारणियों द्वारा तथा (2) चित्रो, रेखा चित्रो आदि द्वारा।

यहा हम सारणीयन (Tabulation) के बारे मे ही विचार करेंगे।

सारणीयन से तात्पर्य तथ्यो को ऐसे रूप मे प्रस्तुत करना है जिसमे वह एक ही स्थान पर रखे जा सके और अधिक बोधगम्य हो सकें इसके लिए साधारणतया कतारो तथा कालमो (Columns) मे ही अङ्को को प्रस्तुत करना पडता है। प्रत्येक सारणी

के ऊपर उसका शीर्षक (Heading) दिया जाता है तथा उसके प्रत्येक कालम पर उप शीर्षक (Sub-heading) दिये जाते हैं ताकि सारणी स्वयं स्पष्ट हो।

सारणी बनाते समय निम्न बातों का ध्यान रखना आवश्यक है—

शीर्षक—सर्वप्रथम सारणी का उचित शीर्षक (Heading) देना चाहिए जो नीचे दिए अंकों के सम्बन्ध मे स्पष्ट विवरण दे सके। शीर्षक इतना लम्बा भी नहीं होना चाहिए कि जो दो तीन लाइनो में हो और इतना छोटा भी नहीं होना चाहिए कि वह सारी बात को स्पष्ट नहीं करता हो। साधारणतया शीर्षक कुछ मोटे अक्षरो में लिखना चाहिये। शीर्षक म सारणी के अन्तर्गत दिये गए अंको का ब्योरा अर्थात अवधि, स्थान, क्षेत्र, वर्ग आदि दर्ज कर देने चाहियें।

(२) कॉलम—शीर्षक के पश्चात् सारणी मे जितने कालम रखने हो उतनी रेखाएं खींच लेनी चाहिये। यहा इस बात का ध्यान रखना पडेगा कि सारणी कितने बडे कागज पर बनाई जा रही है। कागज के अनुसार ही सारणी का आकार निर्धारित करना चाहिए। उसी हिसाब से कालमों की चौडाई निर्धारित करनी चाहिए। ऐसा न हो कि सारणी कागज के एक कोने से दूसरे कोने तक पहुँच जाए और सारणी के चारो ओर की सीमा रेखा के लिए स्थान ही नहीं रहे। चारो ओर कुछ भी स्थान न रहो पर सारणी देखने मे भद्दी लगती है। इसके अतिरिक्त कागज की लम्बाई का प्रयोग अधिक लम्बे भाग के लिए तथा चौडाई का प्रयोग कम लम्बे भाग के लिये किया जाना चाहिये।

उचित ढंग से कालम बनाने के पश्चात् कालमों के भी उचित शीर्षक या उपशीर्षक दे देने चाहिए ताकि उनके आधार पर सारणी में दिये गये अंको को समझने में सरलता हो। जहा तक हो सके शीर्षकों की संख्या बहुत अधिक नहीं होनी चाहियें।

(३) स्पष्ट एवं उपयुक्त—सारणी बनाते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि वह किस कार्य के लिए बनाई जा रही है। यदि उसमें दिए गए सभी अंकों का बहुत महत्व है और सारे अंकों को विस्तार से समझाना अपेक्षित है तो सारणी में कालम ऐसे ढग से बना देने चाहिए कि तथ्य अधिक से अधिक स्पष्ट रूप से रखा जा सके। ऐसी स्थिति में सारणी बडी तो बहुत हो जायगी परन्तु वह स्वयं स्पष्ट होगी और प्रत्येक अंक समूह आसानी से समझा जा सकेगा।

इसके विपरीत एक सारणी इतनी बडी भी नहीं होनी चाहिए कि उसमें अनेक तथ्यों का समावेश कर दिया जाय और उसके समझने मे कठिनाई हो। यदि बहुत तथ्यों को स्पष्ट रूप में समझाना है तो उन्हें एक ही सारणी की बजाय कई सारणियों में दिखलाना उपयुक्त है।

(४) रेखाएं—सारणी बनाते समय जो खड़ी रेखाएं खींची जाय वह स्पष्ट होनी चाहियें। प्रत्येक विभाग को अलग करने वाली रेखाएं मोटी और उप-विभागों की रेखाएं पतली होनी चाहिए।

सारणी—सारणी के कालम ऐसे बनाने चाहिए कि जिन अंकों की तुलना अपेक्षित है वह पास पास हो। इसके अतिरिक्त अंकों से सम्बन्धित प्रतिशत, औसत तथा योग भी पास पास होने चाहियें ताकि उनकी तुलना देखने मात्र से ही की जा सके।

) उपमादन—सारणी मे जो सख्याए दी जाय वह सैकडो, हजारो, रुपयो मनो आदि मे सक्षिप्त कर देनी चाहिए ताकि कालम बहुत बडे नही हो। सांख्यिकी मे जैसा कि पहले एक अध्याय मे बतलाया जा चुका है, केवल सापेक्षिक शुद्धता की ही आवश्यकता रहती है अत बडी सख्याओ को छोटा कर लेना लाभदायक है।

(७) *सख्या-क्रम—सारणी के कालमो में सख्याओ अथवा प्रतिशतो को ऐसे ढग से ऊपर नीचे रखना चाहिए कि उनके जोड करने मे कठिनाई न हो।*

(८) महत्व—बहुधा सारणी मे अलग अलग सख्याए भी दिखलाई जाती है और उनके जोड, औसत प्रतिशत आदि भी दिखलाए जाते हैं। इनमे से जिनको तुलना के काम मे लेना हो उनको मोटे अको मे दिखाना चाहिए, बाकी को बारीक अको मे, ताकि देखने मात्र से तुलना वाली सख्याए स्पष्ट दिखलाई दें।

(९) इकाइया—सारणी के कालमो मे दिए गये अक किन इकाइयो मे दिए गए हैं यह भी स्पष्ट रूप से उस कालम के ऊपर ही लिख देना चाहिए जैसे यदि कोई सख्या रुपयो मे है तो कालम के ऊपर "रुपयो में" लिख देना चाहिए।

(१०) मदो का क्रम—सारणी मे दिखाये जाने वाले मद एक निश्चित क्रम के अनुसार ही दिखाये जाने चाहियें भले ही वह वर्णात्मिक (Alphabetical) क्रम मे हो, अथवा महत्व की दृष्टि से व्यवस्थित किये गये हो।

(११) विविध मद—बहुधा ऐसा होता है कि किसी अक-समूह मे से मुख्य मदो से सम्बन्धित अक तो छाट लिए जाते हैं परन्तु फिर भी बहुत से मद बच जाते है और वह विशेष महत्वपूर्ण नही होते। सारणी मे उनको अलग अलग दिखलाने से सारणी *के बहुत बडी हो जाने का भय रहता है। अत ऐसे सारे अको को एक अलग कालम में* विविध नामों से दिखला दिया जाता है।

(१२) अप्राप्य—जब एक निश्चित अवधि तथा विभिन्न मदो से सम्बन्धित एक सारणी बनाई जाती है तो कभी कभी कुछ मदो के किसी विशेष अवधि मे सम्बन्धित अक उपलब्ध नही होते। ऐसी स्थिति मे उन अको के खाली स्थान पर एक छोटी सी रेखा खेंच दी जाती है या कोई चिन्ह लगा दिया जाता है और सारणी के नीचे एक नोट दे दिया जाता है कि अमुक अक अप्राप्य हैं।

(१३) अन्य—उपरोक्त सब बातो के अतिरिक्त सारणी बहुत सुन्दर बनाई जानी चाहिये। कहीं कोई काट-छाट नही होनी चाहिये और प्रत्येक अस्पष्ट बात को नीचे नोट देकर समझा देना चाहिए। वास्तव में सारणीयन के सम्बन्ध मे कोई भी निश्चित नियम नही दिये जा सकते। उपलब्ध सामग्री तथा साधनो के आधार पर ही सारणी का आकार प्रकार निर्धारित किया जा सकता है तथा सांख्यिक की कुशलता और योग्यता ही वास्तविक मार्ग-दर्शक का कार्य करती है। बाउले के शब्दो मे "सकलन तथा सारणीयन मे सहज बुद्धि मुख्य तत्व है तथा अनुभव प्रमुख मार्गदर्शक है।"[1]

---

1. In collection and tabulation commonsense is the chief requisite and experience the chief teacher.

सारणीयन के प्रकार —सारणियां मुख्यतः दो प्रकार की होती है—

(१) सरल (Simple) सारणी तथा (२) जटिल (Complex) सारणी।

सरल सारणी में एक या अधिक वर्गों के स्वतन्त्र जाच के परिणाम दिए जाते हैं। नीचे सरल सारणी का एक नमूना प्रस्तुत हैं—

वर्ष	पुरुष	स्त्री
1861	97 76	102 90
1871	110 59	116 53
1881	126 40	133 35
1891	140 53	149 50
1901	157.29	167.99
1911	174 46	186 25
1921	180 75	198 11
1931	191 33	208 19

जटिल सारणी —ऐसी सारणी मे कालम तथा पंक्ति दोनों का महत्व होता है या एक ही कालम को फिर कुछ भागों में बाट दिया जाता है। नीचे जटिल सारणी के उदाहरण दिये जाते हैं।

उदाहरण न ६.५

ग्रेट ब्रिटेन की उद्योगानुसार जनसंख्या

1921

उद्योग	संख्या हजारों मे	
	पुरुष	स्त्री
1 मछली	63 3	2 0
2 कृषि	1197 8	106.3
3. खनिज	1395 7	13 6
4 Publicbizy	290 8	290 8
योग	.	. .

उदाहरण न० ६.६

क नगर की जनसंख्या

जनसंख्या हजारों मे

वर्ष	पुरुष		स्त्रियां		योग
	नियोजित	अनियोजित	नियोजित	अनियोजित	
1921	345	30	306	98	779
1931	358	42	342	114	856
1941	412	14	401	33	860
1951	438	48	425	59	970
योग	1553	134	1474	304	3465

सारणियों का वर्गीकरण एकल सारणी (Single Table) तथा बहुल सारणी (Manifold Table) में भी किया जाता है। एकल सारणी तथा सरल सारणी समान अर्थवाली हैं। एकल सारणी में एक ही प्रकार के तथ्य दर्ज किये जाते हैं या तथ्यों का एक गुण ही दिखलाया जाता है। बहुल सारणी को फिर द्विगुण सारणी (Double Table) तथा त्रिगुण सारणी (Triple Table) में बाटा जाता है जिनमें अंकों के क्रमश दो और तीन गुण दिखलाए जाते हैं।

ऊपर की दोनों सारणियाँ (क्रम-संख्या 65 और 66) क्रमश एकल सारणी तथा द्विगुण सारणी के नमूने हैं। त्रिगुण सारणी का एक उदाहरण नीचे दिया जाता है —

उदाहरण न० ६७

एक कॉलिज के विभिन्न विभागों में आवास तथा लिंगानुसार

विद्यार्थियों की संख्या

विभाग	विद्यार्थियों की संख्या				योग
	लडके		लडकियाँ		
	छात्रावास के निवासी	नगर निवासी	छात्रावास निवासी	नगर निवासी	
1 वाणिज्य	150	200	80	120	550
2 कला	100	150	100	150	500
3 विज्ञान	200	80	50	30	360
योग	450	430	230	300	1410

ऊपर दी हुई सारणी में तीन बातों पर प्रकाश डाला गया है। विभिन्न विभागों में विद्यार्थियों की संख्या, लडके तथा लडकियों की संख्या, तथा छात्रावास और नगर में रहने वाले विद्यार्थियों की संख्या स्पष्ट अलग अलग दिखलाई गई है।

इसके अतिरिक्त और अधिक गुणों वाली सारणियाँ भी बनाई जा सकती हैं जिनमें तीन या उससे भी अधिक तथ्य दिखलाये जा सकते हैं। अगले पृष्ठ पर एक नमूना दिया जाता है।

एक विश्व विद्यालय के अन्तर्गत कालिजों में आयु, कक्षा, आवास तथा लिंगानुसार विद्यार्थियों की संख्या

उदाहरण नं० ६.८

कालिज का नाम	कक्षा	आयु वर्गान्तर	लड़के			लड़कियां			योग		
			छात्रावास निवासी	नगर निवासी	कुल	छात्रावास निवासी	नगर निवासी	कुल	छात्रावास निवासी	नगर निवासी	कुल
क	प्रथम वर्ष	15–18									
		18–21									
		21–24									
		योग									
	द्वितीय वर्ष										

ऊपर दी हुई सारणी से हम एक विश्व-विद्यालय से सम्बद्ध सब कालिजों में पढ़ने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या, लड़कों की कुल संख्या, लड़कियों की कुल संख्या, छात्रावास में रहने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या, नगर में रहने वाले विद्यार्थियों की कुल संख्या, विभिन्न कक्षाओं में पढ़ने वाले तथा छात्रावास और नगर में रहने वाले विद्यार्थियों की संख्याएं ज्ञात कर सकते हैं। दोनों ओर के योग कुल संख्याएं कहलाएंगी तथा अलग अलग अङ्कों से अलग अलग संख्याएं ज्ञात होंगी। इस प्रकार एक ही सारणी से बहुत सी बातें दृष्टि मात्र द्वारा मालूम हो सकती हैं।

उदाहरण नं० 6.9

The following is the summary of the time of leaving home and the number of hours spent in the institution of a group of teachers in Rajasthan University —

One teacher leaves home before 5-30 a m and spends 4 hours in the institution, of the 23 teachers who leave their homes between 6 and 7 a.m. 7 teachers spend 3 hours, 11 teachers 4 hours, 2 teachers. .5 hours, 3 teachers 6 hours; of the 16 who leave between 7 and 8 a.m. 4 teachers.. 3 hours, 6 teachers 4 hours, 1 teacher.. 5 hours, 5 teachers . 6 hours, of the 82 who leave between 8 and 10 a.m. 6 teachers 3 hours, 9 teachers . 4 hours, 21 teachers 5 hours, 46 teachers 6 hours; of the 21 teachers who leave between 10 and 11 a m 2 teachers. 3 hours, 8 teachers . 4 hours, 7 teachers.. 5 hours, 4 teachers 6 hours.

Present the summary in a suitable Tabular form

(B. Com., Raj, 1961)

हल—

Teachers of Rajasthan University
(Time of leaving home and hours spent in the University)

Time of leaving home	Number of Teachers-Hours Spent				
	3	4	5	6	Total
5 — 6 Hours	—	1	—	—	1
6 — 7	7	11	2	3	23
7 — 8	4	6	1	5	16
8 — 10	6	9	21	46	82
10 — 11	2	8	7	4	21
Total	19	35	31	58	143

उदाहरण न० 6 10

In a newspaper account, describing the incidence of influenza among tubercular persons living in the same family, the following passage appeared

'Exactly a fifth of 1,00,000 inhabitants showed signs of tuberculosis and no fewer than 5000 among them had an attack of influenza, but among them only 1000 lived in infected houses In contrast with this 1/15 of the tubercular persons who did not have influenza were still exposed to infection Altogether 21,000 were attacked by influenza and 41,000 were exposed to the risk of infection, but the number who having influenza but not tuberculosis lived in houses where no other case of influenza occurred, was only 2000 "

Redraft the information in a concise and elegant tabular form

(R A. S 1960)

हल—

Table showing the incidence of influenza among tubercular persons living in the same family

	Having influenza			Not having influenza			Total
	living in infected houses	living in un-infected houses	Total	living in infected houses	living in un-infected houses	Total	
Having tuberculosis	1000	4000	5000	1000	14000	15000	20000
Not having tuberculosis	14000	2000	16000	25000	39000	64000	80000
Total	15000	6000	21000	26000	53000	79000	100000

सारणियों के अन्य रूप—उपयोगिता की दृष्टि से तीन प्रकार की सारणियां तैयार की जाती हैं। (१) सूचक अथवा वर्गीकरण करने वाली सारणी (informative or classifying table), (२) सामान्य अथवा सदर्भ सारणी (General or Reference table), (३) पाठ्य अथवा संक्षिप्त सारणी (Text or

Summary table)। सूचक अथवा वर्गीकरण करने वाली सारणियों में सब अंक मौलिक अथवा प्रारम्भिक रूप में लिखे हुए होते हैं। इनका उद्देश्य केवल इन अंकों का रिकार्ड रखना मात्र होता है और इसकी पूर्ति के लिये संग्रह किये गये सब अंक व्यवस्थित रूप में एक सारणी में अंकित कर लिये जाते हैं। इन सारणियों से तुलना अथवा विश्लेषण नहीं किया जा सकता।

सामान्य या सदर्भ सारिणियां सम्पूर्ण अग्रहीत अंकों को यथेष्ट संक्षिप्त रूप में, प्रस्तुत करती हैं। इनका प्रयोग प्राय सामान्य तुलनाओं अथवा किसी सामान्य निष्कर्ष अथवा विचार की पुष्टि के लिये किया जाता है। इस प्रकार की संक्षिप्त सारणियां प्राय रिपोर्टों में सम्मिलित की जाती हैं और वहां इन्हें परिशिष्ट (Appendix) में दिखलाया जाता है।

पाठ्य अथवा संक्षिप्त सारणियां वस्तुत सम्पूर्ण अंकों का सत्व अथवा निचोड़ प्रस्तुत करती हैं क्योंकि इनमें सब अंकों को संक्षिप्त रूप में प्रस्तुत करने के अतिरिक्त तुलना के लिये उपयुक्त प्रतिशत अनुपात अथवा औसत आदि भी ज्ञात कर दिखलाये जाते हैं। ऐसी सारणियां प्राय रिपोर्ट के प्रमुख भाग में सम्मिलित की जाती हैं और तुलना, विश्लेषण तथा निर्वचन में इनका ही प्रयोग किया जाता है। इस दृष्टि से यह सारणियां सबसे अधिक महत्वपूर्ण होती हैं।

यान्त्रिक सारणीयन (Mechanical tabulation)

किसी भी देश में जहां औद्योगीकरण अधिक होता है एकत्रित तथ्यों के सारणीयन का कार्य भी बढ़ जाता है। वैसे तो सारणीयन हाथ से किया जाता है लेकिन मशीनों से सारा काम जल्दी एवं अधिक शुद्धता पूर्वक हो जाता है। अनुसूचियों को हाथ से छांटने के बजाय मशीनों से छांटा जा सकता है। कई मशीनें बिजली से चलने वाली होती हैं व कई हाथ से चलने की ही होती हैं। Remington, Hollerith, Samas, Underwood, Burrough आदि बड़ी कम्पनियां हैं जो सारणीयन की विविध मशीनें बनाती हैं। इनमें कार्डों को छांटने की मशीन (Sorting Machine) व कार्डों में छेद करने की मशीन (Key Punch) का अधिक प्रयोग होता है।

यान्त्रिक सारणीयन करने की विधि—बहुधा तथ्य बड़ी-बड़ी अनुसूचियों (Schedules) पर एकत्रित किए जाते हैं। अत समस्त सूचना के संकेत चिन्ह (Codes) बनाए जाते हैं, जिसे Codification कहते हैं।

संकेत चिन्ह बनाने के बाद समस्त सूचना कार्डों में Key Punch द्वारा उतार ली जाती है जिसे transcription कहते हैं।

समस्त सूचना को कार्डों पर उतार लेने के पश्चात् यह पुष्टि की जाती है कि सूचना संकेत चिन्हों में ठीक उतारी गई है या नहीं। इसे Verification कहते हैं। इसके लिए एक मशीन होती है जिसमें छेद किए हुए (Codified) कार्ड डाले जाते हैं। यदि कार्ड उस मशीन में फिट जाता है तो समझा जाता है कि सूचना अनुसूची से कार्ड पर ठीक-ठीक उतार ली गई है। यदि मशीन रुक जाती है तो यह अर्थ हुआ कि कार्ड में सूचना ठीक से नहीं उतारी गई है व कहीं त्रुटि है। उस कार्ड की दुबारा जांच की जाती है और त्रुटि को दूर किया जाता है।

इसके उपरान्त कार्डों को यन्त्र द्वारा छाटा (Sorting) जाता है। इसकी मशीन एक घन्टे मे कई हजार कार्डों को छाट देती है।

तदुपरान्त छाटे हुए कार्डों को गिनना (Counting) रहता है। यह कार्य भी हाथ से या मशीन से किया जा सकता है। कई कई Sorting Machines मे तो गिनने का भी आयोजन रहता है।

इसके बाद समस्त सूचना को फिर से वापिस छाटकर (re-codify) मशीनो या हाथ द्वारा सारणिया तैयार कर ली जाती हैं।

हमारे देश मे भी अब सारणीयन का कार्य मशीनो से होने लगा है। जनगणना का सारणीयन कार्य केन्द्रीय कार्यालय मे मशीनो द्वारा होने लगा है। रक्षा-विभाग मे भी Hollerith की मशीनें सारणीयन के लिए लगी हुई हैं।

सारणी का महत्व —तथ्यो को प्रस्तुत करने की दो रीतिया हैं। सारणियो द्वारा तथा चित्रो द्वारा, परन्तु चित्र भी बिना सारणी की सहायता के नही बनाए जा सकते। निश्चित क्रम में अको को रखे बिना चित्र का रूप तथा आकार निर्धारित करना असम्भव है। दूसरे, सारणियो की सहायता से ही तथ्यो की प्रतिशत अथवा औसत निकाली जाती है और विभिन्न अङ्को की तुलना की जा सकती है। अलग अलग ढेरो मे अव्यवस्थित रूप मे पडे हुए अङ्को से कोई भी परिणाम निकालना, तुलना करना अथवा औसत निकालना सम्भव नही है। तीसरे, सारणी द्वारा हम विभिन्न क्षेत्रो से सम्बन्धित अङ्को का महत्व दृष्टि मात्र से समझ सकते हैं। वास्तव मे सारणिया बनाने के पश्चात् सांख्यिक का असली काम आरम्भ होता है। सारणिया सारी कच्ची सामग्री को सुव्यवस्थित रूप मे प्रस्तुत करती हैं जिनकी सहायता से अर्थ-शास्त्री अथवा सांख्यिक निष्कर्ष तक पहुचने मे सफल होते हैं।

सारांश

एक जैसे अको को एक स्थान पर एकत्रित करने को वर्गीकरण कहते हैं। अङ्को मे साम्यता की अभिव्यक्ति, सरल बनाने तथा अध्ययन के लिए वर्गीकरण आवश्यक है। वर्गीकरण स्पष्ट, स्थायी, परिवर्तनशील तथा यथोचित होना चाहिए।

वर्गीकरण गुणानुसार अथवा वर्गान्तर के अनुसार हो सकता है। व्यवसाय, शिक्षा, स्वास्थ्य आदि सम्बन्धी वर्गीकरण गुणानुसार होता है। परन्तु वर्गीकरण करने से पहले प्रत्येक गुण को वर्ग मे रखने सम्बन्धी धारणा स्पष्ट बना लेनी चाहिये।

सख्याओ मे अभिव्यक्त किए जाने वाले तथ्यो का वर्गीकरण वर्गान्तरो मे किया जाता है। वर्गान्तरो की सीमाए तथा विस्तार निर्धारित करने मे बहुत सावधानी रखने की आवश्यकता है। वर्गान्तरो की मालाए सम्मिलित अथवा असम्मिलित हो सकती हैं। मालाए खण्डित अथवा सतत भी हो सकती हैं या समयानुसार, स्थानानुसार एव परिस्थिति अनुसार हो सकती है।

सारणीयन —अङ्को को बोधगम्य बनाने के लिए सुव्यवस्थित रूप मे रखने की क्रिया को सारणीयन कहते हैं। सारणीयन करने के लिए निम्न बातो पर ध्यान देना चाहिये.—

(1) शीर्षक —छोटा तथा स्पष्ट हो।

(2) कालम —संख्या तथा आकार उपयुक्त हो।

(3) स्पष्ट एव उपयुक्त —बहुत बडी या छोटी न हो।

(4) रेखाए —स्पष्ट तथा विभाजन रेखाए मोटी हो।

(5) तुलना —तुलना करने वाले अङ्क, प्रतिशत या मद पास पास हो।

(6) उपसादन —बडी संख्याओ को छोटा कर लिया जाय।

(7) इकाइया —कालम के ऊपर लिख देनी चाहिए कि रुपयो, मनो, या फुटो आदि मे हैं।

(8) मदो का क्रम —किसी आधार पर होना चाहिए।

(9) विविध —विशेष वर्ग मे न आने वाले कम महत्वपूर्ण मद विविध मे रखे जाय।

(10) सारणी सुन्दर स्वच्छ एव विवरण युक्त होनी चाहिए।

सारणी दो प्रकार की होती हैं —सरल तथा जटिल अथवा एकल तथा बहुल। सरल या एकल सारणी में एक ही तथ्य या विभिन्न तथ्यो का एक ही रूप प्रदर्शित किया जाता है। जटिल सारणी में अनेक तथ्य प्रदर्शित किये जाते हैं। बहुल सारणी में भी एक से अधिक तथ्यो का दिग्दर्शन होता है। सारणीयन का महत्व —सारणी चित्र बनाने में सहायक होती है। सारणी द्वारा ही औसत, प्रतिशत, आदि निकाली जाती हैं, सारणी द्वारा ही अङ्को का वास्तविक महत्व स्पष्ट होता है, सारणी साख्यिक के कार्य का आधार होती है।

EXERCISE VI

1 Describe the important basis of classification in the case of statistical data

2 Give the different types of statistical tables and give an example of a treble tabulation

3 Rule a blank table to show the distribution of population in India according to sex and literacy

4 Describe what considerations are to guide you in fixing the range, the class interval and limits of class intervals for a frequency distribution

5 Discuss the functions and importance of tabulation in a general scheme of any statistical investigation

6 Prepare a blank table to give as much information as possible about the distribution of population in different States of India according to sex, occupation divided into classes, sub-classes and groups

7 What precautions would you take in tabulating your data? Prepare a blank table to show the distribution of population according

to sex and four religions in five age groups, in seven important cities of U P (B Com Agra 1937)

8 How would you proceed to classify the observations made, and what points will you take into consideration in tabulating them? Mention the kinds of tables generally used

(B Com. Agra 1941, 1947, T D C II year, Raj 1961)

9 Discuss the functions and importance of tabulation in a scheme of investigation Prepare blank tables to show distribution of the students of a college according to class and residence for arranging (a) physical training and (b) tutorial classes (B Com Agra 1942)

10 Explain the purpose and methods of classification of data How are the machine tabulating cards prepared and used

(B Com Agra 1943)

11 Define Classification What part does it play in Statistics? State the main bases or divisions by reference to which you will classify statistical observations (B Com Raj 1949)

12 Explain the purpose of 'Classification' of statistical data

(B Com Raj 1954)

13 Explain the purpose of 'Tabular Presentation' of the statistical data Draft a form of tabulation to show the distribution of population according to community by age, sex and merital status

(B Com Raj 1955)

14 Monthly wages received by 50 labourers were as follows —

WAGES IN RUPEES

40 42 44 44 45 45 45 46 48 48 50 50 50 50 50 52 53
54 55 55 55 55 55 56 56 58 58 59 60 60 60 60 60 63
64 65 65 65 65 66 68 70 70 70 70 72 75 75 76 80

Arrange the average wage data in classes with class intervals of five rupees each, and find the modal wage (B Com 1956)

15 "Classification is the process of arranging things (either actually or nationally) in groups or classes according to their resemblances and affinities, and gives expression to the unity of attributes that may subsist amongst a diversity of individuals' Elucidate the above statement (Connor)

16 'In collection and tabulation, commonsense is the chief requisite and experience the chief teacher'—Bowley Justify this statement

17 Explain how would you tabulate statistics of deaths from principal diseases, by sexes, in two different States in India for a period of five years

18 Write short notes on :—
   (a) Classification according to attributes
   (b) Class limits
   (c) Magnitude of the class-interval
   (d) Complex Tabulation
   (e) Class frequency
   (f) Mechanical Tabulation.
   (g) Exclusive and Inclusive series

19 Correct the following blank table drawn to show the distribution of population according to sex, age and literacy

	0—25		25—50		50—75		75—100	
SEX	Literates	Illiterates	Literates	Illiterates	Literates	Illiterates	Literates	Illiterates
Males Females								

20 Rearrange the following blank table with a view to make it more intelligible

	Brahmin		Rajput		Bania		Harijan	
	Literates	Illiterates	Literates	Illiterates	Literates	Illiterates	Literates	Illiterates
Males Females								

21 The following are the marks of candidates who had appeared at a certain examination You are required to tabulate them by taking a class interval of ten marks —

72 19 21 32 75 68 40 52 84 18 37 12 11 27 43 18
24 11 27 39 52 93 11 70 41 19 12 23 64 52 93 99
79 84 12 11 17 19 21 29 43 33 23 94 82 27 32 12
34 54 64 74 24 12 18 39 49 77 27 17 34 84 37 77
67 57 47 37 36 35 97 34 54 91 90 70 80 60 50 40

22 Point out the mistakes made in the following blank table to show the distribution of population according to sex, age and civil condition.

Sex	Married				Unmarried			
	0-25	25-50	50-75	75-100	0-25	25-50	50-75	75-100
Males								
Females								

23 What is a statistical table? Explain the purpose of classification and tabulation of statistical data. Mention the points which must be borne in mind while constructing a statistical table

(B Com Raj 1960)

24 Prepare a bivariate (द्वि मूल्यीय) frequency tabulation of the marks in Statistics and Law obtained by the following students from the following data (You may choose class-intervals of 10 marks each, viz 10—20, 20—30 etc.)

Marks in Law		Marks in Statistics	
11	31	25	22
18	21	16	42
25	34	23	43
27	20	25	25
16	37	12	27
29	23	28	32
30	37	32	29
20	36	18	32
26	32	27	40
12	19	15	37
25	35	33	23
28	34	34	33
19	33	20	35
13	32	18	32
30	40	35	33
22	42	23	22
23	15	20	36
29	41	37	44
30	38	36	24
36		28	35
22		27	30
25		39	
27		40	
14			
30			

25. Prepare a blank table with suitable sub-divisions and sub-sub-divisions to represent the following heads of information :—

(i) Export of cotton-piece goods from India.
(ii) To Japan, Ceylon, Burma, Cambodia and Afganistan
(iii) Quantity of piece goods to each country.
(iv) Value of goods exported to each country
(v) Years—1961-62 and 1962—63

(vi) Total quantity exported during each year.

(vii) Total value of piece goods exported during each year.

26. Draft a form of tabulation to show the distribution of *personnel in the Education Department of a state according to :—*

(i) Sex,

(ii) Three Grades of Salary —

  (a) below Rs 300,

  (b) Rs 300—500

  (c) above Rs 500

(iii) Two years—1951—52

  1961—62

(iv) Age groups—

  (a) below 25

  (b) 25—40

  (c) 40 and over.

अध्याय ७

सांख्यिकीय माध्य (१) (Mean)

(Statistical Averages)

'It is the acme of nonsense to go through all the rigmarole of the arithmetic to calculate the average of a set of figures which do not in some real sense constitute a single family' —*Moroney*

जब भी हमें कुछ तथ्यों की तुलना करनी हो तो हमें सब के लिए एक आदर्श इकाई निर्धारित करनी पड़ती है। यह आदर्श इकाई ऐसी होनी चाहिये जो अप्रमाण्य परिवर्तनों का प्रभाव यथासम्भव कम कर दे। यह प्रभाव कम करने का एक मात्र सरल तरीका यही है कि विभिन्न अंक समूहों का माध्य (Average or Mean) निकाल लिया जाय। माध्य निकालने में जो भी अप्रमाण्य मद होंगे उनका प्रभाव एक दूसरे द्वारा कम हो जायेगा और परिणामत हमें पूरे समूह का प्रतिनिधि अंक (Representative Value) मिलेगा। यह प्रतिनिधि अङ्क ही औसत या माध्य कहलाता है। यह माध्य हमें विभिन्न अङ्क-समूहों को एक अङ्क के द्वारा ही पूरी जानकारी प्राप्त कराते हैं। अत इनसे पूरे अङ्क समूह की स्थिति तथा परिवर्तन की जानकारी सरलतम तरीके से हो सकती है।

माध्यों की उपयोगिता (Utility of Averages) (1) तुलना —माध्यों का प्रयोग एक अथवा अधिक बड़े बड़े अङ्क समूहों के सम्बन्ध में निश्चित सूचना देने के लिए किया जाता है और उस सूचना के आधार पर हम उन समूहों की पारस्परिक तुलना सरलता से कर सकते हैं जबकि प्रत्येक अंक को अलग अलग लेकर तुलना करना असम्भव है। उदाहरण स्वरूप यदि दो कक्षाओं के विद्यार्थियों की तुलना की जानी हो कि अर्थ-शास्त्र में कौन सी कक्षा अच्छी है और दोनों कक्षाओं के विद्यार्थियों के अर्थ शास्त्र में प्राप्त अंक अलग अलग दिए हों, तो तुलना करना वास्तव में कठिन होगा क्योंकि एक विद्यार्थी के अंक अधिक आए हैं दूसरे के बहुत कम। यही स्थिति दूसरी कक्षा के बारे में हो सकती है। ऐसी स्थिति में दोनों कक्षाओं के विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अंकों की औसत निकाल कर सरलता से तुलना की जा सकती है। मान लीजिए एक कक्षा की औसत 20 अंक है और दूसरी की 22 तो यह सरलता से निश्चित किया जा सकता है कि दूसरी कक्षा पहली से अच्छी है।

(2) (8) मार्ग दर्शन —माध्यों के द्वारा ही हम किसी समय की आर्थिक अथवा सामाजिक स्थिति में होने वाले परिवर्तनों का ज्ञान प्राप्त कर सकते हैं। मूल्यों का औसत निर्देशांक अथवा उत्पादन की औसत वृद्धि, माग में औसत परिवर्तन आदि महत्व-पूर्ण बातें हैं जिनके आधार पर मजदूरी, उत्पादन आदि में परिवर्तन किये जा सकते हैं क्योंकि औसत, क्षणिक अथवा अप्रमाण्य परिवर्तनों को सम कर देती है। अत वह अधिक विश्वसनीय है। यदि एक व्यापारी किसी विशेष कारण से बढ़ने वाली माग को आधार

मान कर उत्पादन बढ़ा दे तो उसे हानि उठानी पड़ेगी। उसे औसत मांग वृद्धि का ध्यान रख कर ही उत्पादन की योजना बनानी चाहिये।

(२) पारस्परिक—बहुधा दो अङ्क समूहों का पारस्परिक सम्बन्ध जानने की आवश्यकता होती है अर्थात् दोनों समूहों में परिवर्तन एक ही दिशा में हैं अथवा विपरीत दिशा में हैं। यह जानने के लिए माध्य ही सबसे सरल मार्ग है।

साधारण रूप में विद्यार्थी गणित में औसत अथवा मध्यमान निकालते रहे हैं। सांख्यिकीय मध्यमान उससे कुछ भिन्न है और उसका गणित करने में अधिक सावधानी की आवश्यकता है। सांख्यिकीय माध्य एक समूह के प्रतिनिधि होते हैं। उनमें निम्नलिखित विशेषताएं होनी चाहिये।

माध्य के गुण (Characteristics of an average)—

(१) प्रतिनिधि—सांख्यिकीय माध्य पूरे समूह का प्रतिनिधि होना चाहिए। इसके लिये यह आवश्यक है कि उसमें सब अङ्कों को समान महत्व दिया जाय। यदि अङ्कों को महत्व नहीं दिया गया तो यह स्वभाविक ही है कि वह प्रतिनिधि नहीं हो सकेगा।

(२) सरल गणितः—सांख्यिकीय माध्य ऐसा होना चाहिए कि गणित एवं गणित के सूत्रों के प्रयोग से वह आसानी से निकाला जा सके। ऐसा न होने की स्थिति में ठीक परिणाम नहीं निकल सकेंगे।

(३) सरल आकलन—(Calculation)—माध्य निकालने तथा समझने में भी सरल होना चाहिये। यदि इसकी गणना पद्धति बहुत कठिन हो तो वह अधिक उपयोग में लाना सम्भव नहीं होगा।

(४) माध्य सदा ऐसी होनी चाहिये जिस पर आकस्मिक अथवा असामान्य परिवर्तनों का बहुत अधिक प्रभाव न पड़ा हो।

(५) वही माध्य उत्तम होता है जो निश्चित रूप से निर्धारित किया जा सकता हो अर्थात् गणना द्वारा तथा रेखा-चित्र से उसका निश्चित बिन्दु अंकित किया जा सके।

(६) उत्तम माध्य वही है जो शृङ्खला या श्रेणी के समस्त मूल्यों के आधार पर ज्ञात किया गया हो।

माध्यों के प्रकार—सांख्यिकी में मुख्यतः निम्नलिखित माध्यों का प्रयोग होता है।

1. समान्तर मध्यक (Simple Arithmetic Average)
2. भारित मध्यक (Weighted Arithmetic Average)
3. चल मध्यक (Moving Average)
4. मध्यका (Median)
5. भूयिष्ठक (Mode)
6. गुणोत्तर मध्यक (Geometric Average)
7. हरात्मक मध्यक (Harmonic Mean)
8. वर्ग मध्यक (Quadratic Mean)
9. प्रगतिशील मध्यक (Progressive Mean)

उपरोक्त माध्यो को केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक (measures of central tendency), प्रतिनिधि मूल्य (representative values) या प्रथम दर्जे के माध्य (Averages of First order) भी कहते हैं। इनमे 1, 2, 6, 7, और 8 को गणितीय माध्य (Mathematical averages), 4 व 5 को स्थिति माध्य (Averages of Position) और 3 व 9 को व्यापारिक माध्य (Business averages) कहा जाता है।

समान्तर मध्यक (Simple Arithmetic Average)

व्यक्तिगत श्रेणी (individual series) मे समान्तर मध्यक ज्ञात करना —समान्तर मध्यक सबसे सरल तथा प्रचलित माध्य है। इसका प्रयोग छोटी कक्षाओं मे गणित मे यथेष्ट किया जाता है। समान्तर मध्यक निकालने के लिये सब मदों के मूल्यो (values) को जोड लिया जाता है तथा फिर कुल योग में मदो की सख्या का भाग दे दिया जाता है। उत्तरस्वरूप जो अक प्राप्त होता है वही समान्तर मध्यक है।

उदाहरण न० ७१

उदाहरण : एक कक्षा के ग्यारह विद्यार्थियो की लम्बाई निम्न प्रकार है। उनकी औसत (समान्तर मध्यक) लम्बाई निकालिये।

1 क्रम सख्या (Serial number)	2 लम्बाई इ चो मे X
1	55
2	56
3	63
4	57
5	58
6	69
7	62
8	64
9	63
10	68
11	67
N = 11	Σ X = 682

$$\text{समान्तर मध्यक या } \overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{682}{11}$$

$$= 62 \text{ इच}$$

जबकि,

$\overline{X}$ = समान्तर मध्यक (Arithmetic average)

Σ = योग (Sigma Capital)

X = मूल्य (Value or size)

Σ = मदो की सख्या (Number or items)

मे पहले एक कल्पित मध्यक ले लिया जाता है तथा उससे सब मदो का विचलन लेकर उसे आवृत्ति (frequency) से गुणा कर दिया जाता है। गुणनफल के योग को आवृत्ति योग से भाग देकर कल्पित मध्यक मे जोड दिया जाता है। इस क्रिया को एक सूत्र के रूप मे इस प्रकार प्रस्तुत कर सकते हैं।

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma (fx)}{N}$$

$\overline{X}$ = arithmetic average

A = assumed average

$\Sigma (fx)$ = Total of deviations multiplied by frequency

x = values (मूल्य)

x = deviations from A = (X–A)

उदाहरण ७.४

अब हम उदाहरण ७ ३ वाले प्रश्न को लघु रीति से हल करते हैं।

1 लम्बाई इचो मे x	2 आवृत्ति Frequency f	3 विचलन कल्पित मध्यक 60 से x	4 (2 × 3) fx
55	5	−5	−25
56	3	−4	−12
57	7	−3	−21
58	10	−2	−20
59	13	−1	−13
60	18	0	0
61	11	1	11
62	6	2	12
63	4	3	12
64	3	4	12
65	2	5	10
	82 Σ f = N		(-91+57) Σ (fx) = −34

स० मध्यक $(\overline{X}) = A + \frac{\Sigma (fx)}{N}$

$$= 60 + \left(\frac{-34}{82}\right)$$

$$= 60 - .41$$

$$= 59.59 \text{ इन्च}$$

ऐसे प्रश्नो में N आवृत्ति के योग को ही मानते है।

<u>सतत श्रेणी</u> (Continuous Series) में समान्तर मध्यक निकालना —सतत श्रेणी में समान्तर मध्यक उसी रीति से निकाला जाता है जैसे कि खंडित श्रेणी में। अन्तर केवल इतना है कि सतत श्रेणी में वर्गान्तरों के मध्य-मूल्य

(mid value) निकाल कर प्रयोग में लाये जाते हैं। मध्य-मूल्य ज्ञात कर रख देने से श्रेणी खण्डित जैसी ही बन जाती है।

उदाहरण नं० ७५

निम्नलिखित सामग्री में एक कारखाने की विभिन्न प्रकार की इस्पात नलियों का दैनिक उत्पादन तथा मूल्य दिये हुए हैं। नलियों का मध्यक (समान्तर) मूल्य निकालिए।

प्रति टन मूल्य (पौंड में)	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45	45-50	50-55	55-60
उत्पादन (टनों में)	75	148	288	334	252	217	127	33

नीचे प्रत्यक्ष रीति (Direct Method) तथा लघु रीति से इस प्रश्न को हल किया गया है।

1	2	3	4	5	6
प्रतिटन मूल्य £	mid-pt मध्य बिन्दु x	आवृत्ति (f)	2×3 (fx)	विचलन कल्पित मध्यक 37.5 से (x)	3×5 (fx)
20 — 25	22.5	75	1,687.5	− 15	− 1,125
25 — 30	27.5	148	4,070.0	− 10	− 1,480
30 — 35	32.5	288	9,360.0	− 5	− 1,440
35 — 40	37.5	334	12,525.0	0	0
40 — 45	42.5	252	10,710.0	5	1,260
45 — 50	47.5	217	10,307.5	10	2,170
50 — 55	52.5	127	6,667.5	15	1,905
55 — 60	57.5	33	1,897.5	20	660
		1,474 $\Sigma f = N$	57,225.0 $\Sigma(fx)$		+5995 −4045
					1950 $\Sigma(fx)$

प्रत्यक्ष रीति से समान्तर मध्यक $= \frac{\Sigma (fx)}{N} = \frac{57225}{1474} = £\ 38.82$

लघुरीति से समान्तर मध्यक $(\bar{X}) = A + \frac{\Sigma (fx)}{N} = 37.5 + \frac{1950}{1474}$

$= 37.5 + 1.32$

$= £\ 38.82$

लघुरीति को और भी सरल बनाया जा सकता है। इसके अन्तर्गत जो विचलन आते है उनमें वर्गान्तर के विस्तार (interval) से भाग दे दिया जाता है और अन्त में मध्यक निकालते समय विचलनों के योग को वर्गान्तर विस्तार (i) से गुणा कर लिया जाता है। देखिए उदाहरण ७·६

उदाहरण नं० ७.६

निम्नलिखित तालिका में 182 व्यक्तियों की लम्बाई इन्चो में दी गई है, उनकी मध्यक (समान्तर) लम्बाई निकालिये।

१८२ व्यक्तियों की इन्चों में लम्बाई

लम्बाई	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79
आवृत्ति	2	10	55	21	57	32	5

हल—

1	2	3	4	5
लम्बाई इन्चों में	mid value मध्य बिन्दु X	आवृत्ति (f)	विचलन 62 से (5 से विभाजित) $i = 5$ (x)	(3x4) fx
45 — 49	47	2	—3	— 6
50 — 54	52	10	—2	— 20
55 — 59	57	55	—1	— 55
60 — 64	62	21	0	0
65 — 69	67	57	1	57
70 — 74	72	32	2	64
75 — 79	77	5	3	15
योग		182 $\Sigma f = N$		+55 $\Sigma(fx)$

$$\text{समान्तर मध्यक } (\bar{X}) = A + \left(\frac{\Sigma f x}{N} . i\right)$$

जहा i = वर्ग विस्तार (magnitude of class interval)

मूल्य प्रतिस्थापन करने पर,

$$= 62 + \left(\frac{55}{182} \times 5\right)$$
$$= 62 + \frac{275}{182}$$
$$= 62 + 1.51$$
$$= 63.51 \text{ इन्च}$$

उपरोक्त प्रश्न में दो विशेषताएं है। एक तो प्रश्न में दी गई श्रंक श्रेणी सम्मिलित (inclusive) है और इसलिए इनके मध्य बिन्दु 47, 52, 57, 62 आदि

आयु वर्षों मे	step-deviations पद विचलन (x)	frequency आवृत्ति (f)	(2×3) (fx)
1	2	3	5
0 - 10	- 3	50	- 150
10 - 20	- 2	12	- 24
20 - 30	- 1	38	- 38
30 - 40	0	49	0
40 - 50	1	43	43
50 - 60	2	33	66
60 - 70	3	15	45
70 - 80	4	8	32
80 - 90	5	2	10
		250 N	196-212 Σfx=-16

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N} i \right)$$
$$= 35 + \left(\frac{-16}{250} \times 10 \right)$$
$$= 35 - \cdot 64$$
$$= 34 \cdot 36 \text{ वर्ष}$$

हल करने की रीति—इसी रीति मे मध्य-बिन्दु वाले खाने की कोई आवश्यकता नही है। प्रश्न मे दिए गए वर्गान्तरो मे से किसी भी वर्गान्तर के सामने शून्य 0 लिख दीजिए। इसके ठीक ऊपर वाले वर्गान्तर पर-1, उससे ठीक ऊपर वाले वर्गान्तर पर-2, और इसी प्रकार-3,-4 आदि जहा तक आवश्यकता हो, लिखते जाइए। इसी प्रकार 0 के नीचे प्रत्येक वर्गान्तर के सामने क्रमश 1, 2, 3, 4 आदि लिख दीजिए। यह कालम (न० 2) पद विचलनो (Step deviations) का कालम कहलाता है।

यदि मूल्य अवरोही क्रम (descending order) मे दिए गए हो (उदाहरण ७ ८) तो 0 से ऊपर वाले वर्गान्तरो के सामने 1, 2, 3, 4 आदि लिखिए और 0 से नीचे वर्गान्तरो के सामने -1, -2, -3, -4 आदि। तीसरे खाने मे आवृत्ति लिखिए और चौथे मे (2×3) का गुणा, ऋणात्मक एव धनात्मक चिन्हो का ध्यान रखते हुए, कीजिए। इसका योग (Σfx) कहलाता है। अब समान्तर मध्यक का वही सूत्र $\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N} . i\right)$ लगाइए।

इसमे दो बातें जाननी आवश्यक हैं —प्रथम, A उस वर्गान्तर का मध्य-बिन्दु होना है जिसके सामने पद विचलन (step deviations) वाले खाने मे 0 लिखा होता है। द्वितीय, i विस्तार किसी भी वर्गान्तर के विस्तार के बराबर होता है क्योकि प्रत्येक वर्गान्तर का विस्तार समान होता है।

उदाहरण ७.८

1	2	3	4
लम्बाई (इंचो में)	step-deviations पद विचलन (x)	frequency आवृत्ति (f)	(2×3) (fx)
75 – 79	4	5	20
70 – 74	3	32	96
65 – 69	2	57	114
60 – 64	1	21	21
55 – 59	0	55	0
50 – 54	– 1	10	– 10
45 – 49	– 2	2	– 4
		182 N	251 – 14 $\Sigma fx = 237$

$$\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N}.i\right)$$

$$= 57 + \left(\frac{237}{182} \times 5\right)$$

$$= 57 + 6\ 51$$

$$= 63\ 51 \text{ इंच}$$

नोट—यदि मूल्य (values) समान अन्तर (equal intervals) पर दिये गये हों तो खण्डित श्रेणी (discrete series) में भी पद विचलन रीति (step deviation method) का प्रयोग किया जा सकता है।

उदाहरण नं० ७६

निम्नलिखित सारणी कानपुर और जयपुर की पुरुष संख्या प्रकट करती है :—

आयु (वर्षों में)	पुरुष जनसंख्या हजारों में	
	कानपुर	जयपुर
0 – 5	14	9
5 – 10	13	8
10 – 15	13	8
15 – 20	13	7
20 – 30	33	15
30 – 40	29	12
40 – 50	17	9
50 – 60	7	6
60 – 80	4	4

कानपुर और जयपुर की पुरुष जनसंख्या की अलग अलग साधारण मध्यक ज्ञात कीजिए।

(कल्पित मध्यक आयु 25 वर्ष)

आयु Age group	मध्य बिन्दु mid-value X	कल्पित मध्यक से विचलन पाच से विभाजित x	कानपुर पुरुष सख्या f	fx	जयपुर पुरुष सख्या f	fx
0-5	2 5	-4 5	14	-63 0	9	-40 5
5-10	7 5	-3 5	13	-45 5	8	-28 0
10-15	12·5	-2 5	13	-32 5	8	-20 0
15-20	17 5	1 5	13	-19 5	7	-10 5
20-30	25	0	33	0	15	0
30-40	35	+2 0	29	+ 58 0	12	+24 0
40-50	45	+4 0	17	+ 68 0	9	+36·0
50-60	55	+6 0	7	+ 42 0	6	+36 0
60-80	70	+9 0	4	+ 36 0	4	+36 0
			N=143	Σfx= 43 5	N=78	33 0 Σfx

(i) कानपुर नगर के पुरुषो की मध्यक आयु $= A + \left(\frac{\Sigma fx}{N}.i\right)$

$$(\overline{X}) = 25 + \left(\frac{43{\cdot}5 \times 5}{143}\right)$$
$$= 25 + 1 5$$
$$= 26{\cdot}5 \text{ वर्ष}$$

(ii) जयपुर के पुरुषो की मध्यक आयु $(\overline{X}) = 25 + \left(\frac{33 \times 5}{78}\right)$

$$= 25 + 2{\cdot}12$$
$$= 27\ 12 \text{ वर्ष}$$

नोट—उपरोक्त प्रश्न खंडित श्रेणी मे दिया है, लेकिन प्रत्येक वर्गान्तर समान न होने के कारण पद विचलन रीति (step deviation method) का प्रयोग करना ठीक नहीं है।

उदाहरण ७.१०

निम्नलिखित समकों से 2 आने के हिसाब से वर्गान्तर की सारणी बना कर श्रमिको की प्रतिदिन की मध्यक मजदूरी ज्ञात कीजिए —

प्रतिदिन की मजदूरी आनो में—

14, 16, 16, 14, 22, 13, 15, 24, 12, 23, 14, 20, 17, 21, 18, 18, 19, 20, 17, 16, 15, 11, 12, 21, 20, 17, 18, 19, 22, 23,

हल —

1	2	3	4
मजदूरी आनों में Wages in annas	मध्यबिन्दु mid-value (X)	श्रमिकों की संख्या No. of Labourers. (f)	fx
11 – 13	12	3	36
13 – 15	14	4	56
15 – 17	16	5	80
17 – 19	18	6	108
19 – 21	20	5	100
21 – 23	22	4	88
23 – 25	24	3	72
		N=30	540Σfx

$$\text{समान्तर मध्यक } (\overline{X}) = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{540}{30}$$

= 18 आने

श्रमिकों की मध्यक मजदूरी 18 आने या 1 रुपया 12 नये पैसे हैं।

समान्तर मध्यक के गुण —समान्तर मध्यक में निम्नलिखित गुण हैं —

1 सरल आकलन —समान्तर मध्यक का मालूम करना बहुत सरल है और इसे निकालने के लिए बहुत उच्च स्तरीय गणित की आवश्यकता नहीं पड़ती। इसका आगणन सामान्य गणित जानने वाले व्यक्ति भी कर सकते हैं तथा प्रत्येक व्यक्ति के लिए इसका समझना भी बहुत आसान है।

2. क्रम अनावश्यक —समान्य मध्यक ज्ञात करने के लिए सारे तथ्यों को किसी विशेष क्रम में रखने की आवश्यकता नहीं पड़ती। अङ्क जिस रूप में जैसे दिये हों जोड़ कर औसत निकाली जा सकती है।

3 पृथक अङ्क अनावश्यक —समान्तर मध्यक निकालने के लिए प्रत्येक तथ्य से सम्बन्धित अलग अलग अङ्क उपलब्ध करने की आवश्यकता नहीं है। यदि अंको का कुल योग तथा उनकी संख्या ज्ञात हो तो मध्यक निकाला जा सकेगा। उदाहरणार्थ यदि किसी देश की कुल राष्ट्रीय आय तथा देश की जन संख्या ज्ञात हो तो प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय ज्ञात करना सरल है। अलग अलग उद्योगों द्वारा प्राप्त आय तथा अलग अलग क्षेत्र की जन-संख्या जानने की कोई आवश्यकता नहीं।

4 कुल संख्या का ज्ञान सम्भव —समान्तर मध्यक की एक विशेषता यह है कि यदि हमें औसत ज्ञात हो और मदों की संख्या का भी पता हो तो हम मदों की कुल संख्या को औसत से गुणा कर सरलता से निकाल सकते हैं। उदाहरणार्थ हमें यह पता हो कि एक कारखाने में 60 श्रमिक काम करते हैं और औसत मजदूरी 2 रु० प्रति दिन है

5 भ्रामक —समान्तर मध्यक कभी कभी बहुत भ्रामक परिणाम दिखलाती है जैसे दो कम्पनियों ने 4 वर्षों में निम्न लाभ दिखलाये हैं —

लाभ रुपयो मे

	प्रथम कम्पनी	द्वितीय कम्पनी
प्रथम वर्ष	5,000	8,000
द्वितीय वर्ष	6,000	7,000
तृतीय वर्ष	7,000	6,000
चतुर्थ वर्ष	8,000	5,000

दोनो कम्पनियो के औसत लाभ 6,500 रु० हैं और इस प्रकार दोनों कम्पनियो की आर्थिक स्थिति अथवा उन्नति समान है । परन्तु अङ्को से यह स्पष्ट है कि प्रथम कम्पनी लगातार उन्नति कर रही है और दूसरी कम्पनी लगातार अवनति की ओर जा रही है ।

6 हास्यास्पद परिणाम —समान्तर मध्यक द्वारा कभी कभी हास्यास्पद परिणाम निकलते हैं । जैसे 4 परिवारो मे क्रमश 3, 4, 5, 6, बच्चे हो तो प्रति परिवार औसत 4·5 बच्चे हुई जो हास्यास्पद है क्योकि $4\frac{1}{2}$ बच्चों का कोई अर्थ नही होता।

उपरोक्त सब कमिया होने पर भी समान्तर मध्यक सर्वाधिक प्रचलित और महत्वपूर्ण है क्योकि यह निकालने मे बहुत सरल है।

भारित मध्यक (Weighted average)—उपरोक्त उदाहरणो से स्पष्ट है कि समान्तर मध्यक मे एक दोष यह है कि इसको बहुत बडे तथा बहुत छोटे मद अधिक प्रभावित करते हैं क्योंकि सबको समान महत्व दिया जाता है । उदाहरणस्वरूप ही लें, यदि एक कारखाने मे तीन श्रेणियो के श्रमिक काम करते हैं और प्रत्येक श्रेणी के श्रमिक को क्रमश 1, 2, 3 रुपया प्रतिदिन मिलता हो तो फैक्ट्री के श्रमिक की औसत मजदूरी 2 रुपया हुई । परन्तु यह परिणाम अशुद्ध होगा क्योकि यदि पहली श्रेणी में 100 श्रमिक और दूसरी में 50 तथा तीसरी में 30 श्रमिक हो तो कुल मजदूरी ($100 \times 1 + 50 \times 2 + 30 \times 3$) = 290 रुपये हुई और औसत 290 – 180 अर्थात् 1 रुपया 61 नये पैसे हुई । यही शुद्ध भी है क्योंकि इसके परिणाम विभिन्न श्रेणियो को उचित भार (श्रमिक सख्या) देकर निकाले गए हैं।

श्री बोडिंगटन के शब्दो में भारित मध्यक वह है जिसे निकालने के लिए प्रत्येक मद को 'भार' (weights) से गुणा किया जाता है तथा इस प्रकार प्राप्त की हुई सख्याओं को जोड कर 'भार' के योग से भाग दे दिया जाता हैं । साधारणतया आवृत्ति (frequency) ही भार का काम देती है।

उदाहरण नं० ७.१२

1	2	3	4
टमाटर X	पौधे W	कल्पित भारित मध्यक (A') = 5 से विचलन x' = (X − A')	(2 × 3) Wx'
0	2	− 5	− 10
1	5	− 4	− 20
2	7	− 3	− 21
3	11	− 2	− 22
4	18	− 1	− 18
5	24	0	0
6	12	1	12
7	8	2	16
8	6	3	18
9	4	4	16
10	3	5	15
	Σ W 100		Σ W x' − 14

$$\text{भारित माध्यक } \overline{X}' = A' + \frac{\Sigma W x'}{\Sigma W}$$

$$= 5 + \left(\frac{-14}{100}\right) = 5 - \frac{14}{100}$$

$$= 5 - \cdot 14$$

$$= 4\ 86 \text{ टमाटर}$$

उपरोक्त रीति से निकाला गया परिणाम प्रत्यक्ष रीति से निकाले गये परिणाम के समान है।

उदाहरण नं० ७'१३

तीन देशो का गेहूँ का उत्पादन निम्नलिखित है।

(क) 43,76,000 एकड में 36 0 बुशल प्रति एकड

(ख) 59,43,000 एकड में 34 3 बुशल प्रति एकड

(ग) 79,32,000 एकड मे 35 3 बुशल प्रति एकड

सारे क्षेत्र का भारित मध्यक बतलाइये।

यहा हमे पहले सब देशो का सम्पूर्ण उत्पादन निकालना पडेगा फिर उसे जोड कर सम्पूर्ण क्षेत्रफल का भाग देना पडेगा। परिणामस्वरूप भारित मध्यक प्राप्त होगी। उत्पादन निकालने के लिये सारे अ कों को सहस्रो मे ले लिया गया है।

सम्पूर्ण उत्पादन (क) 4376 × 36 9 = 15,75,36 0 हजार बुशल,

(ख) 5943 × 34 3 = 20,38,44 9 हजार बुशल

(ग) 7932 × 35 3 = 27,99,99 6 हजार बुशल

कुल 18251 = 64,13,80.5 हजार बुशल

$$\text{भारित मध्यक} (\bar{X}') = \frac{64,13,80\ 5}{18251} = 35\ 14 \text{ बुशल}$$

इस प्रकार भारित मध्यक का प्रयोग वहा करना आवश्यक है जहा एक ही समूह के वर्गों की भिन्न भिन्न मदें हो। नीचे के उदाहरण से यह बात और स्पष्ट होगी।

उदाहरण न० ७ १४

दो कारखानो मे विभिन्न श्रमिको के वेतन इस प्रकार हैं —

श्रमिक श्रेणी	अ कारखाना			ब कारखाना		
	श्रमिक स०	साप्ताहिक मजदूरी		श्रमिक स०	साप्ताहिक मजदूरी	
		रु०	न० पैसे		रु०	न० पैसे
1 साधारण	250	2	10	320	2	20
2 प्रशिक्षणार्थी	20	1	10	40	1	20
3. अर्द्ध-प्रशिक्षित	200	3	10	300	4	0
4. प्रशिक्षित	150	5	00	200	4	50
योग	620			860		

भारित मध्यक निकालिए।

दोनो कारखानो के श्रमिको का भारित मध्यक

श्रमिक सख्या	अ कारखाना					ब कारखाना				
	श्रमिक सख्या W	साप्ताहिक मजदूरी X		कुल मजदूरी WX		श्रमिक सख्या W	साप्ताहिक मजदूरी X		कुल मजदूरी WX	
		रु०	न पैसे	रु०	न पैसे		रु०	न पैसे	रु०	न. पैसे
1. साधारण	250	2	10	525	00	320	2	20	704	00
2 प्रशिक्षणार्थी	20	1	10	22	00	40	1	20	48	00
3. अर्द्ध-प्रशिक्षित	200	3	10	620	00	300	4	00	1200	00
4 प्रशिक्षित	150	5	0	750	00	200	4	50	900	00
योग	620 ΣW			1917	00 ΣWX	860 ΣW			2852	00 ΣWX

अ कारखाने के श्रमिको की भारित मध्यक $(\bar{X}') = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$

$= \frac{1917}{620} = 3$ रु० 9 पैसे लगभग

ब कारखाने के श्रमिको की भारित मध्यक $(\bar{X}') = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$

$= \frac{2852}{860} = 3$ रु० 32 पैसे लगभग

उदाहरण नं० ७·१५

निम्नलिखित तालिका में एक निश्चित अवधि में जीवन निर्वाह सम्बन्धी मदों के व्यय में हुई वृद्धि की प्रतिशत दी हुई है। दिये हुए भारों की सहायता से औसत वृद्धि ज्ञात कीजिए।

मद	प्रतिशत वृद्धि	भार
भोजन	30 0	7
वस्त्र	95 0	1
प्रकाशादि	75 0	1
आवास	50 0	2
अन्य	75 0	1

मद	प्रतिशत वृद्धि	भार	(1 × 2)
1	2 X	3 W	4 WX
भोजन	30	7	210
वस्त्र	95	1	95
प्रकाशादि	75	1	75
आवास	50	2	100
अन्य	75	1	75
		$\Sigma W = 12$	$\Sigma WX = 555$

$$\text{भारित मध्यक } (\bar{X}') = \frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$$

$$= \frac{555}{12}$$

$$= 46.25 \text{ प्रतिशत वृद्धि}$$

उदाहरण न ७.१६

दो विश्व-विद्यालयों अ और ब की परीक्षाओं के प्रतिशत परिणाम निम्नलिखित हैं। बतलाइये कौनसा विश्व-विद्यालय उत्तम है।

परीक्षा का नाम	परिणाम	
	प्रतिशत अ	प्रतिशत ब
एम. ए	85	90
एम काम	80	80
एम एस. सी.	70	75
बी. ए	75	70
बी. काम	65	70
बी. एस. सी	60	65

उपरोक्त प्रश्न वैसे तो साधारण मध्यक से भी किया जा सकता है। परन्तु जब

A कालिज का भारित मध्यक $= \frac{\Sigma WX}{\Sigma W} = \frac{29500}{400}$

$= 73.75$

B कालिज का भारित मध्यक $= \frac{27860}{400}$

$= 69.65$

अत A कालिज के परिणाम अच्छे हैं।

यदि दो या अधिक सघटकों (Components) के औसत मालूम हों तो निम्न रीति से उनका इकट्ठा माध्य भी निकाला जा सकता है। जैसे :—

उदाहरण नं॰ 7·20

In a class there are 20 girls and 30 boys Their mean marks are 25 and 20 respectively Find the combined Mean

उपरोक्त प्रश्न में निम्नसूत्र का प्रयोग किया जायगा।

$$\bar{X}_{12} = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2}{N_1 + N_2}$$

जहां N_1 और N_2 लड़कियों व लड़कों की सख्या है।

$\bar{X}_1$ और $\bar{X}_2$ लड़कियों व लड़कों के औसत अक है।

$$\therefore \bar{X}_{12} = \frac{(20 \times 25) + (30 \times 20)}{20 + 30}$$

$$= \frac{500 + 600}{50}$$

$$= \frac{1100}{50}$$

$= 22$ औसत अक

यदि हम लड़कों और लड़कियों की सख्या का ध्यान रखे बिना ही दोनों के औसत अको का औसत निकाल देते तो फल $= \frac{25 + 20}{2} = 22.5$ अक आता जो कि गलत होता।

यदि अधिक सघटक (*Components*) हों तो उपरोक्त सूत्र को इसी प्रकार बढ़ाया जा सकता है।

उदाहरण नं० 7 21

निम्न प्रश्न में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए —

x	f
110	25
112	17
113	13
117	15
?	14
125	8
128	6
130	2

समान्तर मध्यक 115·86 है।

हलः—

x	f	fx
110	25	2750
112	17	1904
113	13	1469
117	15	1755
?	14	?
125	8	1000
128	6	768
130	2	260
	N=100	9906

$$\therefore \overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$\therefore 115{\cdot}86 = \frac{\Sigma fx}{100}$$

$\therefore \Sigma fx = 115{\cdot}86 \times 100$
$= 11586$

रिक्त स्थान के अतिरिक्त शेष $\Sigma fx = 9906$

और कुल $\Sigma fx = 11586$

अतः रिक्त स्थान का $\Sigma fx = 11586 - 9906 = 1680$

$\because$ उसकी आवृत्ति (f) 14 है।

अतः $x = \frac{\Sigma fx}{f}$

$= \frac{1680}{14}$

$= 120$

$\therefore$ रिक्त स्थान 120 है।

उदाहरण ७.२२

निम्न प्रश्न में रिक्त स्थान की पूर्ति कीजिए।

अंक	आवृति
4—8	11
8—12	13
12—16	16
16—20	14
20—24	?
24—28	9
28—32	17
32—36	6
36—40	4

समान्तर मध्यक 20 है।

हल —

अंक	मध्य बिन्दु x	आवृति f	fx
4—8	6	11	66
8—12	10	13	130
12—16	14	16	224
16—20	18	14	252
20—24	22	?	?
24—28	26	9	234
28—32	30	17	510
32—36	34	6	204
36—40	38	4	152
		90	1772

माना कि रिक्त स्थान b है।

$\therefore \ \overline{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$

$\therefore \ 20 = \frac{1772+22b}{90+b}$

or $1772 + 22b = 1800 + 20b$

or $22b - 20b = 1800 - 1772$

or $2b = 28$

or $b = 14$

अत रिक्त स्थान 14 है।

उदाहरण ७.२३

For a frequency distribution (individual) of marks in statistics of 200 candidates, mean was found to be 40 Later it was discovered that the marks 43 were misread as 53 Find the corrected mean.

हल —

$\therefore \overline{X} = \frac{\Sigma X}{N}$

$\therefore 40 = \frac{\Sigma X}{200}$

$\therefore \Sigma X = 40 \times 200 = 8000$

43 को 53 पढा गया है अत ΣX 10 से गलत बढ गया है

अत (8000–10) = 7990 ठीक ΣX होगा

$\therefore$ शुद्ध $\overline{X} = \frac{7990}{200}$

= 39.95 अंक

चल मध्यक (Moving Average)

चल मध्यक का व्यापारिक फर्मों में अधिक प्रयोग होता है। तुलना करते समय बहुधा चालू वर्ष के अ को और गत वर्ष के अ को का ही ध्यान रखा जाता है परन्तु केवल पिछले वर्ष से तुलना करने से भ्रामक परिणाम निकलने की सम्भावना रहती है। उदाहरणतया यदि किसी कम्पनी के चालू वर्ष के लाभ 50,000 रु० हो और गत वर्ष के लाभ 70,000 रु० रहे हो तो दोनो की तुलना से यही प्रकट होगा कि चालू वर्ष मे कम्पनी का काम सतोषजनक ढग से नही चलाया गया इसलिए इतना कम लाभ हुआ। परन्तु हो सकता है कि यह लाभ गत दस वर्ष मे (केवल पिछले वर्ष के लाभ को छोडकर) सबसे अधिक हो, पिछले वर्ष अधिक लाभ किसी विशेष कारण से हो गया हो इस बात की सम्भावना हो सकती है। अत किसी एक वर्ष से तुलना करने की बजाय कई वर्षों के लाभ की औसत लेकर उससे किसी भी वर्ष के लाभ की तुलना करना अधिक उपयुक्त एव युक्तिसगत है। दूसरे, समय बीतने के साथ औसत के आधार वर्ष (base years) भी बदलते रहने चाहियें, क्योंकि समय के साथ परिस्थितिया भी बदलती रहती हैं और स्थायी परिवर्तन हो जाते हैं। अत कुछ निश्चित वर्षों की औसत को तुलना का स्थायी आधार मानना उचित नही है। इसलिये चल मध्यक (moving average) को काम मे लिया जाता है। चल मध्यक, समय तथा परिस्थितियो के साथ परिवर्तित होती रहती है क्योंकि इसमे पहले वर्ष के मूल्य छोडकर आगे के वर्ष के मूल्य जोडते जाते हैं और औसत निकालते जाते हैं।

चल मध्यक 3, 4, 5, 6, 7, 8, अथवा 10 वर्ष की निकाली जाती है परन्तु 5 वर्ष की चल मध्यक अधिक प्रचलित है। चल मध्यक सम्बन्धी एक उदाहरण नीचे दिया जाता है।

उदाहरण ७.२४

निम्नलिखित तालिका में १९५३ के प्रथम 20 सप्ताहों के सरकारी प्रतिभूतियों सम्बन्धी निर्देशांक दिये गए हैं। इनमें त्रुवर्षीय (Three Yearly) तथा पंचवर्षीय (five yearly) चल मध्यक निकालिये।

सप्ताह	निर्देशांक	त्रु-वर्षीय योग	त्रु-वर्षीय मध्यक	पंच-वर्षीय योग	पंच-वर्षीय मध्यक
1	92 15		.	.	.
2	92 10	276 35	92 12	.	.
3	92 11	276 34	92 11	460 63	92 13
4	92 13	276 38	92 13	460 67	92 13
5	92 14	276 45	92 15	460 79	92 16
6	92 19	276 55	92 18	460 91	92 18
7	92 22	276 64	92 21	460 95	92 19
8	92 23	276 62	92 21	460 99	92 20
9	92 17	276.58	92 19	461 05	92 21
10	92 18	276 60	92 20	461 11	92 22
11	92 25	276 71	92 24	461 15	92 23
12	92 28	276 80	92 27	461 21	92 24
13	92 27	276 78	92 25	461 18	92 24
14	92 23	276 65	92 22	460 93	92 20
15	92 15	276 44	92 15	460 81	92 16
16	92 05	276 31	92 10	460 84	92 17
17	92 10	276 45	92 15	460 81	92 16
18	92 30	276 60	92 20	460 84	92 17
19	92 20	276 63	92 23	..	..
20	92 18	. .	.	.	..

उपरोक्त उदाहरण में सुविधा के लिए तीन-वर्षीय निर्देशांकों के योग भी एक एक खाने में दिखलाए गये हैं। प्रथमतः सबसे पहली तीन संख्याओं को जोड़ा गया है। उनका योग 276 36 होता है। इस जोड़ को संख्या नं० 2 (सप्ताह) के सामने रखा गया है क्योंकि पहले तीन अंकों के बीच की स्थिति यही है। तत्पश्चात् पहली संख्या छोड़ दी गई है और संख्या 4 सम्मिलित कर ली गई है और 2, 3 तथा 4 का योग 276 34 आता है। इसे संख्या 3 के सामने लिखा गया है क्योंकि 2, 3, 4, का मध्य बिन्दु 3 ही है। इसी प्रकार अंत तक किया गया है। योग लगाने के पश्चात् प्रत्येक योग को तीन से भाग देकर उसकी औसत (समान्तर मध्यक) निकाली गई तथा जोड़ के सामने ही रख दी गई है। यही त्रुवर्षीय चल-मध्यक है।

उपरोक्त क्रम ही पंच-वर्षीय चल-मध्यक निकालने में अपनाया गया है। यदि सात वर्षीय चल-मध्यक निकालनी हो तो भी यही प्रणाली अपनानी चाहिये। परन्तु यदि 4, 6, 8, 10 वर्षीय मध्यक निकालनी हो तो स्थिति कुछ भिन्न होगी। चार वर्षीय मध्यक में चार संख्याओं का केन्द्र बिन्दु 2 और 3 के बीच में होगा जैसा कि नीचे के उदाहरण में स्पष्ट है—

```
1    2  :  3    4
×    ×  :  ×    ×
       मध्य
```

अत 4 वर्षीय चल-माध्य निकालना हो तो जोड़ और मध्यक 2 और तीन के बीच में, फिर 3 और 4 के बीच में और आगे इसी तरह क्रम चलता रहेगा। नीचे 4 वर्षीय चल-मध्यक का उदाहरण दिया जाता है।

उदाहरण नं० 7 25

दस सप्ताहों के सरकारी प्रतिभूतियों के निर्देशांक

सप्ताह	निर्देशांक	4 वर्षीय योग	4 वर्षीय चल-मध्यक
1	92 15		
		.	
2	92 10		
		368 49	92 12
3	92 11		
		368 48	92 12
4	92 13		
		368 57	92 14
5	92 14		
			. .
6	92 19		

इसी प्रकार 6, 8 अथवा 10 वर्षीय चल मध्यक का आकलन किया जाता है।

जैसा कि पहले बतलाया जा चुका है कि चल-मध्यक का प्रयोग इसलिये किया जाता है कि किसी एक वर्ष के अक असामान्य परिस्थितियों से प्रभावित हो सकते हैं जबकि 4,5,6, अथवा अधिक वर्षों या सप्ताहों की औसत लेने से असामान्यता पूरित हो जाती है। अत तुलना करने के लिए अधिक मदों (वर्ष या सप्ताह आदि) की औसत ही उत्तम आधार है। इसके अतिरिक्त पहले के वर्ष या सप्ताह, जिनका महत्व कम हो गया है, छोड़ कर आगे के मद औसत निकालने में गिनना बहुत आवश्यक है। इससे तुलना का आधार अधिक उपयुक्त और युक्ति-सगत हो जाता है। चल-मध्यक का प्रयोग परिवर्तनों के झुकाव या उपनति (Trend) सम्बन्धी रेखा चित्र बनाने में भी होता है जिसका वर्णन अध्याय 16 में किया गया है।

मध्यका (Median)

किसी अक श्रेणी के मूल्यों को यदि आरोही (ascending-बढ़ते हुए) अथवा अवरोही (descending-गिरतेहुए) क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाय तो जो मूल्य मध्य बिन्दु होगा वह मध्यका (Median) कहलायगा। मध्यका से पहले तथा मध्यका से बाद की आवृत्तियां (frequencies) सदा समान होती हैं क्योंकि यह मूल्य पूरी श्रेणी को बिल्कुल दो बराबर भागों में बाट देता है तथा स्वय बीच में स्थित होता है। उदाहरणस्वरूप यदि एक घर में पाच भाइयों की लम्बाई 48", 52", 63", 37" और 69" हो तो पहले हम पाचों को आरोही क्रम में व्यवस्थित (arrange) कर लेंगे। इस क्रम में लम्बाइयां 37", 48", 52", 63" तथा 69" हैं। इनके बीच की लम्बाई तीसरी सख्या की लम्बाई है। अत 52" मध्यका लम्बाई हुई। अब 52" से कम दो भाइयों की तथा अधिक भी दो भाइयों की लम्बाई है।

मध्या बिन्दु ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र काम मे लाया जाता है :—

$$M = \text{size of } \left(\frac{N+1}{2}\right)\text{th item}$$

M = Median, मध्यका
N = number of items, मदो की सख्या

उपर के प्रश्न मे पाच मद थे अत मध्यका $\frac{5+1}{2}$ अर्थात् तीसरे मद का मूल्य हुआ। परन्तु यह सूत्र इस मान्यता पर आधारित है कि अक एक निश्चित क्रम में व्यवस्थित हैं।

उदाहरण न० 7·26

व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका निकालना

एक कक्षा के 31 विद्यार्थियों की लम्बाई (इन्चो में) निम्नलिखित है :— 58, 57, 59, 65, 63, 60, 62, 66, 65, 64, 63, 68, 62, 60, 69, 70, 57, 58, 56, 64, 66, 65, 68, 62, 60, 59, 63, 55, 67, 66, 61, मध्यका लम्बाई ज्ञात कीजिये।

हल . विद्यार्थियो की कुल सख्या 31 है अत मध्यका $\left(\frac{31+1}{2}\right)$ अर्थात् 16 वें विद्यार्थी की लम्बाई होगी।

लम्बाई के अको को आरोही क्रम मे अनुविन्यसित (array) करने से निम्न तालिका बनती है —

क्रम सख्या Serial No	लम्बाई (इन्चो में) Height in inches	क्रम सख्या Serial No	लम्बाई (इन्चो मे) Height in inches
1	55	17	63
2	56	18	63
3	57	19	64
4	57	20	64
5	58	21	65
6	58	22	65
7	59	23	65
8	59	24	66
9	60	25	66
10	60	26	66
11	60	27	67
12	61	28	68
13	62	29	68
14	62	30	69
15	62	31	70
16	63		

कक्षा के सब विद्यार्थियो को यदि लम्बाई के अनुसार एक पक्ति में खड़ा किया (array) ऊपर दी गई तालिका के समान होगा। अब 16 वें

विद्यार्थी की लम्बाई ही मध्यका (Median) लम्बाई है अत मध्यका 63 इंच है।

सम संख्याओं में मध्यका ज्ञात करना (To find median in a series having even items) —

उपरोक्त उदाहरण में संख्या विषम थी अत मध्य बिन्दु सरलता से ज्ञात कर लिया गया, परन्तु यदि संख्या सम हो तो कोई भी एक संख्या मध्य में नहीं आयेगी। ऐसी स्थिति में भी सूत्र का प्रयोग करके मध्यका की वास्तविक स्थिति ज्ञात कर लेनी चाहिये और जिन दो संख्याओं के बीच में मध्यका स्थित हो उनको जोड़ कर दो से भाग देने पर मध्यका का वास्तविक मूल्य ज्ञात हो जायगा।

उदाहरण न॰ 7·27

एक कार्यालय के एक विभाग के 12 कर्मचारियों के वेतन इस प्रकार हैं

रु॰ 80,75,100,60,105,110,85,120,90,125,65,115

उनका मध्यका (median) वेतन बतलाइये।

हल.

सभी कर्मचारियों को आय के अनुसार क्रमबद्ध करने पर निम्नलिखित व्यवस्था बनती है :

क्रम संख्या	आय (रु॰ में) क्रमानुसार
1	60
2	65
3	75
4	80
5	85
6	90
7	100
8	105
9	110
10	115
11	120
12	125

$$\text{मध्यका} = \left(\frac{N+1}{2}\right) \text{अर्थात्} \left(\frac{12+1}{2}\right) 6\cdot5 \text{ वें मद का मूल्य}$$

$$\text{अर्थात्} \left(\frac{\text{छठे + सातवें मद}}{2}\right) \text{का मूल्य}$$

$$= \frac{90+100}{2} = 95 \text{ रु॰}$$

उपरोक्त मूल्यों को अवरोही क्रम में रखने पर भी मध्यका 95 रुपए ही आएगी। व्यक्तिगत श्रेणी में मूल्यों को आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना नितान्त आवश्यक है।

खंडित श्रेणी मे मध्यका निकालना (To calculate Median from discrete series) —जब तथ्यांक अलग अलग दिये हों तो मध्यका निकालने की सरलतम रीति तो यही है कि सब अङ्कों को आरोही या अवरोही किसी क्रम में व्यवस्थित कर लिया जाय। इसके मध्य बिंदु या मूल्य ही मध्यका होगा। इसकी एक और भी रीति यह है कि सारे समूह के एक से मदों की आवृत्ति लेकर उसके आधार पर मध्यका निकाला जाय। इसके लिए मदो की आवृत्ति का संचय (cumulation) करना पडेगा। उदाहरण 7 26 में दिये गये अङ्कों को ही हम यहां खंडित श्रेणी मे उद्धृत करते हैं। हम देखते हैं कि उदाहरण मे 55 एक बार, 56 एक बार 57, 58, 59, दो दो बार आये हैं। यही 1, 1 तथा 2 क्रमशः इन मदों की आवृत्तियां (frequency) हैं। इस सारी तालिका को आवृत्ति तालिका के रूप मे निम्न प्रकार से प्रस्तुत किया जा सकता है

उदाहरण नं 7 28

लम्बाई (इंचो मे)	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf	लम्बाई (इन्चो में)	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf
55	1	1	63	3	18
56	1	2	64	2	20
57	2	4	65	3	23
58	2	6	66	3	26
59	2	8	67	1	27
60	3	11	68	2	29
61	1	12	69	1	30
62	3	15	70	1	31

संचयी आवृत्ति (Cumulative frequency) निकालने के लिए प्रत्येक आगे वाली आवृत्ति मे पहले वाली संचयी आवृत्ति जोड़ली जाती है और आगे वाली संख्या के सामने रख दी जाती है। जैसे 55 की आवृत्ति 1 है, 56 की भी 1 है तो 56 के सामने $1 + 1 = 2$ लिखा जायगा। अब 57 के सामने 56 तक की 2 संचयी आवृत्तियां तथा स्वयं 57 की 2 आवृत्तियां जोड कर 4 लिखेंगे। इसी प्रकार 58 के सामने $4 + 2$ (58 की आवृत्ति) अर्थात् 6 लिखेंगे। अन्त का योग उतना ही होगा जितने कि कुल मद हैं, प्रस्तुत उदाहरण में हमे ज्ञात है कि कुल 31 विद्यार्थी हैं।

मध्यका इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

मध्यका $= \left[\frac{N+1}{2}\right]$ अर्थात् $\left[\frac{31+1}{2}\right]$ अर्थात 16 वें मद का मूल्य।

संचयी आवृत्ति को देखने से ज्ञात होता है कि 15 तक के मूल्य तो 62 इंच मे आ जाते हैं। 16 वें मद का मूल्य 63 इन्च है। अत मध्यका = 63 इन्च है।

खंडित श्रेणी मे मूल्यों का आरोही या अवरोही क्रम मे विन्यसन (array) करना आवश्यक नहीं समझा जाता क्योंकि बहुधा इस प्रकार की श्रेणी में मूल्यों को किसी क्रम मे ही प्रस्तुत किया जाता है। हां, यदि इस श्रेणी में मूल्य किसी भी क्रम मे व्यवस्थित नहीं किए गये हों तो उनको (मूल्यों) मध्यका निकालने से पहले विन्यसित। आवश्यक है।

सतत श्रेणी में मध्यका निकालना (To calculate median in Continuous series)—सतत श्रेणी में मध्यका निकालने के लिए भी आवृत्तियों को संचयी आवृत्ति में बदलना पड़ता है, फिर मध्यका बिन्दु (median item) निर्धारित करके उसका मूल्य निकालना होता है। यहां इस बात को मान कर चलना पड़ेगा कि मध्यका जिस वर्गान्तर (class interval) में भी हो वह वर्गान्तर सब आवृत्तियों में समान रूप से फैला हुआ है। यह मान कर ही मध्यका का मूल्य निश्चित किया जाता है। निम्न उदाहरण द्वारा यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण नं ७ २६

एक कक्षा के विद्यार्थियों की लम्बाई निम्नलिखित है

लम्बाई (इन्चों में)	आवृत्ति
55 – 58	4
58 – 61	7
61 – 64	7
64 – 67	8
67 – 70	5
योग	31

मध्यका ज्ञात कीजिए

हल

वर्ग लम्बाई (इन्चों में)	आवृत्ति f	सामूहिक आवृत्ति cf
55 – 58	4	4
58 – 61	7	11 (c_0)
(l_1) 61 – 64 (l_2)	7 (f)	18
64 – 67	8	26
67 – 70	5	31
	31	

मध्यका $= \frac{N^*}{2}$ वें मद का मूल्य

$= \frac{31}{2}$ अर्थात् 15 5 वें मद का मूल्य

* Neiswanger, Waugh, Moroney, Croxton एवं अन्य विख्यात लेखकों का मत है कि सतत श्रेणी में मध्यका $\frac{N}{2}$ वें मद का मूल्य होता है न कि $\frac{N+1}{2}$ हमने इस अन्तर्राष्ट्रीय मान्यता प्राप्त सूत्र का ही प्रयोग किया है। स्मरण रहे कि खंडित एवं व्यक्तिगत श्रेणी में मध्यका $\frac{N+1}{2}$ वें मद का मूल्य होता है। कारण के लिए देखिए उदाहरण ७ ३० तथा ७·३१।

अब हम देखते हैं कि 11 के मद के मूल्य तक तो 58-61 वर्गान्तर में आ जाते है। 15·5 वां मद 61-64 वर्गान्तर मे है और 61-64 वर्गान्तर में कुल 7 मद हैं। वर्गान्तर का विस्तार 3 इन्च हैं।

सतत श्रेणी मे मध्यका ज्ञात करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग करना होता है।

$$M = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - C_o \right) \right\}$$

जबकि,

M = median या मध्यका

l_1 = Lower limit of the class interval अर्थात् जिस वर्गान्तर मे मध्यका स्थित है उस वर्गान्तर की अधर सीमा।

l_2 = Upper limit of the class interval अर्थात् जिस वर्गान्तर मे मध्यका स्थित है उस वर्गान्तर की ऊपर सीमा।

f = frequency आवृत्ति (मध्यका वाले वर्गान्तर की)

$\frac{N}{2}$ = median item मध्यका मद

C_o = Cumulative frequency of the preceding class interval अर्थात् जिस वर्गान्तर में मध्यका स्थित है उससे पूर्व वर्गान्तर की संचयी आवृत्ति।

i = $(l_2 - l_1)$ = उस वर्गान्तर का वर्ग विस्तार (interval) जिसमे मध्यका स्थित है।

अत प्रस्तुत प्रश्न मे मध्यका (Median)

$$M = 61 + \left\{ \frac{3}{7}(15.5 - 11) \right\}$$

$$= 61 + \left(\frac{3}{7} \times 4.5 \right)$$

$$= 61 + 1.93$$

$$= 62.93 \text{ इन्च}$$

उदाहरण नं० ७·३०

निम्न सारणी मे 43 विद्यार्थियो के द्वारा प्राप्तांक दिए गए हैं। उनकी मध्यका (Median) ज्ञात कीजिए।

अंक	विद्यार्थी
20 – 30	3
30 – 40	5
40 – 50	20
50 – 60	10
60 – 70	5

हल—

1 Marks अक X	2 Students आवृत्ति f	3 संचयी आवृत्ति cf
20 - 30	3	3
30 - 40	5	8
40 - 50	20	28
50 - 60	10	38
60 - 70	5	43

मध्यका $= \frac{N}{2}$ वें मद का मूल्य

$= \frac{43}{2} = 21.5$ वें मद का मूल्य

$$M = l_1 + \left\{ \frac{i}{f} \left(\frac{N}{2} - C_0 \right) \right.$$

$$= 40 + \left\{ \frac{10}{20} (21 \cdot 5 - 8) \right\}$$

$$= 40 + 6\ 75$$

$= 46\ 75$ अक

उपरोक्त प्रश्न मे अङ्क आरोही क्रम (ascending order) मे दिए गए हैं। यदि मूल्य (values) अवरोही क्रम (descending order) में दिए गये हो तो सूत्र तो वही रहता है लेकिन l_1 के जोडके के बजाय l_2 मे से बडे ब्रेकिट मे लिखे मूल्य घटा दिए जाते हैं। निम्न उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण ७ ३१

निम्न सारणी मे 43 विद्यार्थियो के द्वारा प्राप्त अङ्क दिये गए हैं। उनका मध्यका ज्ञात कीजिये।

अङ्क	विद्यार्थी
60 - 70	5
50 - 60	10
40 - 50	20
30 - 40	5
20 - 30	3

हल :—

1 अङ्क x	2 विद्यार्थी f	3 सचयी आवृत्ति cf
60 - 70	5	5
50 - 60	10	15 (c_0)
(l_1) 40 - 50 (l_2)	20 (f)	35
30 - 40	5	40
20 - 30	3	43

$$\text{मध्यका} = \frac{N}{2} \text{ वें मद का मूल्य}$$

$$= \frac{43}{2} = 21{\cdot}5 \text{ वें मद का मूल्य}$$

$$M = l_2 - \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_0\right) \right\}$$

$$= 50 - \left\{ \frac{10}{20}(21{\cdot}5 - 15) \right\}$$

$$= 50 - \tfrac{1}{2} \times 6{\cdot}5$$

$$= 50 - 3{\cdot}25$$

$$= 46{\cdot}75 \text{ अङ्क}$$

नोट—उपरोक्त प्रश्न को यदि $\frac{N+1}{2}$ वें सूत्र से हल किया जाता तो आरोही क्रम मे मूल्य रखने पर मध्यका 47 अङ्क आता और अवरोही क्रम मे मूल्य रखने पर 46·5 अङ्क जबकि यह आवश्यक है कि मूल्यो को किसी भी क्रम मे विन्यसित करने पर मध्यका एक ही आना चाहिए। इसीलिये संतत श्रेणी में सभी प्रसिद्ध विदेशी लेखकों ने मध्यका को $\frac{N}{2}$ वां मूल्य माना है।

उदाहरण ७·३२

निम्न तालिका में 800 व्यक्तियों की उम्र वर्षों में दी गई है। उनकी मध्यका-उम्र (Median age) मालूम कीजिए।

उम्र	व्यक्तियों की संख्या
20 – 60	800
20 – 55	740
20 – 40	400
20 – 30	120
20 – 50	670
20 – 45	550
20 – 25	50
20 – 35	220

हल :—

उपरोक्त तालिका का 5–5 के समान वर्ग-विस्तार (Interval) वाले वर्गान्तरों (Class Intervals) में निम्न परिवर्तन कीजिए।

उम्र	व्यक्ति f	संचयी आवृत्ति cf
20 — 25	50	50
25 — 30	70	120
30 — 35	100	220
35 — 40	180	400
40 — 45	150	550
45 — 50	120	670
50 — 55	70	740
55 — 60	60	800

मध्यका = $\frac{N}{2}$ वें मद का मूल्य

$= \frac{800}{2}$ वे मद का मूल्य

$$M = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_0\right) \right\}$$

$$= 35 + \left\{ \frac{5}{180} (400 - 220) \right\}$$

$$= 35 + \left\{ \frac{5}{180} \times 180 \right)$$

$$= 35 + 5$$

$= 40$ वर्ष

सम्मिलित अङ्क श्रेणी (Inclusive Series) में मध्यका निकालना—कभी कभी सम्मिलित अङ्क श्रेणी में मध्यका निकालना होता है जिसकी रीति निम्न है :

उदाहरण ७·३३

निम्न तालिका मे 182 व्यक्तियो की लम्बाई इंचो मे दी गई है। उनकी मध्यका लम्बाई निकालिए।

182 व्यक्तियो की इंचो मे लम्बाई

लम्बाई (इंचो में)	45–49	50–54	55–59	60–64	65–69	70–74	75–79
आवृत्ति	2	10	55	21	57	32	5

हल -

लम्बाई वर्ग (इचों में)	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf
45 - 49	2	2
50 - 54	10	12
55 - 59	55	67
60 - 64	21	88
65 - 69 —	57	145
70 - 74	32	177
75 - 79	5	182

$M = \frac{N}{2}$ वें मद का मूल्य

$= \frac{182}{2}$ अर्थात् 91 वें मद का मूल्य

91 वा मद 65-69 वर्गान्तर मे है ।

अत $M = l_1 + \left\{\frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_0\right)\right\}$

$= 64\ 5 = \left\{\frac{5}{57}(91 - 88)\right\}$

$= 64\ 5 + \left(\frac{5}{57} \times 3\right)$

$= 64\ 5 + 26$

$= 64\ 76$ इंच

ऊपर के प्रश्न में वर्गान्तर को अवर सीमा 64 5 ली गई है क्योकि इसमे पिछले वर्ग मे 60 से 64 (60,61,62,63,64) तक पाचो मद शामिल है परन्तु 64 के बाद 64 01 से लेकर 64 99 तक के मद किस वर्ग मे सम्मिलित है यह पता नहीं है क्योकि अगले वर्ग मे 65 से 69 तक के मद ही सम्मिलित हैं। 64 से 65 तक के बीच की लगभग 1 मद की आवृतिया (जो सख्या में काफी हो सकती है) भी किसी वर्ग में तो आई ही होगी यह निर्विवाद है। परन्तु किस वर्ग मे, इसका सीधा सा उत्तर यही है कि 64, 65 के बीच अन्तर को दोनो वर्गों में आधा आधा बाट कर वर्गों को संतत (Continuous) बना देना चाहिये। अत नए रूप मे तालिका इस प्रकार होगी।

लम्बाई इंचो में	44 5-49 5	49.5-54 5	54 5-59 5	59.5-64 5	64.5-69 5	69 5-74.5	74 5-79.5
आवृत्ति	2	10	55	21	57	32	5

इस प्रकार हम देखते हैं कि जिस वर्ग मे मध्यका स्थित है उसकी अवर सीमा वास्तव मे 64 5 है। इसका एक कारण भी है। हम 64.49 को सक्षिप्त करके 64 ही

रखेंगे और 64 50 को तद्दिप्त करने से 65 हो जायगा अत 64 49 की कोई मद है तो वह 64 मे ही सम्मिलित है और 64 50 की मद 65 में, इसलिये अधिक शुद्ध वर्ग होंगे 44 50—49 49, 49 50—54 49, आदि, और यह भी सम्मिलित श्रेणी होगी। इसे सतत या नियमित बनाने के लिए 44 5-49 5, 49 5-54 5 आदि वर्गान्तर सर्वथा उचित है।

उपरोक्त मान्यता के आधार पर वर्गान्तर भी निश्चित रूप से 5 हो जाता है और वैसे भी सम्मिलित श्रेणी होने के कारण 65,66,67,68,69 आदि पाच अङ्क सम्पूर्ण रूप मे एक वर्ग मे सम्मिलित हैं अत वर्ग विस्तार (Class interval) भी 5 ही लिया जाना चाहिये।

उदाहरण न 7 34

निम्नलिखित तालिका मे मध्यका मूल्य ज्ञात कीजिये।

आयु (वर्षों मे)	आवृत्ति
10 वर्ष से नीचे	2
20 ,,	20
30 ,,	65
40 ,,	143
50 ,,	175
60 ,,	208
70 ,,	230
80 ,,	242
90 ,,	250

हल

उपरोक्त प्रश्न मे सचयी आवृत्ति (Cumulative frequency) दी गई है, इसे सरल आवृत्ति मे परिवर्तित करना पड़ेगा।

1 आयु वर्षों मे	2 आवृत्ति f	3 सचय आवृत्ति cf
0 – 10	2	2
10 – 20	18	20
20 – 30	45	65
30 – 40	78	143
40 – 50	32	175
50 – 60	33	208
60 – 70	22	230
70 – 80	12	242
80 – 90	8	250

मध्यका $= \frac{N}{2}$ अर्थात् $\frac{250}{2} = 125$ वें मद का मूल्य

125 वां मद 30–40 वर्गान्तर में है।

अत $M = l_1 + \left\{\frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_0\right)\right\}$

$= 30 + \left\{\frac{10}{78}(125 - 65\right\}$

$= 30 + \left(\frac{10}{78} \times 60\right)$

$= 30 + 7\ 69$

$= 37\ 69$ वर्ष

मध्यका के गुण अथवा लाभ —मध्यका एक बहुत सरल माध्य है तथा मदों के मूल्य को अनुविन्यसित (array) करने के बाद इसकी स्थिति ज्ञात करना बहुत आसान है। मध्यका में निम्न गुण है —

(1) वास्तविक—मध्यका मूल्य समूह में एक मूल्य होता है 3,6,9,10,11 का मध्यका 9 है जो प्रस्तुत अंकों में से एक है। समूह की समान्तर मध्यक 8 है जो प्रस्तुत अंकों से अलग है। इसीलिए कहा जाता है कि मध्यका किसी अंक समूह का वास्तविक माध्य होता है।

(2) निश्चित निर्धारण—मध्यका का निर्धारण बिल्कुल निश्चित तथा शुद्ध हो सकता है। प्रत्येक समूह के बिल्कुल मध्य में स्थित मद मध्यका होता है।

(3) निरीक्षण —मध्यका का एक गुण यह भी है कि इसमें अधिक लम्बे चौड़े हिसाब करने की आवश्यकता नहीं पड़ती। बहुधा केवल दृष्टि मात्र से ही बीच के बिन्दु के आधार पर मध्यका निर्धारित कर लिया जाता है।

(4) सीमाओं से अप्रभावित —मध्यका, अंकों के अन्तिम अथवा प्रारम्भिक मदों के मूल्यों से प्रभावित नहीं होता। यह केवल बीच के अंकों को ही विशेष महत्व देता है और साधारणतया बीच के अंक ही औसत स्थिति का दिग्दर्शन करते है।

(5) संख्या मात्र — मध्यका का निर्धारण अन्त के अंकों की आवृत्ति ज्ञात न होने पर भी हो सकता है यदि केवल इतना पता हो कि मदों की कुल संख्या कितनी है।

(6) वर्गान्तर में —वर्गान्तर समूह (class group) मे भी मध्यका का निर्धारण सामान्य शुद्धता से हो सकता है। इस प्रकार की स्थिति में वर्गान्तर का विस्तार बिल्कुल स्पष्ट होना चाहिये।

मध्यका के दोष अथवा कमियां —मध्यका सरल होने पर भी दोष मुक्त नहीं है। इसमें निम्नलिखित कमियां है —

(1) कृत्रिम आकलन —किसी भी सरल गणित सूत्र से इसका अनुमान नहीं

लगाया जा सकता। इसके लिए पहले उसकी उपस्थिति का स्थान निर्धारण किया जाना है फिर सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

(2) अंक व्यवस्था —मध्यका ज्ञान करने से पूर्व सम्बन्धित मदों को आरोही अथवा अवरोही क्रम में व्यवस्थित करना पड़ता है जिसमें बहुधा काफी समय खर्च होता है।

(3) मध्यका को मदों की संख्या से गुणा करने पर मूल्य का कुल योग ज्ञात नहीं हो सकता। यदि 5 व्यक्तियों की मासिक आय क्रमश: 50, 80, 100, 110 तथा 130 रु० है तो इसका मध्यका 100 रु० होगा। इसे 5 से गुणा करने पर 500 रु० हुआ जब कि कुल आय 470 रु० ही है। समूह का समान्तर मध्यक 94 रु० है और इसे 5 (मदों की संख्या) से गुणा करने पर 470 रु० ही आता है।

(4) भ्रामक परिणाम —यदि मदों के मूल्यों के विस्तार में बहुत भिन्नता हो तो मध्यका बहुत भ्रामक परिणाम देता है जैसे यदि 5 व्यक्तियों की आय 20, 100 400 500 तथा 10 000 रुपया हो तो मध्यका 400 रुपया होगा जो सर्वथा भ्रामक है।

मध्यका की उपयोगिता--जिन तथ्यों की व्यक्तिश: अलग अलग तुलना नहीं की जा सकती या जिन्हें समूहों में रखा जाना आवश्यक है उनकी तुलना के लिए मध्यका का प्रयोग बहुत उपयोगी है। सामाजिक गतिविधियों के सम्बन्ध में विचार करने में इसका बहुत महत्व है। सम्पत्ति का वितरण (distribution of wealth) श्रमिकों की मजदूरी तथा व्यक्तियों की योग्यता (intelligence) आदि की तुलना मध्यका द्वारा ही की जाती है। वाणिज्य में मध्यका का प्रयोग अधिक व्यावहारिक नहीं है परन्तु सामान्य व्यापार अथवा उद्योगों सम्बन्धी अंकों की तुलना में मध्यका की उपयोगिता असंदिग्ध है।

चतुर्थक, दशमक तथा शतमक-(Quartile, Decile and percentile) मध्यका किसी भी अंक समूह के मध्य बिन्दु का मूल्य होता है परन्तु अंक समूह को और भी अधिक भागों में विभाजित किया जा सकता है और उसके चतुर्थांश (quartile) पंचमांश (quintile) अष्टमांश (octile), दशमांश (decile), तथा शतांश (percentile) मध्यमान निकाले जा सकते हैं चतुर्थांश अथवा चतुर्थक, अंक समूह के चौथाई मद का मूल्य होता है। प्रत्येक संख्या श्रेणी के चार चौथाई भाग होते हैं प्रथम चतुर्थांश द्वितीय चतुर्थांश अथवा मध्यांश (median), तृतीय एवं चतुर्थ चतुर्थांश। चतुर्थ चतुर्थांश संख्या का अंत होता है जैसे 100 का प्रथम चतुर्थांश 25, द्वितीय चतुर्थांश $(\frac{100}{4} \times 2) = 50$, तृतीय चतुर्थांश $(\frac{100}{4} \times 3) = 75$, तथा चतुर्थ चतुर्थांश स्वयं $(\frac{100}{4} \times 4) = 100$ होता है। हम स्पष्ट अनुभव कर सकते हैं कि द्वितीय चतुर्थांश मध्यका का मूल्य ही है। चतुर्थ चतुर्थांश संख्या सम्पूर्ण मूल्य है। अत: महत्व की दृष्टि से हमें यहां प्रथम तथा तृतीय चतुर्थकों पर ही विचार करना है।

चतुर्थक की भांति ही दशमक (Decile) होते हैं जिन्हें प्रथम, द्वितीय, तृतीय चतुर्थ, पंचम, षष्ठ, सप्तम, अष्टम तथा नवम दशमक कहते हैं। पंचम दशमक मध्यका ही होता है। इसी प्रकार शतमक भी एक से निन्यानवें तक हो सकते हैं तथा 50 वां शतमक मध्यका होता है।

चतुर्थक, दशमक अथवा शतमक ज्ञात करने का सूत्र वही है जिससे मध्यका निकाला जाता है, केवल अन्तर यह है कि मध्यका का स्थान $\frac{N+1}{2}$ वें मद का मूल्य होता है चतुर्थक $\frac{N+1}{4}$ वें मद, दशमक $\frac{N+1}{10}$ वे मद तथा शतमक $\frac{N+1}{100}$ वें मद के मूल्य होते हैं। इनके अतिरिक्त चतुर्थक, दशमक अथवा शतमक की जिस सख्या का स्थान निर्धारित करना हो उस सख्या से गुणा भी करना आवश्यक होता है। नीचे संक्षेप मे इनसे सम्बन्धित सूत्र दिये जाते हैं।

प्रथम चतुर्थक चतु$_1$ $(Q_1) = \frac{(N+1)}{4}$ वें मद का मूल्य

तृतीय ,, चतु$_3$ $(Q_3) = \frac{3(N+1)}{4}$ वें मद का मूल्य

छटा दशमक दश$_6$ $(D_6) = \frac{6(N+1)}{10}$ वें मद का मूल्य

18वा शमतक शत$_{18}$$(P_{18}) = \frac{18(N+1)}{100}$ वें मद का मूल्य

कभी कभी पचमक (Quintile), अष्टम (Octile) आदि भी निकालने की आवश्यकता पड सकती है। उनके लिए भी उपरोक्त सूत्र के अनुसार क्रमश 5 तथा 8 से भाग देकर स्थिति ज्ञात कर सकते है।

चतुर्थक, दशमक तथा शतमक आदि निकालना —

उदाहरण 7 35

एक कक्षा के 31 विद्यार्थियो की लम्बाई (इन्चो में) निम्नलिखित है,—

58,57,59,65,63,60,62,66,65,64,63,68,62,60,
69,70,57,58,56,64,66,65,68,62,60,59,63,55,
67,66,61,

दोनो चतुर्थक, चतुर्थ दशमक, 48 वा शतमक तथा द्वितीय पचमक ज्ञात कीजिये।

हल —

पहले सारी सख्याओ को किसी क्रम मे व्यवस्थित किया जायगा।

क्रम संख्या	लम्बाई (इन्चो मे)	क्रम सख्या	लम्बाई (इन्चो मे)	क्रम सख्या	लम्बाई (इन्चो मे)
1	56	12	61	23	65
2	56	13	62	24	66
3	57	14	62	25	66
4	57	15	62	26	66
5	58	16	63	27	67
6	58	17	63	28	68
7	59	18	63	29	68
8	59	19	64	30	69
9	60	20	64	31	70
10	60	21	65		
11	60	22	65		

33173

(1) चतु०₁ $(Q_1) = \frac{31 + 1}{4}$ अर्थात् 8 वें मद का मूल्य

$= 59$ इंच (ऊपर से आठवें मद का मूल्य 59 इंच है)

(2) चतु०₃ $(Q_3) = \frac{3(31 + 1)}{4}$ अर्थात् 24 वें मद का मूल्य

$= 66$ इन्च

(3) दश०₄ $(D_4) = \frac{4(31 + 1)}{10}$ अर्थात् 12.8 वें मद का मूल्य

$= 61 + (62 - 61)(12.8 - 12)$
$= 61 + (1 \times .8)$
$= 61 + .8 = 61.8$ इन्च

(4) शत०₄₈ $(P_{48}) = \frac{48(31 + 1)}{100}$ अर्थात् = 15.36 वें मद का मूल्य

= 15 वें मद का मूल्य 62 तथा 16 वें का 63 है।
$= 62 + (63 - 62) \times .36$
$= 62 + .36$
$= 62.36$ इन्च

क्योंकि एक मद बढ़ने पर लम्बाई एक इन्च बढ़ी है इसलिये .36 मद बढ़ने से लम्बाई भी .36 इन्च बढ़ेगी। अतः 62 में .36 जोड़ना उचित होगा।

कुछ लेखक यह भी मानते हैं कि अगली मद से पहले पहले मूल्य वही मानना चाहिये जो पहले मद का हो। इस सिद्धान्तानुसार 15.36 वें मद का मूल्य भी 62 इन्च ही होगा। परन्तु हम धारणा सर्वमान्य नहीं है क्योंकि हम यह मानकर चलते हैं कि मूल्यों का विस्तार मदों के विस्तार के समानान्तर ही होता है।

(5) पंच०₂ $(Qn_2) = = \frac{2(31 + 1)}{5}$ अर्थात् 12.8 वे मद का मूल्य

यह भी चतुर्थ दशमक के समान ही है।

अतः $(Qn_2) = 61.8$ इन्च

$\frac{281}{53} \times 100$

खडित श्रेणी मे चतुर्थक आदि निकालना —

उदाहरण 7 36

उदाहरण सख्या 7.28 के अड्को मे प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक, सप्तम दशमक, 55 वा शतमक तथा तीसरा अष्टमक निकालिये।

लम्बाई (इन्चो मे	आवृत्ति f	सामूहिक आवृत्ति cf	लम्बाई (इन्चो मे)	आवृत्ति f	सामूहिक आवृत्ति cf
55	1	1	63	3	18
56	1	2	64	2	20
57	2	4	65	3	23
58	2	6	66	3	26
59	2	8	67	1	27
60	3	11	68	2	29
61	1	12	69	1	30
62	3	15	70	1	31

(1) चतु०$_1$ $(Q_1) = \frac{(31+1)}{4}$ अर्थात् 8 वें मद का मूल्य

= 59 इच (सामूहिक आवृत्ति मे देखिए)

(2) चतु०$_3$ $(Q_3) = \frac{3(31+1)}{4}$ अर्थात् 24 वें मद का मूल्य

= 66 इच (24, 25, 26 का मूल्य 66 है)

(3) दश०$_7$ $(D_7) = \frac{7(31+1)}{10}$ अर्थात् 22 4 वें मद का मूल्य

= 65 इन्च (21 से 23 तक 65 मे है)

(4) शत०$_{55}$ $(P_{55} = \frac{55(31+1)}{100}$ अर्थात् 17 60 वें मद का मूल्य

= 63 इन्च

(5) अष्ट$_3$ $(O_3) = \frac{3(31+1)}{8}$ अर्थात् 12 वें मद का मूल्य

= 61 इन्च

संतत श्रेणी (Continuous Series) मे चतुर्थक आदि निकालना—

सतत श्रेणी में भी मध्यका निकालने वाले सूत्र का ही उपयोग किया जाता है केवल जहा मध्यका लिखते है वहा चतुर्थक, दशमक आदि लिख देते है। नीचे इनके सूत्र दिये जाते हैं।

$$\text{चतु०}_1\ (Q_1) = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C_o \right)\right\}$$

$$\text{चतु०}_3\ (Q_3) = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C_o \right)\right\}$$

$$\text{दश}_{\circ 7}\,(D_7) = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{7N}{10} - C_0 \right) \right\}$$

$$\text{शत}_{\circ 55}\,(P_{55}) = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{55N}{100} - C_0 \right) \right\}$$

यहा भी l_1 = lower limit of the class interval जिस वर्ग मे चतुर्थक दशमक आदि है उसकी अवर सीमा ।

l_2 = upper limit of the class interval जिस वर्ग समूह मे चतुर्थक दशमक आदि स्थित हैं उसकी अपर सीमा ।

i = interval of that class group जिस वर्ग समूह मे चतुर्थक है उसका विस्तार

f = frequency सम्बन्धित वर्ग की आवृत्ति

C_0 = cumulative frequency of the previous class group सम्बन्धित वर्ग से पहले की सचयी आवृत्ति

Q_1, Q_3, D_7, तथा P_{55}, क्रमश चतु$\circ_1$, चतु$\circ_3$, दश$\circ_7$ तथा शत$\circ_{55}$ हैं ।

इन्हे स्पष्ट करने के लिए नीचे उदाहरण दिये जाते है —

उदाहरण नं 7 37

एक कक्षा मे विद्यार्थियो की लम्बाई निम्नलिखित है ।

वर्ग (इचो मे	55–58	58–61	61–64	64–67	67–70
आवृत्ति	4	7	7	8	5

प्रथम तथा तृतीय चतुर्थक, 7 वा दशमक तथा 32 वा शतमक ज्ञात करो

हल—

वर्ग (लम्बाई इन्चो मे	आवृत्ति f	सामूहिक आवृत्ति cf
55 – 58	4	4
58 – 61	7	11
61 – 64	7	18
64 – 67	8	26
67 – 70	5	31

(I) चतु$\circ_1$ $(Q_1) = \frac{31}{4}$ अर्थात् 7 75 वें मद का मूल्य

अत चतुर्थक का वर्गान्तर = 58–61

$$Q_1 = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C_0 \right) \right\}$$

$$= 58 + \left\{ \frac{3}{7}(7{\cdot}75-4) \right\}$$

$$= 58 + \frac{3}{7} \times 3{\cdot}75$$

$$= 58 + 1{\cdot}61$$

$$= 59{\cdot}61 \text{ इन्च}$$

(2) चतु॰$_3$ $(Q_3) = 3\left(\frac{31}{4}\right)$ अर्थात् 23.25 वें मद का मूल्य

अत $$Q_3 = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - C_0 \right) \right\}$$

$$= 64 + \left\{ \frac{3}{8}(23{\cdot}25-18) \right\}$$

$$= 64 + \left(\frac{3}{8} \times 5.25 \right)$$

$$= 64 + 1{\cdot}97 = 65{\cdot}97 \text{ इन्च ।}$$

(3) दश॰$_7$ $(D_7) = \frac{7(31)}{10}$ अर्थात् 21·7 वें मद का मूल्य

21·7 वा मद 64–67 वर्गान्तर मे है

अत $$D_7 = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{7N}{10} - c_0 \right) \right\}$$

$$= 64 + \left\{ \frac{3}{8}(21.7-18) \right\}$$

$$= 64 + \left(\frac{3}{8} \times 3{\cdot}7 \right)$$

$$= 64 + 1{\cdot}38 = 65{\cdot}38$$

(4) शत॰$_{32}$$(P_{32}) = \frac{32\ (31)}{100}$ अर्थात् 9·92 वें मद का मूल्य

सचयी आवृति से प्रकट है कि 9.92 वां मद 58–61 वर्गान्तर में है

अत $$P_{32} = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{32N}{100} - c_0 \right) \right\}$$

$$= 58 + \left\{ \frac{3}{7}(9.92 - 4) \right\}$$

$$= 58 + \left(\frac{3}{7} \times 5{\cdot}92 \right)$$

$$= 58 + 2{\cdot}54 = 60{\cdot}54 \text{ इन्च}$$

सम्मिलित (inclusive) श्रेणी में चतुर्थक आदि निकालना —

उदाहरण नं० 7·38

निम्नलिखित तालिका में 182 व्यक्तियों की लम्बाई इन्चों में दी गई है। इसमें तृतीय चतुर्थक तथा अष्टम दशमक लम्बाई निकालिए।

लम्बाई	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79
आवृत्ति	2	10	55	21	57	32	5

हल —

लम्बाई वर्ग (इन्चों में)	आवृत्ति f	संचयी आवृत्ति cf
45-49	2	2
50-54	10	12
55-59	55	67
60-64	21	88
65-69	57	145
70-74	32	177
75-79	5	182

(1) चतु०$_3$ $(Q_3) = 3\left(\frac{182}{4}\right)$ अर्थात् 136.5 वें मद का मूल्य

यह मद 65–69 वर्गान्तर में है

$$\text{अत. } Q_3 = 64.5 + \left\{\frac{5}{57}(136.5-88)\right\}$$
$$= 64.5 + \left(\frac{5}{57} \times 48.5\right)$$
$$= 64.5 + 4.26$$
$$= 68.76 \text{ इन्च}$$

(2) दश०$_8$ $(D_8) = 8\left(\frac{182}{10}\right)$ अर्थात् 145.6 वें मद का मूल्य

यह मद 70–74 वर्ग में है।

$$\text{अत } D_8 = 69.5 + \left\{\frac{5}{32}(145.6-145)\right\}$$
$$= 69.5 + \left(\frac{5}{32} \times 6\right)$$
$$= 69.59 \text{ इन्च}$$

उदाहरण न० ७.३९

निम्न तालिका मे चतुर्थक (quartiles) ज्ञात कीजिए।

X	f
0 - 9	40
10 - 19	50
20 - 29	15
30 - 39	10
40 - 49	5

हल—

1 X	2 f	3 cf
0 - 9	40	40
10 - 19	50	90
20 - 29	15	105
30 - 39	10	115
40 - 49	5	120

$Q_1 = \left(\frac{N}{4}\right)$ वें मद का मूल्य

$= \frac{120}{4}$ अर्थात् 30 वें मद का मूल्य

30 वा मद (0–9) वर्गान्तर में है

$$\therefore Q_1 = l_1 + \left\{\frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - C_0\right)\right\}$$

$$= 0 + \left\{\frac{9.5}{40}(30\text{–}0)\right\}$$

$$= 0 + \left(\frac{285}{40}\right)$$

$$= 7.125$$

$Q_3 = \frac{3N}{4}$ वें मद का मूल्य

$= 3 \times \frac{120}{4} = 90$ वें मद का मूल्य

90 वां मद (10 – 19) वर्गान्तर में है।

$$\therefore Q_3 = 9.5 + \left\{\frac{10}{50}(90 - 40)\right\}$$

$$= 9.5 + 10$$

$$= 19.5$$

—1 जब प्रश्न में 'चतुर्थक' निकालने को कहा गया हो तो Q_1 व Q_3 दोनों ही ज्ञात करने चाहिए।

2. जब प्रथम-चतुर्थक मद पहिले वर्गान्तर में ही आ जाय तो C_o शून्य के बराबर मानी जाती है।

3. सम्मिलित श्रेणी (inclusive series) में प्रथम वर्गान्तर का वर्ग विस्तार 9 5 है और बाद वाले सब वर्गान्तरों का विस्तार 10 माना जाता है।

उदाहरण न० 7·40

निम्न सारणी को संशोधित कीजिये तथा संशोधित सारणी से मध्यका ज्ञात कीजिये —

आकार (size)	आवृत्ति (frequency)
10 — 15	10
15 — 17 5	15
17 5 — 20	17
22 — 30	25
30 — 35	25
35 — 40	30
45 onwards	40

हल —

सारणी को कई प्रकार से संशोधित किया जा सकता है परन्तु सबसे श्रेष्ठ संशोधित सारणी उस समय बनती है जब वर्गान्तर समान हों। अन्तिम वर्गान्तर को (40 - 50) कर लिया गया है ताकि सब वर्गों में समानता आ सके। ऐसा करने से निम्न सारणी बनती है —

आकार (size)	आवृत्ति (frequency) f	संचयी आवृत्ति (cf)
10 — 20	42	42
20 — 30	25	67
30 — 40	58	125
40 — 50	40	165

मध्यका (Median) $= \frac{N}{2} = \frac{165}{2} = 82.5$ वें मद का मूल्य

$$M = l_1 + \left\{\frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_o\right)\right\}$$

$$= 30 + \left\{\frac{10}{58}(82.5 - 67)\right\}$$

$$= 30 + \left(\frac{10}{58} \times 15.5\right)$$

$$= 30 + \frac{155}{58}$$

$$= 30 + 2.67$$

$$= 32.67$$

उदाहरण न० 7 41

निम्न सारणी से विवाहित स्त्रियों के प्रथम बच्चे के जन्म की आयु का मध्यक (mean) और मध्यका (median) ज्ञात कीजिए —

प्रथम बच्चे के जन्म पर आयु	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
विवाहित स्त्रियों की संख्या	37	162	343	390	256	433	161	355	65	85	49	46	40

हल —

1 प्रथम बच्चे के जन्म पर आयु (x)	2 विवाहित स्त्रियों की संख्या (f)	3 संचयी आवृत्ति (cf)	4 (A) विचलन कल्पित मध्यक (19) से x	5 fx
13	37	37	− 6	− 222
14	162	199	− 5	− 810
15	343	542	− 4	− 1372
16	390	932	− 3	− 1170
17	256	1158	− 2	− 512
18	433	1621	− 1	− 433
19	161	1782	0	0
20	355	2137	+ 1	+ 355
21	65	2202	+ 2	+ 130
22	85	2287	+ 3	+ 255
23	49	2336	+ 4	+ 196
24	46	2382	+ 5	+ 230
25	40	2422	+ 6	+ 240
	N=2422			Σfx =−3113

(i) मध्यक (Mean or $\bar{X}$) $= A + \frac{\Sigma fx}{N} = 19 + \frac{-3113}{2422}$

$= 19 - 1{\cdot}29$

$= 17\ 71$ वर्ष

(ii) मध्यका (M) $= \frac{N+1}{2}$ वें पद का मूल्य

$= \frac{2422+1}{2} = 1211\ 5$ वें का मूल्य

$= 18$ वर्ष

खंडित श्रेणी मे भूयिष्ठक निकालना (To find mode in discrete series)

उदाहरण न० 81

निम्नलिखित सारणी से भूयिष्ठक निकालिये।

मूल्य—10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
आवृत्ति—34 38 42 46 48 51 50 43 51 49 42 38 36

हल —

मूल्य	आवृत्ति अ	ब	स	द	आ	इ
10	34	72				
11	38		80	114		
12	42	88			126	
13	46		94			136
14	48	99		145		
15	51		101		149	
16	50	93				144
17	43		94	144		
18	51	100			143	
19	49		91			142
20	42	80		129		
21	38		74		116	
22	36					

उपरोक्त सारणी मे सबसे पहले 10 तथा 11 मूल्य की आवृत्ति या, फिर 12, 13 और उसके बाद 14, 15 तथा इसी क्रम मे दो-दो मूल्यो की आवृत्तिया जोडी गई हैं और उनके योग उनके सामने के कोष्ठको के आगे रख दिये गये हैं। फिर 10 का मद छोड दिया गया है तथा 11, 12 फिर 13, 14 तथा 15, 16 आदि दो-दो मूल्यो की आवृत्तिया जोडी गई हैं और नये कोष्ठको के आगे उनके योग 'स' खाने मे रखे गये हैं। फिर 10, 11, 12 तथा 13, 14, 15 आदि के तीन-तीन मदो के जोड लगा कर 'द' खाने में रखे गये हैं। इसके बाद 'आ' स्तम्भ मे 10 वें मूल्य की आवृति छोड दी गई है और 11, 12, 13 तथा 14, 15, 16 आदि के तीन-तीन मदो की आवृत्तियो के जोड रखे गये हैं। अन्त में 'इ' स्तम्भ मे पहले दो मूल्यो अर्थात् 11, 12 छोड कर 13, 14, 15 तथा 16, 17, 18 मूल्य की आवृत्तियो के जोड लगा कर रखे गये हैं।

अब भूयिष्ठक जानने के लिये पहले यह ज्ञान करना आवश्यक है कि कौन से मद का मूल्य सर्वाधिक प्रचलित अथवा महत्वपूर्ण है। इसके लिये जिन मदो का योग सर्वाधिक आया है उनके मूल्य अलग रखने पडते हैं तथा छहो स्तम्भो (Columns) में मिला कर जिस मद के मूल्य का बहुमत रहेगा वही भूयिष्ठक होगा। नीचे की विश्लेषण सारणी द्वारा यह स्पष्ट हो जावेगा कि कौन से मद का मूल्य अधिक प्रचलित है।

विश्लेषण सारणी (Analysis Table)

कालम	अधिकतम आवृत्ति वाले मदों के मूल्य						
अ			15			18	
ब						18	19
स			15	16			
द	13	14	15				
आ		14	15	16			
इ			15	16	17		
योग	1	2	5	3	1	2	1

विश्लेषण सारणी से यह स्पष्ट है कि 15 का मूल्य सर्वाधिक बार (5) आया है अतः 15 ही भूयिष्ठक है। यदि हम सारणी (कालम अ) को ध्यान से देखें तो पता चलेगा कि 15 तथा 18 दोनों मूल्यों की आवृत्ति 51 है परन्तु 15 के पहले तथा बाद के मूल्यों की आवृत्ति भी 51 के समीप ही अर्थात् 48 और 50 है जबकि 18 के पूर्व तथा बाद के मूल्यों की आवृत्तियाँ क्रमशः 43 और 49 हैं जो 51 से अधिक दूर हैं। अतः सामान्य बुद्धि से भी यदि देखा जाय तो भूयिष्ठक 15 ही है।

भूयिष्ठक की परिभाषा देखने से ज्ञात होता है कि उस मूल्य को भूयिष्ठक कहा जाता है जिसकी आवृत्ति दी हुई श्रेणी (series) में सबसे अधिक हो। हमें यह भली-भाँति ज्ञात है कि व्यक्तिगत श्रेणी में प्रत्येक मूल्य की आवृत्ति बराबर (एक) होती है, इसमें एक भी मूल्य ऐसा नहीं होता जिसकी आवृत्ति एक से अधिक हो। अतः व्यक्तिगत श्रेणी में भूयिष्ठक नहीं होता है। यदि प्रश्न व्यक्तिगत श्रेणी में दिया गया हो तो भूयिष्ठक निकालने के लिए यह आवश्यक है कि पहिले उस व्यक्तिगत श्रेणी को खण्डित या सतत श्रेणी में परिवर्तित किया जाय तभी यह ज्ञात हो सकेगा कि कौन से मूल्य की आवृत्ति सबसे अधिक है।

यह याद रखना नितान्त आवश्यक है कि समूहन (grouping) केवल आवृत्तियों का ही होता है, मूल्यों का नहीं।

संतत श्रेणी में भूयिष्ठक निकालना —यदि श्रेणी सतत हो तो भूयिष्ठक किसी वर्गान्तर (Class interval) में होगा। वर्गान्तर में भूयिष्ठक ज्ञात करने के लिये निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है।

$$z = l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot i \right) \text{(ignoring minus signs)*}$$

जबकि z = Mode या भूयिष्ठक

Δ = delta capital अन्तर

$\Delta_1 = (f_1 - f_0)$

*उपरोक्त सूत्र में Δ अन्तर निकालते समय ऋणात्मक (minus) चिन्ह का ध्यान नहीं रखना चाहिए, जैसे $(5-8) = -3$ न मानकर 3 ही माना जाना चाहिए और $(8-5)$ = भी 3 ही माना जाना चाहिए।

$\Delta_2 = (f_1 - f_2)$

f_1 = frequency of the modal group
भूयिष्ठक वर्ग की आवृत्ति

f_2 = frequency of the group succeeding the modal one भूयिष्ठक वर्ग से अगले वर्ग की आवृत्ति

f_0 = frequency of the group preceding the modal one भूयिष्ठक वर्ग से पहले वग की आवृत्ति

$i = (l_2 - l_1)$ interval or magnitude वर्ग विस्तार

l_1 तथा l_2 = lower and upper limits of the class interval in which Mode lies भूयिष्ठक वर्ग की अपर तथा अवर सीमाए

नीचे के उदाहरणो से इस सूत्र का प्रयोग स्पष्ट होगा ।

उदाहरण न० 82

एक उद्योग मे विभिन्न इकाइयों के लाभ सम्बन्धी अङ्क निम्नलिखित हैं । उनका भूयिष्ठक ज्ञात कीजिये :—

लाभ (हजार रु० में)	3 – 4	4 – 5	5 – 6	6 – 7	7 – 8	8 – 9	9-10
आवृत्ति	3	7	22	60	85	32	9

हल :—

1	2						3	
लाभ (हजार रु० में)	आवृत्ति (Frequency)						सबसे अधिक आवृत्ति के वर्गान्तर की सख्या	
	अ	ब	स	द	आ	ई		
3 – 4	3	10						0
4 – 5	7		29	32				0
5 – 6	22	82			89		I	1
6 – 7	$f_0$60		145			167	III	3
7 – 8	$f_1$85	117		177			HHH I	6
8 – 9	$f_2$32		41		126		III	3
9 – 10	9						I	1

विश्लेषण सारणी

कालम	अधिकतम आवृत्ति वाले वर्गान्तर				
अ			7 – 8		
ब			7 – 8	8 – 9	
स		6 – 7	7 – 8		
द		6 – 7	7 – 8	8 – 9	
आ			7 – 8	8 – 9	9 – 10
ई	5 – 6	6 – 7	7 – 8		
योग	1	3	6	3	1

अलग से विश्लेषण सारणी बनाने के बजाय समूहन (grouping) वाली सारणी मे ही एक और खाना (न० 3) बढाने से भी हमारा काम चल सकता है। इसमे स्थान व समय की बचत होती है। इसकी रीति सरल है। 'अ' खाने मे सर्वाधिक आवृत्ति 85 है जिसका मूल्य (7 – 8) वर्गान्तर मे है। अत खाने 3 मे ठीक (7 – 8) वर्गान्तर के सामने मिलान तालिका (tally sheet की तरह) एक छोटी सी खडी रेखा खेंचिये। 'ब' खाने मे सर्वाधिक आवृत्ति 117 है जो 85 व 32 का योग है। 85 का मूल्य (7 – 8) वर्गान्तर मे और 32 का मूल्य (8 – 9) वर्गान्तर है। अत इन दोनो वर्गान्तरो के सामने तीसरे खाने मे एक-एक छोटी सी रेखा और खेंच दीजिए। इसी प्रकार 'द' खाने मे सर्वाधिक आवृत्ति 177 है जो 60, 85 व 32 का योग है। इनके मूल्य क्रमश (7 – 8), (8 – 9) व (9 – 10) वर्गान्तरो मे हैं। अत इन तीनो वर्गान्तरो के ठीक सामने तीसरे खाने में एक-एक छोटी सी खडी रेखा और खेंच दीजिये। इस प्रकार से प्रत्येक आवृत्ति के खाने में सर्वाधिक आवृत्ति वाले वर्गान्तर या वर्गान्तरों के सामने तीसरे खाने मे खडी रेखाएं खेंच डालिए। यदि तीसरे खाने मे किसी वर्गान्तर के सामने चार से अधिक रेखाएं खेंचनी पडे तो पाचवी रेखा को खडी न खेंच कर चारो खडी रेखाओ को पाचवीं तिरछी रेखा (~~IIII~~) से काटिए। अब इन खडी रेखाओ को गिनकर इनका योग अगले खाने मे लिखिए। जिस वर्गान्तर के सामने सबसे अधिक रेखाए है, उसी वर्गान्तर मे भूयिष्ठक होता है। खडित श्रेणी मे भी जिस मूल्य के सामने सबसे अधिक रेखाए होती हैं वही मूल्य भूयिष्ठक होता है। यदि किसी खाने मे दो सर्वाधिक आवृत्तिया हो तो तीसरे खाने मे उन दोनो के मूल्यो या वर्गान्तरो के सामने खडी रेखाए खेंचनी चाहिए।

उपरोक्त विश्लेषण से यह स्पष्ट है कि भूयिष्ठक (7 – 8) वर्गान्तर मे स्थित है। देखने से भी पता चलता है कि (7 – 8) वर्गान्तर की आवृत्ति सबसे अधिक है और कोई दूसरा वर्ग तुलना मे नही है। अत अब सूत्र के द्वारा भूयिष्ठक का निश्चित अनुमान (अन्तर्गणन) करेगे।

$$Z = l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\, i\right)$$ [ऋणात्मक चिन्ह का ध्यान न रखते हुए]

$\Delta_1 = (85 - 60) = 25$

$\Delta_2 = (85 - 32) = 53$

$i = (8 - 7) = 1$

$$= 7 + \left(\frac{25}{25 + 53} \times 1\right)$$

$$= 7 + \frac{25}{78}$$

$= 7 + .32$

$= 7{\cdot}32$ हजार रुपए

सम्मिलित श्रेणी (inclusive series) में भूयिष्ठक निकालना — सम्मिलित श्रेणी में भूयिष्ठक निकालने के लिए भी उपरोक्त सूत्र का ही प्रयोग किया जाता है।

उदाहरण नं० 82

निम्न तालिका से भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए।

लम्बाई (इंचों में)	आवृत्ति
45 - 49	2
50 - 54	10
55 - 59	55
60 - 64	(f_0) 21
65 - 69	(f_1) 57
70 - 74	(f_2) 32
75 - 79	5

उपरोक्त तालिका में यह स्पष्ट ही है कि (65 – 69) वर्गान्तर की आवृत्ति ही सर्वाधिक है और उसके पूर्व तथा बाद के वर्गों की आवृत्तियां भी पर्याप्त हैं जो (55–59) वर्गान्तर (जिसकी आवृत्ति 55 है) के पूर्व तथा बाद की आवृत्तियों से अधिक है। अतः भूयिष्ठक (65–69) वर्गान्तर में ही है।

$$\text{अतः मू० } (z) = l_1 + \left[\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} . i\right]$$

[ऋणात्मक चिन्ह का ध्यान न रखते हुए]

$\Delta_1 = (57 - 21) = 36$

$\Delta_2 = (57 - 32) = 25$

$$= 64{\cdot}5 + \left[\frac{36}{36 + 25} \times 5\right]$$

$= 64{\cdot}5 + 2{\cdot}95$

$= 67{\cdot}45$ इंच

उपरोक्त उदाहरण मे भी पहले बतलाये गये कारणो से (65–69) वर्ग की अधर सीमा 64 5 ली गई है तथा वर्गान्तर विस्तार 5 लिया गया है ।

कभी कभी कोई श्रेणी या शृ खला ऐसी भी हो सकती है जिसमे एक से अधिक भूयिष्ठक हो, ऐसी स्थिति उपस्थित होने पर तुलना के लिए दूसरे माध्यो का प्रयोग करना अधिक सरल एव बोध-गम्य रहता है । भूयिष्ठक का निश्चित् अनुमान लगाना सरल नही है ।

यदि श्रेणी (series) में आवृत्ति का बटन (distribution) सममित (symmetrical) हो या थोडी सी ही विषमता (skewness) हो [देखिए अध्याय 10] तो सर्वाधिक आवृत्ति वाले वर्गान्तर मे ही भूयिष्ठक होता है । ऐसी स्थिति मे आवृत्तियो के समूहन (grouping करने की कोई आवश्यकता नही होती । परन्तु कभी कभी श्रेणी मे आवृत्ति का बटन ऐसा होता है कि भूयिष्ठक वास्तव मे उस वर्गान्तर मे नही होता जिसमे देखने से मालूम होता है । ऐसी परिस्थिति मे समूहन करके ही ठीक वर्गान्तर ज्ञात करना आवश्यक है । विद्यार्थियो को भूयिष्ठक के प्रत्येक प्रश्न में आवृत्तियो का समूहन करके ही वह वर्गान्तर मालूम करना चाहिए जिसमे भूयिष्ठक है अन्यथा गलती हो सकती है, जैसे निम्न उदाहरण से स्पष्ट होगा कि देखने से तो भूयिष्ठक का वर्गान्तर (35 – 40) लगता है परन्तु समूहन करने पर मालूम होता है कि भूयिष्ठक का वर्गान्तर वास्तव मे (40 – 45) है ।

उदाहरण न० 8 4

निम्न तालिका मे दिए गए अङ्को मे भूयिष्ठक ज्ञात कीजिए —

उम्र	व्यक्ति
20 - 25	5
25 - 30	7
30 - 35	8
35 - 40	18
40 - 45	15
45 - 50	12
50 - 55	7
55 - 60	5

हल —

1	2						3	
उम्र	आवृत्ति						सबसे अधिक आवृति के वर्गान्तर की सख्या	
	क	ख	ग	घ	ङ	च		
20 - 25	5							
25 - 30	7	12		20				
30 - 35	8		15		33		I	1
35 - 40	18 (f_0)	26				41	IIII	4
40 - 45	15 (f_1)		33				IIII	5
45 - 50	12 (f_2)	27		45			III	3
50 - 55	7		19		34			1
55 - 60	5	12						

भू० (40 – 45) वर्गान्तर मे है ।

$$Z = l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} . i \right) \text{ (ignoring minus signs)}$$

$$\Delta_1 = (15 - 18) = 3, \; \Delta_2 = (15 - 12) = 3$$

$$= 40 + \left(\frac{3}{3+3} \times 5 \right)$$

$$= 40 + 2 \cdot 5$$

$$= 42 \cdot 5 \text{ वर्ष}$$

उदाहरण न० 8 5

निम्न तालिका मे दिए गये अङ्को मे भूयिष्ठक ज्ञात कीजिये —

उम्र (वर्षो मे)	व्यक्ति
55 - 60	6
50 - 55	7
45 - 50	12
40 - 45	15
35 - 40	18
30 - 35	10
25 - 30	7
20 - 25	5

हल —

1	2						3	
उम्र (वर्षो में)	आ वृ त्ति						सबसे अधिक आवृत्ति के वर्गान्तर की सख्या	
	क	ख	ग	घ	ङ	च		
55 – 60	6							
50 – 55	7	13	19	25				
45 – 50	12				34		I	1
40 – 45	15(f_0)	27				45	III	3
35 – 40	18(f_1)		33				IIII I	6
30 – 35	10(f_2)	28		43			III	3
25 – 30	7		17		35	22	I	1
20 – 25	5	12						

भू० (35 – 40) वर्गान्तर में है ।

उपरोक्त प्रश्न मे मूल्य अवरोही क्रम (descending order) में दिये गए है । अत सूत्र मे निम्न परिवर्तन हो जायगा ।

[कोष्ठक मे दिये गए मूल्य l_2 में से घटा दिए जाये गे]

$$Z = l_2 - \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} . i \right) \text{ [ऋणात्मक चिन्ह का ध्यान न रखते हुए]}$$

$$\triangle_1 = (f_1 - f_0) = (18 - 15) = 3$$
$$\triangle_2 = (f_1 - f_2) = (18 - 10) = 8$$
$$= 40 - \left(\frac{3}{3 + 8} \times 5\right)$$
$$= 40 - 1\ 36$$
$$= 38\ 64 \text{ वर्ष}$$

उदाहरण न० 8·6

निम्न तालिका मे दिये गए अङ्को का भूयिष्ठक निकालिये —

central size of the item मध्य मूल्य	frequency आवृत्ति
1	2
2	9
3	11
4	14
5	20
6	24
7	20
8	16
9	5
10	2

हल :—

उपरोक्त श्रेणी देखने मे खडित श्रेणी लगती है, लेकिन वास्तव मे ऐसी बात नही है। मूल्य मध्य बिन्दुओ (central size) मे दिए हुए हैं। मध्य–बिन्दु केवल संतत श्रेणी मे ही होते हैं। अत उपरोक्त श्रेणी सतत श्रेणी है जिसके वर्गान्तर निम्न प्रकार होंगे।

1 size मूल्य	2 आवृत्ति						3 सबसे अधिक आवृत्ति के वर्गान्तर की सख्या	
	क	ख	ग	घ	ङ	च		
05 – 15	2	11		22				
15 – 25	9		20		34			
25 – 35	11	25				45		
35 – 45	14		34	58			I	1
4·5 – 55	20(f_0)	44			64		III	3
55 – 65	24(f_1)		44			60	~~IIII~~ I	6
65 – 75	20(f_2)	36		41			III	3
75 – 85	16		21		23		I	1
85 – 95	5	7						
95 – 105	2							

भू० (55 – 6.5) वर्गान्तर मे है।

$$Z = l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} \cdot i\right)$$ [ऋणात्मक चिन्हो का ध्यान न रखते हुए]

$$\Delta_1 = [24 - 20] = 4,\ \Delta_2 = [24 - 20] = 4$$

$$= 5\,5 + \left(\frac{4}{4+4} \times 1\right)$$

$$= 5\,5 + .5$$

$$= 6$$

भूयिष्ठक के लाभ.—(1) मध्यका (Median) की भाति भूयिष्ठक भी बहुधा केवल दृष्टि मात्रा से ही ज्ञात हो जाता है परन्तु यह स्मरण रखना चाहिये कि यह *केवल खडित श्रेणी (Discrete Series) मे ही सम्भव है।*

(2) खडित माला मे तो भूयिष्ठक वास्तविक मदो के मूल्यो में से एक होता है परन्तु सतत माला मे भी यह सब से प्रचलित मद का मूल्य है और इसलिये तथ्याको का सर्वाधिक प्रतिनिधित्व करता है। समान्तर मध्यक मे उपरोक्त दोनो गुण नही रहते।

(3) भूयिष्ठक निकालने के लिये भी सब मदो की जानकारी की आवश्यकता नही रहती, केवल भूयिष्ठक वर्गान्तर के आस-पास की आवृत्तिया ज्ञात होनी चाहियें।

(4) सतत श्रेणी में मध्यका की भाति भूयिष्ठक भी ज्ञात किया जा सकता हैं केवल वर्गान्तरों का विस्तार समान होना चाहिये और उनकी असली सीमाए ज्ञात होनी चाहियें। व्यावहारिक जीवन में वर्गान्तरो का विस्तार समान ही रखा जाता है और इसीलिए भूयिष्ठक का महत्व काफी अधिक है।

(5) भूयिष्ठक सामान्य व्यक्ति द्वारा भी बोधगम्य है क्योकि भूयिष्ठ मजदूरी (modal wage), भूयिष्ठ खर्चे (modal expenses) भूयिष्ठ विद्यार्थी (modal student) से तात्पर्य समझना सर्वथा आसान है।

भूयिष्ठक की कमिया (1) *भूयिष्ठक का निश्चित अनुमान लगाना असम्भव है।* अलग अलग सूत्रो द्वारा निकाले गए भूयिष्ठको में अन्तर होता है अत. गणितीय विधि के प्रयोग द्वारा भी भूयिष्ठक का निश्चित अनुमान नहीं हो सकता।

(2) भूयिष्ठक भी क्रमबद्ध अ कों में ही ज्ञात किया जा सकता है। यदि वर्गान्तर नियमित नही हो तो बहुधा परिणाम भ्रामक ही निकलते हैं।

(3) कभी-कभी एक ही श्रेणी मे स्पष्टतया दो भूयिष्ठक दृष्टिगोचर होते है। ऐसी स्थिति में वास्तविक प्रतिनिधि कौनसा है यह तय करना कठिन है।

(4) भूयिष्ठक वास्तव में सारे अ क समूह के थोडे से अ को का ही प्रतिनिधित्व करता है, जैसे कि यदि 50 विद्यार्थियो में से 5 विद्यार्थियों का खर्च 70 रु० प्रति मास हो और शेष का भिन्न हो तो भी भूयिष्ठक 70 रु० हो सकता हैं। अत यह कहना सदा *सत्य नही कि भूयिष्ठक सब अ को का प्रतिनिधि है।*

भूयिष्ठक का महत्व —क्योकि भूयिष्ठक सर्वाधिक मूल्य वाला मद होता है ., उद्योगों में इसका बहुत महत्व है। प्रजातन्त्र के युग में बहुमत के आधार पर ही

प्रतिनिधि का चुनाव होता है। जब एक भूयिष्ठ-मशीन या श्रमिक (modal machine or modal labourer) मालूम हो जाता है तो उद्योगपति वैसी ही अधिक मशीनें लगाने का प्रयत्न करता है ताकि उसे अधिक से अधिक लाभ हो सके। ऐसी मशीनें जो भूयिष्ठ मशीन से कम उत्पादन देती हैं उनमे उचित सुधार की व्यवस्था की जाती है या यथासम्भव उन्हे बदल दिया जाता है। इसके अतिरिक्त कम उत्पादन देने वाली मशीनो के श्रमिको की ओर भी उत्पादक का ध्यान आकर्षित हो जाता है।

इसी प्रकार जलवायु विभाग (meteorological department) भी तापमान, वर्षा, वायु-गति आदि के आधार पर प्रत्येक क्षेत्र में भूयिष्ठ-स्थानो का निर्धारण कर लेता है और कुछ भूयिष्ठ स्थान ही सारे देश के जलवायु आदि की तुलना मे बहुत सहायक होते हैं।

भूयिष्ठक श्रमिको की कुशलता मे वृद्धि करने मे सहायक होता है क्योकि जलवायु तथा वातावरण के अनुसार भिन्न भिन्न स्थानो मे भूयिष्ठ श्रमिक (modal labourer) द्वारा किये हुए काम का निश्चय हो जाता है और जहा उत्पादन कम है वहा उसके कारण जानकर स्थितियो मे सुधार किया जाता है जिसका परिणाम यह होता है कि उत्पादन बढने लगता है। इस प्रकार भूयिष्ठक का व्यावहारिक जीवन मे यथेष्ट महत्व है।

भूयिष्ठक, मध्यका तथा समान्तर मध्यक का सम्बन्ध—एक सम श्रेणी (Symmetrical Series) मे भूयिष्ठक, मध्यका तथा समान्तर मध्यक सदा समान होगे। एक असम (assymmetrical) श्रेणी मे भी समान्तर मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक का सम्बन्ध रहता है। मध्यका, समान्तर मध्यक तथा भूयिष्ठक के बीच मे स्थित रहता है ऐसी स्थिति मे इन तीनो का निम्न लिखित सम्बन्ध रहता है—

भूयिष्ठक = समान्तर मध्यक − 3 (समान्तर मध्यक − मध्यका) इस प्रकार यह प्रकट है कि मध्यका समान्तर मध्यक के समीप तथा भूयिष्ठक से दूर रहता है। मध्यका, समान्तर मध्यक तथा भूयिष्ठक के कुल अन्तर के तिहाई भाग से, समान्तर मध्यक से भूयिष्ठक की ओर फैला हुआ होता है। श्री यूल तथा केडाल के अनुसार मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक क्रमश अधिक मूल्य वाले होते हैं अर्थात् सबसे कम मूल्य समान्तर मध्यक का, उससे अधिक मध्यका का तथा सबसे अधिक भूयिष्ठक का होना है अर्थात् $\bar{X} \angle M \angle Z$ (स. म. ∠ मध्यका ∠ भू०)। इन तीनो मे एक और सम्बन्ध स्थापित किया जा सकता है (मध्यका − भूयिष्ठक) = $\frac{2}{3}$ (समान्तर-मध्यक−भूयिष्ठक,), इस सम्बन्ध के द्वारा हमे कोई से दो मध्यको का मूल्य ज्ञात होने पर तीसरा निकालने मे सुविधा होती है और व्यर्थ के हिसाब से बचा जा सकता है।

५ गुणोत्तर मध्यक (Geometric Mean)

जब सख्याओ के मूल्य मे अन्तर बहुत अधिक हो तो समान्तर मध्यक, मध्यका अथवा अन्य कोई माध्य ठीक परिणाम नही दे सकते क्योकि समान्तर-मध्यक मे तो बहुत बडे मदो को अधिक महत्व प्राप्त होता है और मध्यका तथा भूयिष्ठक मे उनको बहुत कम महत्व मिलता है अत इन सबसे यथेष्ट शुद्ध परिणाम नही निकल सकते। उदाहरणत यदि 5 व्यक्तियो की आय क्रमश 1, 4, 5, 50 तथा 100 रु० हो और

औसत आय निकालनी हो तो 160–5 अर्थात् 32 रु० होगी और मध्यका केवल 5 रुपये। स्पष्ट है कि दोनो ही प्रतिनिधि मूल्य नही है। ऐसी स्थिति मे सर्वाधिक उपयुक्त औसत गुणोत्तम मध्यक (Geometric) होगी जो 10 रु० है। गुणोत्तर मध्यक निकालने की प्रणाली यह है कि जितनी सख्याए हैं उन सब को गुणा कर, प्राप्त होने वाली सख्या का उतनेवा मूल (root) निकाल लिया जाय। उत्तर में जो रकम प्राप्त होगी वही गुणोत्तर मध्यक होगी।

प्रस्तुत उदाहरण में 1×4×5×50×100 का 5 वा मूल निकालेंगे क्योकि सख्याए 5 है अत गुणोत्तर मध्यक होगा $\sqrt[5]{1 \times 4 \times 5 \times 50 \times 100}$ अर्थात् $\sqrt[5]{100000} = 10$ रु०। इसी प्रकार 2 और 8 का गु० मध्यक ($\sqrt[2]{2 \times 8}$) = 4 और 3, 4 व 18 का गु० म० ($\sqrt[3]{3 \times 4 \times 18}$) 6 होगा।

परन्तु कई बार मदो की सख्याए बहुत होती है और उनका विस्तार भी अधिक होता है ऐसी परिस्थिति में उनके गुणा करने तथा मूल (root) निकालने मे बहुत कठिनाई होगी अत एक सरल रीति अपनाई जाती है। वह रीति -यह है कि प्रत्येक सख्या का लघु-गुणक (Logarithm) लेकर उस सख्या के सामने एक अलग स्तम्भ (Column) में लिखते जाते हैं। अन्त म सब लघु गुणको का जोड लगा कर मदो की सख्या से विभाजित कर देते हैं, जो परिणाम आता है उसका प्रति लघु-गुणक (anti logarithm) निकाल लेते हैं। यही गुणोत्तर मध्यक है।

व्यक्तिगत श्रेणी में गु० म० निकालना (To find geometric mean in individual series)

उदाहरण न० 8 7

एक मकान मे रहने वाले 10 व्यक्तियो की आय निम्नलिखित है।

रु० 8, 15, 78, 95, 125, 322, 1,215, 4,298, 10,000, 1,03490। गुणोत्तर मध्यक निकालिये।

आय (रु० मे) x	लघु गुणक* logarithms (logs)
8	0 90309
15	1 17609
78	1 89209
95	1 97772
125	2 09691
322	2 50786
1,215	3 08456
4,298	3 63328
10,000	4 00000
1,03,490	5 01492
N=10	26,28652 Σ log x

*लघु-गुणक निकालने की रीति को परिशिष्ट में देखिए।

$$\text{गु० म० } (g) = A\ L\ \left(\frac{\log x_1 + \log x_2 + \log x_3 + \ldots \log x_n}{N}\right)$$

$$= A\ L\left(\frac{\Sigma \log x}{N}\right)$$

$$= A\ L\left(\frac{26.28562}{10}\right)$$

$$= A\ L\ (2.628652)$$

$$= 425.2509$$

गुणोत्तर मध्यक = 425 रु० 25 नये पैसे

भारित गुणोत्तर मध्यक निकालना —भारित गुणोत्तर मध्यक निकालने मे पहले तो दिये हुए मूल्यो के लघु गुणक निकाल लेते है फिर लघु गुणकों को क्रमशः महत्वो के भार (weights) से गुणा कर लेते है। अन्त मे गुणनफल [products] के योग की औसत का प्रति लघु गुणक [antilogarithm] निकाल लेते है। यही भारित गुणोत्तर मध्यक [weighted g m] है। नीचे के उदाहरण मे भारित गुणोत्तर मध्यक निकालने की रीति स्पष्ट की गई है।

उदाहरण 8 8

एक नगर के 25 होटलो में चाय की मासिक खपत का ब्यौरा निम्न प्रकार है। गुणोत्तर मध्यक द्वारा चाय की प्रति होटल औसत मासिक खपत निकालिये।

चाय की खपत (पौंडो मे)	10	11	12	13	14	15	16	17
होटलो की सख्या	2	3	5	6	4	2	2	1

हल.—

1 चाय की खपत (पौंडो में) x	2 होटलो की सख्या	3 मूल्यो के लघु गुणक logs	4 भारित लघु गुणक (2 × 3)
10	2	1 00000	2 00000
11	3	1 04139	3 12417
12	5	1 07918	5 39590
13	6	1 11394	6 68364
14	4	1 14613	4 58452
15	2	1 17609	2 35218
16	2	1 20412	2 40824
17	1	1 23045	1 23045

भारित गुणोत्तर मध्यक (g') $= A.L\left\{\frac{\Sigma (w \log x)}{N}\right\}$

$= A\ L\left(\frac{27.77910}{25}\right)$

$= 1\ 111164$

$= 12\ 9169$

भारित गुणोत्तर मध्यक (g') = 12.92 पौंड

संतत श्रेणी मे गुणोत्तर मध्यक निकालना—*सतत श्रेणी मे गुणोत्तर* मध्यक निकालने के लिए वर्गान्तर का मध्य विन्दु लेकर उसका लघु-गुणक निकाल लिया जाता है तथा उसे आवृत्ति से गुणा कर जोड लगा लिया जाता है। योग को आवृत्ति के योग से भाग देकर औसत लघु गुणक प्राप्त कर लेते हैं। प्राप्त सख्या का प्रति लघु-गुणक ही गुणोत्तर मध्यक होगा।

उदाहरण 8 9

भारत के एक राज्य के विभिन्न नगरो मे स्थित मन्दिरो की सख्या निम्नलिखित सारणी मे दी गई है। गुणोत्तर मध्यक द्वारा प्रति नगर मदिरो की औसत निकालिए।

मदिरो की सख्या	0–5	5–10	10–15	15–20	20–25	25–30
नगर	22	94	221	85	67	39

हल—

1 मदिरो की सख्या	2 मध्य विन्दु x	3 आवृत्ति (नगर) f	4 मूल्यो के लघु गुणक logs	5 (3 × 4) $f \log x$
0–5	2 5	22	0 39794	8 75468
5–10	7 5	94	0 87506	82 25564
10–15	12 5	221	1 09691	242 41711
15–20	17 5	85	1 24304	105 65840
20–25	22 5	67	1 35218	90 59606
25–30	27 5	39	1 43933	56 13387
		528 N		585 81576 $\Sigma (f. \log x)$

गुणोत्तर मध्यक (g) $= A\ L\ \left\{\frac{\Sigma(f\ \log\ x)}{N}\right\}$

$= A\ L\ \left(\frac{585\ 81576}{528}\right)$

$= A\ L\ 1\ 10949$

$= 12\ 868$

गु० म० $(g) = 12.87$ मन्दिर

अर्थात् $= 13$ मन्दिर प्रति नगर

गुणोत्तर मध्यक की विशेषताए —गुणोत्तर मध्यक मे बहुत गुणा का कार्य लम्बा हो जाता है। ऐसी स्थिति मे लघु गुणकों का प्रयोग करना अनिवार्य हो जाता है जिनके शुद्ध आकलन [Calculation] के लिए गणित सम्बन्धी ज्ञान होना आवश्यक है। गुणोत्तर मध्यक सदा समान्तर मध्यक से कम होती है क्योंकि इस पर बहुत बड़े अथवा बहुत छोटे मदों के मूल्यों का प्रभाव अधिक नही पड़ता। श्री किंग के शब्दो मे गुणोत्तर मध्यक साधारणतया मध्यक तथा समान्तर मध्यक के बीच मे स्थित रहती है। गुणोत्तर मध्यक मे गणितीय कार्य बहुत है तथा सामान्य व्यक्ति इसका उपयोग नही कर सकता।

गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग वहा करना अनिवार्य है जहा मदो के मूल्यो मे बहुत अधिक भिन्नता रहती है। यह कम मूल्य वाले मदो को यथेष्ट महत्व देती है और जहाँ बड़े मदो के मूल्यो का महत्व कम करना होता है वहा इसका प्रयोग किया जाता है। उपरोक्त सभी गुणों के अतिरिक्त गुणोत्तर मध्यक मे बीज गणितीय रीतियों का प्रयोग सरलता से हो सकता है। निर्देशांकों (Index Numbers) मे भी गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग किया जाता है (देखिए अध्याय 12)। सापेक्षिक तुलना करने मे गु० म० सर्वोत्तम है। यदि दो या अधिक चरों [variales] के अनुपातों की तुलना करनी हो तो गु० म० ठीक फल देती है। जनसंख्या की वृद्धि की दर या ब्याज दर मालूम करने के लिए भी गु० म० का प्रयोग किया जाता है।

नीचे गुणोत्तर मध्यक के गुण दोष संक्षेप मे दिये जाते हैं।

गुणोत्तर मध्यक के गुण —

(1) यह निश्चित होती है।

(2) यह तमाम मदो के मूल्यो के आधार पर निकाली जाती है। समान्तर मध्यक की भांति यदि कुछ मूल्य उपलब्ध नही हों तो गुणोत्तर मध्यक भी नही निकाली जा सकती।

(3) इसमे बीजगणितीय प्रयोग हो सकते हैं।

(4) इस पर बहुत बड़े तथा बहुत छोटे मदो के मूल्य विशेष प्रभाव नही डालते साधारणतया यह छोटे मदों को अधिक महत्व देती है, इस प्रकार एक बहुत बड़ा मूल्य गुणोत्तर मध्यक को बहुत ऊंचा नही ले जा सकता।

कमियां —

(1) गुणोत्तर मध्यक निकालना तथा समझना सरल नही है।

(2) यदि श्रेणी मे कोई मूल्य शून्य (zero) या ऋणात्मक चिन्ह वाला है तो गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग नही किया जा सकता।

(3) गुणोत्तर मध्यक भी सामान्यतया ऐसी संख्या होती है जो मूल्यो मे से एक नही है बल्कि अलग ही निकलती है।

(4) जहा बडे मूल्य वाले मदो को अधिक या समान महत्व देना हो तो वहा गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग नही किया जा सकता ।

(5) यह लघु गुणकों की सहायता बिना नही निकाली जा सकती ।

उदाहरण 8 10

प्रश्न—एक छोटे शहर की जनसख्या सन् 1890 मे 1950 थी। वह सन् 1940 में बढ कर 3,467 हो जाता है । वृद्धि की वार्षिक प्रतिशत दर निकालिये ।

हल —

उपरोक्त प्रश्न के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है —

$P_n = P_o \ (1+r)n$

जबकि,

P_n = जनसख्या अवधी के अन्त में (1940 में)

P_o = जनसख्या अवधि के शुरू में (1890 मे)

r = दर

n = अवधि मे अन्तर (1940-1890) = 50

$$r = \sqrt[N]{\frac{Pn}{Po}} - 1$$

$$= \sqrt[50]{\frac{3467}{1950}} - 1$$

$$= \left\{ A \ L \quad \frac{(\log 3467 - \log.1950)}{50} \right\}$$

$$= \left\{ A. L \quad \frac{(3\ 5403 - 3\ 2900)}{50} \right\}$$

$$= \left(A \ L \quad \frac{0\ 2503}{50} \right) - 1$$

$$= 1\ 012 - 1$$

$$= 012$$

प्रतिशत वृद्वि = 012 × 100 = 1 2 %

उदाहरण ८ ११

प्रश्न—सन् 1955 के शुरू मे 10,000 रुपए बैंक मे ब्याज पर जमा करने पर बढ कर सन् 1959 के अन्त मे 19,294 रुपए हो जाते हैं ब्या की औसत वार्षिक प्रतिशत दर निकालिए ।

हल —

$$\text{सूत्र—} r = \sqrt[N]{\frac{Pn}{Pn}} - 1$$

$$= \sqrt[5]{\frac{12264}{10000}} - 1$$

$$= \left\{ A\ L\ \frac{(\log 12294 - \log 1000)}{5} \right\} - 1$$

$$= \left(A\ L\ \frac{(4\,08969 - 4\,0000)}{5} \right) - 1$$

$$= \left(A\ L.\ \frac{01794)}{5} \right) - 1$$

$$= (A\ L\ 01794) - 1$$

$$= 1\,0400 - 1$$

$$= 0422$$

वार्षिक दर $= 6422 \times 100$

$= 6\,22\ \%$

हरात्मक मध्यक (Harmonic Mean)

कभी कभी मूल्य क्विटल, मीटर, घटो आदि मे न देकर उलटे दिये हुए रहते हैं, जैसे एक रुपये का 16 किलोग्राम नमक, एक रुपये का दो मीटर कपडा, 10 मिनट मे एक किलोमीटर आदि। ऐसी स्थिति मे औसत निकालने के लिए अ को को उलटना पडता है और इन्हे जोड कर औसत निकालनी पडती है। इस प्रकार की मध्यक को हरात्मक मध्यक (Harmonic Mean) या h कहते हैं।

हरात्मक मध्यक निकालने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है—

$$= \text{Reciprocal} \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \quad \frac{1}{xn}}{N} \right)$$

या $\text{Reciprocal} \left(\frac{\text{Reciprocal}\ \Sigma x}{N} \right)$ (व्यक्तिगत श्रेणी मे)

खण्डित श्रेणी या सतत श्रेणी मे सूत्र का निम्न रूप हो जाता है—

$$h = \text{Reciprocal} \left(\frac{\Sigma\ (f\ \ \text{Reciprocal}\ x)}{N} \right)$$

जब कि,

h = हरात्मक मध्यक

Reciprocal = व्युत्क्रम (उल्टी सख्या)

[अन्त मे दी हुई तालिकाए देखिए]

x = मदो के मूल्य

N = मदो की सख्या (Σf)

उदाहरण 8 12

निम्नलिखित सख्याओ का हरात्मक मान निकालिये ।

3, 4 5, 200, 05, 1450, 1 1,48, तथा 3 5

मद x	व्युत्क्रम (Reciprocal
3	3333
4 5	2222
200	0050
05	20 0000
1450	0007
1 1	9091
48	0208
3 5	2857
8N	21 7768 Σ (Reciprocal x)

$$\text{हरात्मक मध्यक (h)} = \text{Reciprocal}\left(\frac{\Sigma \text{ Reciprocal } x}{N}\right)$$

$$= \text{व्युत्क्रम } \frac{21{\cdot}7768}{8}$$

$$= \text{व्युत्क्रम } 2\ 7221$$

$$= .3676$$

भारित हरात्मक मध्यक (Weighted Harmonic Mean) –हरात्मक मध्यक भारित भी हो सकती है । भारित हरात्मक मध्यक निकालने मे व्युत्क्रमो [1] (Reciprocals) को क्रमश मदों के भारो से गुणा किया जाता है और उनके योग को भारो के योग से भाग देकर फिर व्युत्क्रम निकाल लिया जाता है ।

[1] व्युत्क्रम ऐसी सख्या है जिसे मद की सख्या से गुणा करने पर उत्तर 1 आए जैसे 1 का व्युत्क्रम 1 है । 45 का व्युत्क्रम $\frac{1}{45}$, 01 का व्युत्क्रम 100 तथा 1000 का व्युत्क्रम 001 होगा । इसके लिये अन्त में दी हुई तालिकाओ का प्रयोग कीजिये ।

उदाहरण न० 8 13

निम्नलिखित अङ्को का भारित हरात्मक मध्यक निकालिये।

मद . 40, 45, 132, 18, 75, 92

भार 2, 4, 3, 6, 5, 4

1 मद x	2 भार W	3 व्युत्क्रम Reciprocal	4 भार × व्युत्क्रम [2×3]
40	2	0250	0500
45	4	0222	0888
132	3	0076	0228
18	6	0556	3336
75	5	0133	0665
92	4	0109	0436
	Σ w = 24		6053 Σ (w. Reciprocal x)

$$\text{भारित हरात्मक मध्यक } (h') = \text{Reciprocal}\left[\frac{\Sigma (w. \text{ Rec } x)}{\Sigma w}\right]$$

$$= \text{व्युत्क्रम}\left(\frac{6053}{24}\right)$$

$$= \text{व्युत्क्रम } .0252$$

$$= 39\ 68$$

उपरोक्त दोनो उदाहरण स्पष्ट करते हैं कि हरात्मक मध्यक मे छोटे मदो के मूल्य का अधिक महत्व रहता है।

हरात्मक मध्यक का मुख्य प्रयोग दरो का औसत करने मे होता है और वह भी खास दरो मे और खास परिस्थितियो मे। हरात्मक मध्यक से 'समय व दूरी' 'समय व काय' मूल्यो के कथित मूल्य (quotations) आदि दरो का किन्ही विशेष परिस्थितयो मे औसत निकाला जाता है। इन्हे नीचे समझाया गया है।

ऐसे प्रश्नो में दरें निम्न प्रकार से दी हुई रहती हैं —

1. मील प्रति घटे—इसमे दूरी चल (variable) हैं और समय अचल Constant)

2 मिनट प्रति मील—इसमें समय चल है और दूरी अचल (Constant)

3 रुपये प्रति दर्जन—इसमे रुपए चल हैं और दर्जन अचल (Constant)

4 एक रुपए की 'क' इकाइया—इसमे इकाइया चल हैं और रुपया अचल

अत प्रत्येक प्रश्न मे दरो मे एक 'चल' (variable) होता है व दूसरा 'अचल' (Constant) भारित ह० म० निकालते समय निम्न बातो पर ध्यान देना चाहिए।

1 यह देखा जाता है कि दरों में क्या तो 'चल' है व क्या 'अचल'।

2 यह भी देखना होता है कि प्रश्न मे किसे 'चल' रखने को कहा गया है। (यह तथ्य प्रश्न की भाषा पढने से सरलता से ज्ञात हो जाता है)

3 अब जिसे दर में 'चल' रखा गया है और प्रश्न में भी उसे ही 'अचल' रखने को कहा गया है तो हरात्मक मध्यक निकालिए।

4 जिसे दर मे 'अचल' रखा गया है और प्रश्न में भी उसे ही 'अचल' रखने को कहा गया है तो *समान्तर मध्यक निकालिए।*

अर्थात् यदि उल्टी दर निकालनी हो तो हरात्मक मध्यक निकालिए और यदि एक सी ही दर निकालनी हो तो समान्तर मध्यक निकालिए।

निम्न उदाहरणों से यह स्पष्ट हो जाएगा।

उदाहरण 8 14

राम अपनी कार मे एक गैलन पेट्रोल मे 40 मील जाता है और महमूद एक गैलन पेट्रोल मे 30 मील की दूरी तय करता है। औसत मालूम कीजिए यदि (अ) प्रत्येक 120 मील *जाता है (ब) दोनों का पेट्रोल का कुल व्यय 2 गैलन (प्रत्येक) है।*

हल —

(अ) दरो मे गैलन 'अचल' (Constant) है व दूरी चल (variable) प्रश्न मे दूरी 'अचल' है क्योंकि दोनो बराबर दूरी तय करते हैं। अर्थात् दूरी दरों में 'चल' है व प्रश्न में 'अचल'। अत हरात्मक मध्यक निकालना होगा।

	मील	व्युत्क्रम
राम	40	0250
महमूद	30	0333
		0583 (Σ Reciprocal x)

= Reciprocal (0583–2)

= Reciprocal 0292

= 34 36 मील प्रति गैलन

(ब) प्रश्न में गैलन को 'अचल' रखने को कहा गया है, जबकि दर मे भी गैलन 'अचल' है, अत समान्तर मध्यक निकाला जाएगा।

$\therefore$ औसत चाल $= \dfrac{2(30+40)}{3} = 35$ मील प्रति घंटा

उदाहरण 8 15

एक चालक अपनी कार को पहिले 10 मील, 30 मील प्रति घन्टा की चाल से अगले 10 मील, 20 प्रति घन्टा की चाल से, और उससे भी अगले 10 मील, 40 मील प्रति घन्टे की चाल से चलाता है। औसत चाल (प्रतिघन्टा) ज्ञात कीजिये।

हल—

दर में समय 'अचल' व दूरी 'चल' है। प्रश्न में दूरी को 'अचल' रखा गया

है क्योंकि चालक हर बार 10–10 मील ही चलाता है। अत हरात्मक मध्यक निकालिए।

मील	व्युत्क्रम
30	·0333
20	0500
40	0250
	1083 (Σ Reciprocal x)

$$\therefore h = \text{Reciprocal}\left(\frac{1083}{3}\right)$$

= Reciprocal 0361

= 27 70 मील प्रति घन्टा

उदाहरण न॰ 8 16

एक व्यक्ति अपनी कार को तीन दिन तक निम्न समय और चाल मे चलाता है—

दिन	समय	चाल
प्रथम	10 घन्टे	45 मील प्रति घन्टा
द्वितीय	10 घन्टे	40 मील प्रति घन्टा
तृतीय	10 घन्टे	38 मील प्रति घन्टा

उसकी औसत चाल ज्ञात कीजिये।

हल —

दर मे समय 'अचल' व दूरी 'चल' है।

प्रश्न मे भी समय ही 'अचल' रखा गया है क्योंकि प्रति दिन कार 10 घन्टे चलाई जाती है। अत समान्तर मध्यक निकालिए।

$$\overline{X} = \frac{(45+40+38)}{5} = 41 \text{ मील प्रति घन्टा}$$

उदाहरण 8·17

राम एक कार्य को 5 दिन मे समाप्त कर सकता है, हाफिज उसे 10 दिन में पीटर 16 दिन में समाप्त कर सकते हैं। यदि तीनो बराबर बराबर दिन काम करें तो कितना औसत समय लगेगा।

हल —

दर मे कार्य 'अचल' व समय 'चल' है। प्रश्न मे समय को 'अचल' रखने को कहा गया है क्योंकि तीनो बराबर–बराबर दिन काम करेंगे। अत. हरात्मक मध्यक निकालिये।

दिन	व्युत्क्रम
5	.2000
10	1000
16	0625
	3625(Σ Reciprocal x)

$$h = \text{Reciprocal}\left(\frac{3625}{3}\right)$$

= Reciprocal .1208

= 8. 33 दिन

उदाहरण 8·18

एक व्यक्ति चार स्थानों से एक–एक सेर गाजर क्रमश: एक रुपये की 16 सेर 12 सेर, 10 सेर तथा 20 सेर की दर से खरीदता है। उसने प्रति रुपये औसत कितनी सेर गाजर खरीदी।

हल —

दर में रुपया 'अचल' व सेर 'चल' है प्रश्न में सेर अचल' रखा गया है क्योंकि प्रत्येक स्थान से वह एक–एक सेर गाजर ही खरीदता है, अत, हरात्मक मध्यक ज्ञात कीजिए।

सेर	व्युत्क्रम
16	0625
12	0833
10	1000
20	0500
	.2958 (Σ Reciprocal)

$$h = \text{Reciprocal}\left(\frac{.2958}{4}\right)$$

= Reciprocal 0739

= 13 53 सेर प्रति रुपया

दूसरा हल —

प्रथम सेर का मूल्य = $\frac{1}{16}$ रु०

द्वितीय सेर का मूल्य = $\frac{1}{12}$ रु०

तृतीय सेर का मूल्य = $\frac{1}{10}$ रु०

चतुर्थ सेर का मूल्य = $\frac{1}{20}$ रु०

चार सेर का मूल्य = $\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{12}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}\right)$

$= \frac{71}{240}$ रु०

एक सेर का मूल्य = $\frac{71}{240} \times \frac{1}{4} = \frac{71}{960}$ रु०

अत. एक रु० में औसत गाजर मिली = $\frac{960}{71}$ सेर

= 13·52 सेर

उपरोक्त उदाहरण में हमने देखा कि पहले सब अङ्कों को उलटा गया अर्थात् $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{13}$ आदि रूप रखकर जोड़ा गया तथा जोड़ने के बाद समान्तर मध्यक निकाल कर उसे फिर उल्टा गया। परिणाम स्वरूप हरात्मक मध्यक प्राप्त हो गई।

इसे एक सूत्र के रूप में इस प्रकार रख लेते हैं।

$$h = \text{Reciprocal} \left(\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \qquad \frac{1}{x}}{N} \right)$$

$$= \text{Reciprocal} \left(\frac{\Sigma \text{ Reciprocal } x}{N} \right)$$

h = harmonic mean हरात्मक मध्यक

Reciprocal = व्युत्क्रम या उल्टा मूल्य

$\frac{1}{X}$ = मदों के मूल्य

N = Number of items मदों की संख्या

उपरोक्त उदाहरण में हमने सब संख्याओं के उल्टे मूल्य लेकर जोड़ा, समान्तर मध्यक निकाला और फिर व्युत्क्रम निकाला। इसकी एक सरल रीति यह है कि प्रत्येक दी हुई संख्या के का मूल्य पहले ही व्युत्क्रम (Reciprocal) ले लिया जाय। सारे व्युत्क्रमों को जोड़ लिया जाय, उसकी औसत निकाल कर प्राप्त मूल्य का पुनः व्युत्क्रम ले लिया जाय। यही हरात्मक मान होगा।

उपरोक्त उदाहरण से यह स्पष्ट होता है कि हरात्मक मध्यक का प्रत्येक प्रश्न बिना व्युत्क्रम निकाले ही अवगणितीय रीति से भी हल किया जा सकता है।

समान्तर मध्यक, गुणोत्तर मध्यक व हरात्मक मध्यक में निम्न दर्जा पाया जाता है — ह० म० ≤ गु० म० ≤ स० म० [≤ = या से कम]

अन्य मध्यक — अन्य मध्यकों में वर्ग मध्यक (Quadratic Mean) तथा प्रगतिशील मध्यक (Progressive Mean) अधिक महत्वपूर्ण हैं।

वर्ग मध्यक — (Quadratic Mean) वर्ग मध्यक के अन्तर्गत सब मूल्यों के वर्ग निकाल कर उन्हें मदों की संख्या से भाग देकर उसका वर्गमूल निकाल लिया जाता है। इसे अंग्रेजी में Root Mean Square भी कहते हैं।

उदाहरण नं० 8.19

12, 13, 14, 15 16 और 17 का वर्ग मध्यक निकालिये ।

1 मद value x	2 वर्ग (square) x^2
12	144
13	169
14	196
15	225
16	256
17	289
6 N	1279 $\Sigma(x^2)$

$$\text{वर्ग मध्यक } (Q\ M) = \sqrt{\frac{\Sigma(x^2)}{N}} = \sqrt{\frac{1279}{6}} = \sqrt{213\ 16}$$

$$= 14\ 6$$

खंडित श्रेणी मे मूल्यो के वर्ग लेकर आवृत्ति से गुणा कर देते हैं और वर्गों के योग मे आवृत्तियो के योग का भाग देकर उसका वर्गमूल निकाल लेते हैं। सतत श्रेणी मे वर्गान्तर के मध्य बिन्दु से मदो के मूल्य का काम लेते हैं। इसका निम्न सूत्र होगा।

$$Q.M. \sqrt{\frac{\Sigma(f.x^2)}{N}}$$

प्रगतिशील मध्यक— (Progressive Average) प्रगतिशील मध्यक से तात्पर्य ऐसे मध्यक से है जिसका आधार मदो की सख्या के साथ बदलता जाता है। यदि पहले किसी कक्षा में चार विद्यार्थी हो तो चार की लम्बाई का माध्य, पाँच होने पर पाच का माध्य तथा छ होने पर छ का, इसी प्रकार माध्य का आधार बदलते रहते हैं। परन्तु चल मध्यक की तरह इसमें पहले के म क छोड़ते नहीं हैं बल्कि पहले के तो सम्मिलित रहते ही हैं आगे के भी सम्मिलित करते जाते हैं और मदो की सख्या भी बढ़ाते जाते हैं।

उदाहरण नं० 8·20

निम्नलिखित सारणी मे एक व्यापार के दस वर्ष के लाभ दिए हुए हैं। प्रगतिशील मध्यक निकालिए।

वर्ष	1947	1948	1949	1950	1951
लाभ [रु० मे]	30,000	37,000	38,500	42,000	43,500
वर्ष	1952	1953	1954	1955	1956
लाभ [रु० में]	48,000	50,000	53,500	55,000	57,500

सूत्र = पहिले वर्ष का माध्यक वही होता है जो मूल्य।

द्वितीय वर्ष का $= \frac{X_1+X_2}{2}$;

तृतीय वर्ष का $= \frac{X_1+X_2+X_3}{3}$,

चतुर्थ वर्ष का $= \frac{X_1+X_2+X_3+X_4}{4}$ आदि।

हल —

वर्ष	लाभ (रु में)	प्रगतिशील मध्यक	विवरण
1947	30,000		
1948	37,000	33,500	$\frac{30,000+37,000}{2}$
1949	38,500	35,167	$\frac{30,000+37,000+38,500}{3}$
1950	42,000	36,875	$\frac{30,000+37,000+38,500+42,000}{4}$
1951	43,500	38,200	आदि
1952	48,000	39,834	
1953	50,000	41,286	
1954	53,500	42,812	
1955	55,000	44,167	
1956	57,500	45,500	

अंतिम स्तम्भ में दिये गये विवरण से स्पष्ट है कि क्रमश 1947+1948, 1947+1948+1949, 1947+1948+1949+1950 आदि की औसत निकाल कर सम्बन्धित वर्ष के सामने रखने जाते हैं। यही प्रगतिशील मध्यक है।

इसी प्रकार की मध्यक में अन्त तक के तथ्यांक सम्मिलित रहते हैं। प्रगतिशील मध्यक का प्रयोग तभी तक करना चाहिये जब तक कि पुराने अंको का भी महत्व शेष हो। बहुधा 5–7 वर्ष पुराने अङ्क वर्तमान परिस्थितियों से तुलना के योग्य नहीं रह जाते। ऐसी स्थिति में प्रगतिशील मध्यक का प्रयोग त्याग कर चल मध्यक (moving average) का प्रयोग आरम्भ कर देना चाहिये जिसमें पुराने अङ्क छोड़ने जाते हैं और

नये ग्रहण करते जाते हैं। अत प्रगतिशील मध्यक का प्रयोग केवल थोडे समय के लिए ही किया जाता है और अन्त में इसका स्थान चल मध्यक ले लेती है जिसका विवरण पहले दिया जा चुका है।

मध्यको का तुलनात्मक अध्ययन

यूल ने अच्छे माध्य के निम्नलिखित गुण बतलाये हैं -

1—माध्य निश्चित होनी चाहिए।

2—सब मदो पर आधारित होनी चाहिये।

3—उस पर आगे गणितीय प्रयोग किये जा सकें।

4—इसका आकलन (calculation) सरल तथा वह समझने में आसान होनी चाहिये।

5—इस पर असाधारण मदो का बहुत प्रभाव नही पडना चाहिये।

6—इसका प्रयोग सभी सांख्यिकीय कार्यों में किया जा सकना चाहिये।

उपरोक्त दृष्टिकोणों से मध्यका तथा भूयिष्ठक के अतिरिक्त सभी माध्यो का निश्चयन तो सरलता से किया जा सकता है परन्तु मध्यका तथा भूयिष्ठक सब मदों पर आधारित नही होते हैं। समान्तर, गुणोत्तर, हरात्मक आदि शेष सभी माध्य सब मदों पर आधारित होते हैं। मध्यका तथा भूयिष्ठक ऐसे माध्य हैं जिन पर आगे गणितीय प्रयोग भी नहीं किये जा सकते क्यो कि इनका निश्चित मूल्य ज्ञात करना कठिन है। समझने में भी भूयिष्ठक, गुणोत्तर तथा हरात्मक मध्यक सरल नहीं है तथा इनका निकालना भी जटिल है। इसके अतिरिक्त इन मध्यको [भूयिष्ठक, हरात्मक तथा गुणोत्तर] का प्रयोग सब सांख्यिकीय कार्यों में नही हो सकता। वास्तव मे सब सांख्यिकीय कार्यों में तो किसी भी मध्यक का प्रयोग नहीं हो सकता। साधारणतया सब से सरल तथा उपयोगी मध्यक समान्तर मध्यक (Arithmetic average) है जिसका प्रयोग सर्वाधिक है। यह सब मदो पर आधारित, समझने तथा निकालने में सरल, निश्चित तथा गणितीय प्रयोगो के लिए उपयुक्त है, परन्तु जहा मदो के मूल्यो में अधिक भिन्नता हो वहा समान्तर मध्यक की जगह गुणोत्तर मध्यक ही अधिक उपयोगी है।

जहा सारे तथ्य ज्ञात नहीं हो वहा मध्यका तथा भूयिष्ठक ज्ञात किये जा सकते हैं। औसत उत्पादन, औसत कुशलता आदि में मध्यका, तथा आदर्श कुशलता, आदर्श लम्बाई आदि निकालने में भूयिष्ठक अधिक उपयोगी हैं। इसके अतिरिक्त भूयिष्ठक तथा मध्यका बहुत बडे तथा बहुत छोटे मूल्यो के प्रभाव से अछूते रहते हैं जबकि समान्तर मध्यक इस दोष से मुक्त नहीं है। दीर्घावधि उतार - चढाव (Trend) चल मध्यक के सिवाय कोई मध्यक उत्तम रीति से प्रकट नहीं कर सकता।

साराश में यह कहा जा सकता है कि समान्तर मध्यक अधिक उपयोगी तथा सरल अवश्य है परन्तु प्रत्येक मध्यक का अपना-अपना स्थान है और समय तथा परिस्थितियों के अनुसार उनका उपयोग करने से ही शुद्धतम परिणाम निकाले जा सकते हैं।

दर प्रतिशत एव अनुपात (Rates, Percentages and Ratios)

हम तीसरे अध्याय में पढ़ चुके हैं कि इकाई (unit) दो प्रकार की होती है–

1 मापन एव गणना की इकाई (unit of measurement and enumeration)

2 विवेचन एव विश्लेषण की इकाई (unit of analysis and interpretation)

दो या अधिक तथ्यों की तुलना करने के लिए उनको एक ही आधार पर लाना पड़ता है। उसके लिए हम निरपेक्ष अङ्कों को निम्न व्युत्पादों (derivatives) के द्वारा सापेक्ष अङ्कों मे परिवर्तन करके विवेचन एव विश्लेषण करते हैं।

1 दर (rates)
2 प्रतिशत (percentage)
3 गुणक (coefficients)
4 अनुपात (ratios)

दर (rates) — दो या अधिक शहरो में जन्म, मृत्यु, रोजगार आदि के आकड़ों की तुलना करने के लिए उन्हे दर (ratios) मे परिवर्तन किया जाता है। दो शहरो की मृत्यु–दर (death-rate) की तुलना करके यह हम आसानी से मालूम कर सकते है कि कौनसा शहर अधिक स्वास्थ्यप्रद (healthy) है व कौनसे शहर मे बीमारिया अधिक फैलने के कारण मृत्यु अधिक होती है।

दर दो प्रकार की होती हैं – (1) अशोधित (crude rate) और (2) प्रमाणित (standardized rate)

अशोधित (crude) दर मे निरपेक्षिक (absolute) तुलना होती है और प्रमाणित दर से सापेक्षिक (relative) तुलना । यह हमे भली-भांति ज्ञात है कि ठीक तुलना के लिए सापेक्षिक दर उत्तम है।

दर प्रति हजार में दी जाती है इसके दो कारण हैं —

1 मृत्यु या जन्म प्रति हजार मे बहुधा 25, 32, या 45 आदि होते हैं। यदि इन्हें प्रतिशत में व्यक्त किया जाय तो ये आकड़े क्रमश 2 5 3·5 और 4 5 हो जाएगे। दशमलव में दी हुई सख्याए अपेक्षाकृत तुलना करने में कठिन प्रतीत होती हैं।
25 की 45 से तुलना करना आसान है बजाय 2 5 की 4 5 से।

2. ससार के अन्य राष्ट्र भी दर प्रति हजार में ही प्रकाशित करते हैं। अत एक देश की दूसरे देश से विभिन्न दरों की तुलना करना तब आसान होगा जब वे सब हजार में ही दी हुई हों।

दर, भारित मध्यक (Weighted mean) की भाति ही निकाली जाती हैं। दी हुई जनसंख्या 'भार' (Weight) मानी जाती है और प्रति हजार मृत्यु या जन्म 'मूल्य' (Va[illegible]) माने जाते हैं।

अशोधित-मृत्यु-दर (Crude death rate) —निकालना—

उदाहरण 8 21

नीचे दिये गए आंकडों से 'अ' और 'ब' शहर की अशोधित मृत्यु दर (Crude death rate) निकालिए —

उम्र–वर्ग (Age-group)	'अ' शहर		'ब' शहर	
	जन संख्या	मृत्यु–संख्या	जन संख्या	मृत्यु–संख्या
20 से कम	15,000	360	20,000	500
20–50	20,000	400	52,000	1,040
50 से ऊपर	5,000	140	8,000	240

हल :—

उम्र वर्ग (Ago-group)	'म्र' शहर				'ब' शहर			
	जन सख्या W	मृत्यु सख्या	मृत्यु दर [प्रति हजार] X	(2 × 4) WX	जन संख्या W_1	मृत्यु संख्या	मृत्यु दर (प्रति हजार) X_1	(6×8) W_1X_1
1	2	3	4	5	6	7	8	9
20 से कम	15,000	360	24	3,60,000	20,000	500	25	5,00,000
20–50	20,000	400	20	4,00,000	52,000	1,040	20	10,40,000
50 से ऊपर	5,000	140	28	1,40,000	8,000	240	30	2,10,000
	40,000 ΣW	900		9,00,000 ΣWX	80,000 ΣW_1	1,780		17,80,000 ΣW_1X_1

'अ' शहर की अशोधित-मृत्यु-दर (Crude death rate) $\frac{\Sigma WX}{\Sigma W}$

$$= \frac{9,00,000}{40,000} = 22.5‰$$

'ब' शहर की अशोधित मृत्यु दर (Crude death rate) $\frac{\Sigma W_1X_1}{\Sigma W_1}$

$$= \frac{17,80,000}{80,000} = 22.25‰$$

अशोधित-मृत्यु दर (C.D.R.) निकालने की एक सरल गणितीय रीति और भी है।

'अ' शहर की कुल जन सख्या = 40,000
और कुल मृत्यु-सख्या = 900
जब 40,000 में मृत्यु-सख्या = 900

तो 1 में मृत्यु सख्या $= \frac{900}{40,000}$

$\therefore$ 1000 में मृत्यु-सख्या $= \frac{900}{40,000} \times 1000$

$= 22.5‰$

इसी प्रकार 'ब' शहर की कुल जन-सख्या = 80,000
और कुल मृत्यु-सख्या = 1,780

$\therefore$ 1000 मे मृत्यु-सख्या $= \frac{1,780}{80,000} \times 1,000$

$= 22.25‰$

जैसा ऊपर कहा जा चुका है कि अशोधित मृत्यु-दर (C D R) निरपेक्ष (absolute) माप है। अत. 'अ' शहर की तुलना 'ब' शहर से (अशोधित-मृत्यु-दर के आधार पर) नहीं की जा सकती। यह कहना न्याय सगत नहीं है कि 'अ' शहर की अशोधित-मृत्यु-दर (22 5‰) 'ब' शहर की मृत्यु-दर (22·25‰) से अधिक है, अत 'ब' शहर 'अ' शहर की तुलना में अधिक स्वास्थ्यप्रद है।

प्रमापित मृत्यु-दर (Standardized death rate) निकालना —कोई से दो शहरों की मृत्यु-दर की उचित तुलना करने के लिए हमें स्थानीय शहर (local town) की प्रमापित मृत्यु-दर (standardized death rate) निकालनी पड़ती है। किसी एक शहर को प्रमाप शहर (standard town) मान लिया जाता है (बहुधा पहिले शहर को) और दूसरे शहर को स्थानीय शहर (local town)। प्रमाप शहर (standard town) को अशोधित-मृत्यु-दर (C D R) की स्थानीय शहर की प्रमापित-मृत्यु-दर (standardized death rate) से (भारित मध्यक के सूत्र के आधार पर) तुलना की जाती है। उपरोक्त उदाहरण से ही यह बात स्पष्ट हो जाएगी।

माना कि 'अ' शहर प्रमाप शहर (standard town) है और 'ब' शहर स्थानीय शहर (local town)। अब यह ज्ञात करने के लिए कि दोनों शहरों में से कौनसा शहर अधिक स्वास्थ्यप्रद (healthy) है, प्रमाप शहर को अशोधित-मृत्यु-दर (C D R) की तुलना स्थानीय शहर की प्रमापित मृत्यु-दर (S D R) से की जाएगी। 'ब' शहर की प्रमापित-मृत्यु-दर (S D.R) निकालने के लिए प्रमाप शहर की जन-संख्या को ही स्थानीय शहर की जन-संख्या माना जायगा। अर्थात् उदाहरण 8 21 के दूसरे खाने में दी हुई जन-संख्या भार (weight) मानी जायगी और छठवें खाने में दी हुई मृत्यु-दर मूल्य (value) मानी जायगी। इस प्रकार से जो मृत्यु-दर आवेगी वही स्थानीय शहर की प्रमापित-मृत्यु-दर (S D.R) है। इसकी तुलना प्रमाप शहर की अशोधित-मृत्यु-दर (C.D R) से की जायगी और परिणाम निकाला जायगा।

उम्र वर्ग Age-group 1	'अ' (प्रमाप शहर)		'ब' (स्थानीय शहर)			
	जन संख्या (W) 2	मृत्यु-संख्या 3	जन-संख्या 4	मृत्यु-संख्या 5	मृत्यु-दर प्रति हजार (X) 6	(2×6) (WX) 7
20 से कम	15,000	360	20,000	500	25	3,75,000
20 से 50	20,000	400	52,000	1,040	20	4,00,000
50 से ऊपर	5,000	140	8,000	240	30	1,50,000
	40,000 ΣW	900	80,000	1,780		9,25,000 (ΣWX)

'ब' (स्थानीय शहर) की प्रमापित-मृत्यु-संख्या (S D.R) $= \dfrac{\Sigma WX}{\Sigma W}$

$$= \frac{9,25,000}{40,000} = 23{\cdot}125‰$$

'अ' (प्रमाप शहर) की अशोधित-मृत्यु-संख्या (C D R) $= \dfrac{900}{40,000} \times 1000$

$$= 22{\cdot}5‰$$

'ब' शहर में मृत्यु दर 'अ' शहर की तुलना में अधिक है अतः 'अ' शहर अधिक स्वास्थ्य प्रद है।

उपरोक्त निर्णय ठीक है। दोनों शहरों की अशोधित-मृत्यु दर (C D.R.) की तुलना करने से हमारा निर्णय आया था कि 'ब' शहर अधिक स्वास्थ्य प्रद है जो एक भ्रामक निर्णय था।

यदि 'ब' शहर को 'प्रमाप शहर' मानते तो 'अ' शहर 'स्थानीय' माना जाता और 'ब' शहर की यथोचित-मृत्यु-दर की तुलना 'अ' शहर की प्रमापित मृत्यु दर से की जाती। निर्णय वही रहता जो हमने प्राप्त किया।[1]

उपरोक्त प्रश्न मे यह याद रखना आवश्यक है कि मूल्य (x) का खाना मृत्यु-दर (न० ६) का है न कि मृत्यु-सख्या (न० 5) का क्योंकि हम मृत्यु-दरो की तुलना कर रहे हैं न कि कुल मृत्यु सख्या की।

इसी प्रकार दो या अधिक शहरो की जन्म-दर या रोजगार दर (employment rate) भी ज्ञात की जा सकती है।

आजकल जनसख्या सम्बन्धी समस्याओं का पूर्ण अध्ययन करने के लिए पुरुषों और स्त्रियो की प्रजनन-दर (reproduction rates) और उर्वरता-दर (fertility rates) भी निकाली जाती हैं।

प्रतिशत [Percentages] —कई बार सख्याओं को सापेक्षिक बनाने के लिए उनके प्रतिशत निकाले जाते है। जैसे दर "प्रति हजार" मे व्यक्त की जाती है और निर्देशाक (index number) प्रतिशत मे व्यक्त किए जाते हैं (देखिए अध्याय १२)। दो या तीन विद्यालयों के परिणामों की तुलना भी प्रतिशत में ही की जाती है प्रतिशत विचरण (Percentage variation) निकालकर दो श्रेणियो मे विचरण की तुलना की जाती है (देखिए अध्याय ६)। कई बैंक बीमा तथा अन्य प्रमण्डल (companies) अपने वार्षिक विवरण पत्रों में निरपेक्ष अङ्कों के साथ-साथ प्रतिशत अङ्क भी देते हैं। यह कहने के बजाय कि 1951 में घी 4 रुपये प्रति सेर था और 1961 में 7 रुपए प्रति सेर, यह भी कहा जा सकता है कि 1961 में घी का भाव 1951 के भावों का 175 % था। इस प्रकार तुलना करने के लिए प्रतिशत का व्यापक प्रयोग होता है लेकिन प्रतिशतों का ठीक-ठीक प्रयोग करना अत्यन्त आवश्यक है अन्यथा भ्रामक परिणाम निकल जाते हैं।

गुणक (Coefficient) —तुलना करने के लिए साङ्ख्यिकी मे गुणक (coefficient) का प्रयोग भी व्यापक है। विचरण (variation) प्रमाप-विचलन (standard deviation) माध्य विचलन (Average deviation) चतुर्थक विचलन (Quartile deviation) विषमता (skewness) सह-सम्बन्ध (Correlation), गुण-सम्बन्ध (Association) शीर्षत्व (Kurtosis)[2] आदि की तुलना करने मे गुणक का प्रयोग किया जाता है। गुणक सदा एक (1) से कम होता है। प्राप्तफल की तुलना एक (1) से की जाती है। एक (1) को प्रमाप (standard) माना जाता है। यदि हम कहें कि पिता और पुत्र की उम्र में 8 का सह-सम्बन्ध (Coefficient of correlation) है तो इसका यह अर्थ हुआ कि यदि पिता की उम्र 1 (एक) से बढ़ती या घटती है तो पुत्र की उम्र 8 से बढ़ती या घटती है।

---

1 कभी-कभी दोनो निर्णय समान नही आते है जो कि वास्तव मे आने चाहिए। ऐसे प्रश्नो को गणितीय अपवाद ही माना जाता है।

2 इन सब के लिए देखिए अध्याय ६, १० और ११।

अनुपात (Ratio) :— अनुपात कोई दो संख्याओं की सापेक्षिक तुलना करने की सरलतम रीति है। इसमे दो संख्याओं को एक ही सार्व (Common) संख्या से भाग देकर सूक्ष्म कर लिया जाता है ताकि तुलना करने मे आसानी हो । यदि 1950 मे भारत मे खाद्यान्न का उत्पादन 500 लाख टन था और 1960 मे 750 लाख टन तो हम कह सकते है कि भारत मे खाद्यान्न का उत्पादन 1950 और 1960 मे 2 · 3 के अनुपात में था।

तथ्यो की सापेक्षिक तुलना करने में अनुपात का आज-कल खूब प्रयोग होने लगा है। कुछ महत्वपूर्ण अनुपात नीचे दिए गए हैं —

प्रति व्यक्ति अनुपात (ratio per Capita) — कुछ आकडो को यदि प्रति व्यक्ति के अनुपात मे प्रस्तुत किया जाय तो उनका अर्थ अधिक अच्छी तरह समझ में आता है। यह कहा जाय कि भारत की राष्ट्रीय आय 1948–49 मे 8650 करोड रुपए थी और 1960–61 मे बढकर 12690 करोड रुपए हो गई। इसमे कोई खास अर्थ नही लगता। यदि राष्ट्रीय आय को जन-संख्या से सम्बन्धित करके कहा जाय कि (1948–49 के भावो पर) 1948–49 मे भारत की राष्ट्रीय आय प्रति व्यक्ति 246 9 रुपए थी और 1960–61 मे वह 292 5 रुपए होगई । इससे एक सामान्य बुद्धि वाला व्यक्ति भी इस समस्या को अधिक गहराई से समझ सकता है। यह हम जानते ही है कि पिछले 10 वर्षों (दो पच–वर्षीय योजना अवधि) मे राष्ट्रीय आय मे 40% की वृद्धि हुई जब कि प्रति व्यक्ति आय मे वृद्धि केवल (जन-संख्या के बढ जाने के कारण) 19% ही हुई।

लिंग अनुपात (sex ratio) :—किसी अवधि में पुरुषो की संख्या का स्त्रियो की संख्या से सम्बन्ध ही लिंग–अनुपात कहलाता है । उदाहरण के लिए 1961 की जनगणना के अनुसार भारत मे 22 62 करोड पुरुष थे और 21 29 करोड स्त्रियां। दूसरे शब्दो मे 1961 मे प्रति 1000 पुरुषो के अनुपात मे 941 स्त्रिया थी। 1951 मे प्रति 1000 पुरुषो के अनुपात मे 947 स्त्रिया थी ।

रेल सडक अनुपात (Rail–road ratio) —प्रति मील रेल की पटरी बिछाने में या सडक बनाने व उसकी सम्भाल करने में कितना विनियोग है इसका अनुमान रेल की पटरी या सडक बनाने की कुल लागत मे पटरी या सडक की लम्बाई का भाग देने से प्राप्त होता है । यदि 15 मील लम्बी रेल की पटरी बिछाने में व उसकी सम्भाल करने मे 1,20,000 रुपये की लागत आई हो तो रेल-अनुपात 8,000 रुपये प्रति मील होगा।

इसी प्रकार से अमेरिका व अन्य विकसित देशो मे वायुयान दुर्घटना अनुपात (Airline Accident Ratio) भेड-अन्न अनुपात (Hog-corn ratio) आदि का भी प्रयोग किया जाता है। हमारे देश में भी अब औद्योगीकरण की चाल तेज होने के कारण पूंजी लाभ अनुपात [Capital Profit ratio], सकल-लाभ और बिक्री अनुपात [Gross Profit and Turnover ratio], पूंजी श्रम अनुपात

[Capital labour ratio], पूंजी और विनियोगीय अतिरेक अनुपात [Capital and investible surplus ratio] का प्रयोग बढ़ गया है ।

सारांश

माध्य

तुलना के लिए किसी आदर्श इकाई की आवश्यकता होती है । यह माध्य या केन्द्र बिन्दु ही हो सकता है ।

माध्यों की उपयोगिता —(1) तुलना के लिए ।
(2) मार्ग दर्शन ।
(3) पारस्परिक सम्बन्ध का निर्णय करने के लिए ।

माध्य के गुण —(1) प्रतिनिधि हो (2) सरल गणित हो (3) सरल आकलन (4) आकस्मिक परिवर्तनों से कम प्रभावित (5) निश्चित निर्धारण सम्भव हो ।

माध्यों के प्रकार.—(1) साधारण अथवा समान्तर मध्यक
(2) भारित मध्यक
(3) चल मध्यक
(4) मध्यका
(5) भूयिष्ठक
(6) गुणोत्तर मध्यक
(7) हरात्मक मध्यक
(8) वर्ग मध्यक
(9) प्रगतिशील मध्यक

समान्तर मध्यक के सूत्र —

(1) व्यक्तिगत श्रेणी में $\bar{X} = \frac{\Sigma X}{N}$

लघु रीति $\bar{X} = \left(A + \frac{\Sigma x}{N}\right)$

(2) खंडित श्रेणी में $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$

लघु रीति $\bar{X} = A + \frac{\Sigma fx}{N}$

(3) सतत श्रेणी में $\bar{X} = \frac{\Sigma fx}{N}$

लघु रीति $\bar{X} = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N} . i\right)$

समान्तर मध्यक के गुण:— (1) सरल आकलन
(2) कम अनावश्यक

(3) थोडे तथ्यो से म्राकलन
(4) पूर्ण मदो का प्राप्त करना ६.८७
(5) प्रत्येक मद को समान महत्व
(6) पूरक क्रिया

दोप — [1] म्रधिक म्रागणना ।
[2] बडी मदो का म्रधिक प्रभाव ।
[3] सब म्र को का ज्ञान म्रावश्यक ।
[4] तथ्यो में से एक नही ।
[5] भ्रामक परिणाम ।
[6] यथेष्ट नही ।

भारित मध्यक —मूल्य को भार से गुणा कर योग मे कुल भारो की सख्या का भाग देने से प्राप्त होती है ।

समान्तर मध्यक की भाति ही निकाली जाती है ।

चल मध्यक —परिवर्तित परिस्थितियो की गणना कर निकाली हुई मध्यक । पुराने वर्षों के म्र क हटा कर चालू वर्षों के म्र क जोड कर म्रौसत निकालते जाते हैं । त्रिवर्षीय, पंचवर्षीय, सप्त-वर्षीय म्रथवा दस वर्षीय चल मध्यक निकाली जाती हैं । दीर्घावधि परिवर्तनो के म्रध्ययन के लिए इसका प्रयोग म्रधिक होता है ।

मध्यका —म्र क समूह के बीच की स्थिति को कहते हैं ।

$M = \left(\frac{N+1}{2}\right)$वें मद का मूल्य (व्यक्तिगत एव खडित श्रेणी मे)

$= \frac{N}{2}$ वें मद का मूल्य (सतत श्रेणी में)

सूत्र $M = l_1 + \left\{\frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_0\right)\right\}$

मध्यका के गुण —[1] म्र क समूह में से एक होता है
[2] निश्चित निर्धारण हो सकता है
[3] निरीक्षण मात्र से उपलब्ध हो सकता है
[4] चरम-सीमाम्रो से म्रप्रभावित
[5] सब मूल्यो का ज्ञान म्रावश्यक नहीं
[6] वर्गान्तरो में भी ज्ञात किया जा सकता है ।

दोप —[1] जटिल म्राकलन (वर्गान्तर श्रेणी में)
[2] क्रम बद्ध करना म्रावश्यक
[3] कुल मद ज्ञात नहीं हो सकते
[4] म्रधिक विस्तृत म्रंकों मे भ्रामक परिणाम

उपयोगिता —सामाजिक गतिविधियों, सम्पत्ति वितरण, श्रमिकों की मजदूरी आदि के अध्ययन मे बहुत उपयोगी है ।

चतुर्थक, दशमक तथा शतमक आदि —समूह के चतुर्थांश, दशमांश तथा शतांश को क्रमश चतुर्थक, दशमक, तथा शतमक कहते हैं ।

स्थान चतुर्थक$_1 = \frac{N+1}{4}$ वें मद का मूल्य

चतु०$_3 = \frac{3(N+1)}{4}$ वें मद का मूल्य

दश०$_6 = \frac{6(N+1)}{10}$ वें मद का मूल्य

शत०$_{55} = \frac{55(N+1)}{100}$ वें मद का मूल्य

सतत श्रेणी मे N में 1 नही जोडा जाता है ।

स्थान ज्ञात करने के पश्चात् मूल्य निकालने के लिए मध्यका वाले सूत्र का ही प्रयोग होता है ।

भूयिष्ठक —अधिकतम आवृत्तियों वाले मद के मूल्य को भूयिष्ठक कहते हैं ।

सूत्र $z = l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1 \Delta_2} . i\right)$ (ignoring minus signs)

लाभ [1] दृष्टिमात्र से अनुमान
[2] सर्वाधिक प्रचलित मद
[3] सब मदों की जानकारी अनावश्यक
[4] सतत श्रेणी मे भी आकलन सम्भव
[6] समझने मे सरल

दोष [1] निश्चित अनुमान कठिन
[2] अक क्रमबद्ध होने चाहियें
[3] कभी कभी दो या अधिक भूयिष्ठक दृष्टिगोचर
[4] यथेष्ट प्रतिनिधित्व नहीं करता

महत्व —उद्योगो मे उत्पादन तथा श्रम कौशल वृद्धि के लिए एव जलवायु के क्षेत्रीय ज्ञान के लिये उपयोगी है ।

भूयिष्ठक, समान्तर मध्यक तथा मध्यका का सम्बन्ध

[1] भू० = स० म० – 3 (स० म० – मध्य०)
[2] स० म० – भू० = 3 (स० म०– मध्य०)
[3] मध्य० – भू० = $\frac{2}{3}$ (स० म० – भू०)

समान्तर मध्यक, गुणोत्तर मध्यक, हरात्मक मध्यक मे निम्न दर्जा रहता है—

ह० म० ∠ गु० म० ∠ स० म०

गुणोत्तर मध्यक सब मूल्यों के गुणा का सख्या मूल (n th rc

मध्यक होता है। लघु गुणको का प्रयोग करने से आकलन सरल हो जाता है। ..

गुणोत्तर मध्यक—लघु गुणको को भार से गुणा करके औसत का प्रतिलघुगुणक ले लिया जाता है।

विशेषताए [1] आकलन जटिल तथा लम्बा

[2] अधिक भिन्नता वाले मदो मे उपयोगी।

[3] चरम मदो से अप्रभावित रहती है।

गुण [1] निश्चित

[2] सब मदों पर आधारित

[3] बीजगणितीय प्रयोग के लिए उपयुक्त

[4] चरम मदो से अप्रभावित

कमिया [1] आकलन तथा समझना जटिल

[2] कोई मद शून्य या ऋणात्मक हो तो अनुपयुक्त

[2] तथ्याको मे से एक नही है

[4] छोटे मदो को अधिक महत्व

[5] लघु गुणकों का प्रयोग आवश्यक

हरात्मक मध्यक अको को $\frac{1}{N}$ करके जोड कर औसत निकाली जाती है। गुण-दोष गुणोत्तर मध्यक के समान है पर यह छोटे मदों को बहुत अधिक महत्व देती है।

संक्षेप मे—सब कार्यो के लिए कोई भी मध्यक उपयोगी नहीं हो सकती। प्रत्येक की अलग अलग क्षेत्र मे उपयोगिता है।

दर, प्रतिशत, अनुपात, गुणाक आदि व्युत्क्रम विवेचन एव विश्लेषण करने के काम आते हैं।

EXERCISE VIII

Theory

1 What is a statistical average ? How is it that different averages are taken for different purposes ? (B. Com , Agra , 1938)

2 Compare the Mean, Mode and Median as averages representing groups Explain with illustrations the particular circumstances in which each one of them may be most advantageously used. (B Com , Agra, 1940)

3 Define (a) Arithmetic average, (b) Geometric mean, (c) Median and (d) Mode Which of the three is the most representative and why ? (M Com , Agra 1945)

4. Compare the merits and demerits of the Median and the Mode. In which of the following problems would they be most useful ?

(a) Skull measurement,

(b) Size of Holdings,

(c) Comparison of Intelligence,

(d) Marks obtained in any Examination,

(e) Heights and weights of students (M A, Agra 1943)

5 How will you find (a) The average marks of a class of students to show the level of intelligence, (b) the average cost of goods purchased in different lots to determine the selling price, (c) the average size of group of items for the purpose of classification, and (d) the average rate of increase in prices when the prices increase at different rates during successive periods ? Explain why you adopt a particular method in each case ? (B Com, Agra Raj, 1948)

6 What is a weighted average ? Why and how are weights given ?

7 Enumerate and define the various kinds of averages in common use, and indicate the purpose for which they are used ?

8 What are the desiderata for a satisfactory average ? Point out the general characteristics of the arithmetic mean, the median and the geometric mean (B Com, Raj, 1960)

9 Give the comparative merits of different types of averages (T D C Final Raj, 1961)

10 Statistics help collective agreement of wage adjustments What data are required for the consideration of a revision in wage rates in a factory ? Which average will you utilise and why ? (M Com Allad 1943)

11 The figure 2 2 children per adult female was felt to be in some respects absurd and the Royal commission suggested that the middle classes be paid money to increase the average to a rounder and more convenient number" (Punch)

Commenting on the above statement discuss the limitation of the Arithmetic Average

12 What *is the purpose served* by an average ? What are the limitations of the use of each one of the different kinds of averages you know ? (B. Com Raj 1950, Agra, 1943)

13. Explain what is meant by "Central tendency" and describe the various methods of measuring it Point out the usefulness of each method (B. Com Raj 1953)

14 Write short notes on

Moving average, Harmonic mean and Quadratic mean, Progressive ..., Measures of location.

15 Compare the relative merits and demerits of the arithm mean (समान्तर मध्यक), median (माध्यका), and mode (भूयिष्ठक)

(B. Com Final Raj. 1963)

Practical

Arithmetic average

1 Find out the average height of 20 students whose individual measurements are given below

Heights in inches

40,45,48,60,49,72,56,63,52,68,
69,49,53,56,58,54,53,52,66,63,

Ans 56 3 inches

2 Find out the average weight of 10 students of a class

Weights in lbs.

100,105,108,95,110,125,112,107,121,101

Ans. 108.4 lbs.

3 The following table gives the weight of 50 students in a class Find out the average weight of a student in the class

Weights in seers	No of students
25	3
26	5
27	11
28	15
29	6
30	4
31	3
32	3
	50

Answer 28.1 seers

4 A group of 40 people are tested for the length of time they can hold their breath, with the following results

Time (Seconds)	58	61	65	67	68	70	72
No of individuals	8	5	12	5	4	3	3

Find the average time by using short cut method

Ans 64.55 seconds

5 The following table gives the length of 800 corn cabs in inches

Length	5	5.5	6	6 5	7	7 5	8	8 5	9	9.5
Number:	10	33	70	110	176	172	124	61	32	12

Determine the arithmetic mean Answer 7 25 inches

6. The following table gives the male population of Jaipur in 1931. Find out the average age of the whole population

Age group (Years)	Population (in 000)
0- 5	9
5-10	8
10-15	8
15-20	7
20-30	15
30-40	12
40-50	9
50-60	6
60-80	4
	78

(Hint The table may be adjusted in intervals of 10)

Ans 27 [illegible] years

7 The death rates per 100 from Phthisis for a town is as follows Find the mean age of death from Phthisis

Age Years)	15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	75-85
Death per 1000	343	380	530	547	464	271	114

Ans. 46 34 years

8 The heights of 165 American males of Swiss descent are noted below Find out the average height

Height in inches	Males
45-50	2
50-55	10
55-60	21
60-65	55
65-70	40
70-75	32
75-80	5
	165

Ans 64 68 inches

9 Calulate the arithmetic mean from the data given below—

Intervals	Frequency
0- 4	2
5- 9	4
10-14	6
15-19	10
20-24	7
25-29	6
30-34	3
35-39	1
	39

Ans 18.54

10 In a series of cricket matches the following number of run were made by players Find out the average number of runs made by players in the matches

Scores	No of players
40– 49	1
50– 59	5
60– 69	12
70– 79	21
80– 89	23
90– 99	23
100–109	25
110–119	14
120–129	11
130–139	4
140–149	1
	140

Ans. 98 14 runs

11 In a factory, rejects per operative in plant No 4 during our veek period ended 30th June 1960 were as follows Find out average ejects per operative.

No of Rejects,	No of Operatives
21–25	6
26–30	17
31–35	22
36–40	34
41–45	20
46–50	12
51–55	5
	116

Ans 37 35 rejects

12 The following table gives the individual output of 180 fema-e workers at a particular plant during a week Find out the mean out-ut per worker

Output in units	No of operatives
500–509	8
510–519	18
520–529	23
530–539	37
540–549	47
550–559	26
560–569	16
570–579	5
	180

Ans 539 17 units

13 A firm sold steel tubes of various designs at prices noted below Find out the average selling price

Price per cwt	Sale in cwts
Rs. $22\frac{1}{2}$	75
$27\frac{1}{2}$	148
$32\frac{1}{2}$	288
$37\frac{1}{2}$	334
$42\frac{1}{2}$	252
$47\frac{1}{2}$	217
$52\frac{1}{2}$	127
$57\frac{1}{2}$	33
	1,474

Ans Rs.38 82

14 Calculate the mean in the following data

X	f
190–193	2
194–197	4
198–201	7
202–205	12
206–209	19
210–213	24
214–217	27
218–221	35
222–225	26
226–229	21
230–233	18
234–237	13
238–241	6
242–245	5
246–249	2
250–253	1
	222

Ans 219 554

Weighted Arithmetic Average—

15 Calculate the simple average and the weighted average of the following items and account for the difference in the two averages

Size of Item	68,	85;	101,	102,	108,	110,	112,	113,	124,	128,
Weight	1	46	31	1	11	7	23	17	9	14

Size of item	143,	146,	151,	153;	172.
Weight	2	4	6	5	2

Ans Arithmetic Mean 121 07

Weighted mean = 108 71

(N. B In calculating the arithmetic mean all the items have equa values, while in the calculation of a weighted average weights assignec are not equal, hence the *difference*)

16 Calculate the unweighted mean of the prices given below and the mean obtained by weighting each price by the quantity consumed and explain why they differ

Articles of food	Quantity consumed Md	srs	Price in Rs (per md)
Flour	11	5	12/-
Ghee	0	25	160/-
Sugar	0	30	32/-
Potato	0	15	11/-
Oil	0	12	50/-

Ans. A. M Rs 53
W M Rs 20 9

(The cause of difference is the variability in weights)

17 Find the weighted average earnings of the female work people shown in the table below for 1924 and 1928 taking the number to these to nearest 100 and earnings to the nearest rupee

Industry	1924 No of work-people	1924 average earnings Rs nP	1928 No of work-people	1928 average earnings Rs nP
Cotton	1,44,272	30 02	1,09,848	29 10
Woollen	86,035	30 66	65,827	30 18
Silk	18,533	27 60	19,700	27 42
Linen	36,772	22 60	25,349	20 55
Hosiery	42,632	28 24	32,085	30 60
Others	14,797	27 30	12,458	20 25

W M Rs 29 approximately
W M Rs 28 50 Apporx

18 Compute the weighted mean of the salaries of teachers in Towns A and B

School	Town A No	Town A Rate of salary Rs	Town B No	Town B Rate of salary Rs
1 Municipal School	25	30	34	40
2 Govt Schools	26	50	35	60
3 Aided Schools	20	43	12	25
4 Non-aided	19	35	11	20
5 Night Schools	10	32	8	25

Ans W. A. salary of a teacher
Town A Rs 38 95
" B Rs 41 80

19. The table below gives the results of certain examinations in three Universities Which is the best University ?

University Exam	A	B	C
	Percentage Results in the University		
1 M. A	80	75	70
2 M Sc	70	70	60
3. B A	65	80	70
4 B Sc	60	75	80
5 B Com	75	60	75

(Hint–Give equal weights to all and calculate weighted arithmetic average)

20 Which class is better on the average ·

Marks	A	B
10—20	110	90
20—30	125	140
30—40	86	75
40—50	45	50
50—60	18	15
60—70	12	10

Mean of A 29 24

B 29 47

Hence B is better.

MEDIAN

21 *The weights of 11 students of a class are given below :*

lbs 105, 104, 93, 118, 121, 102, 118, 111, 96, 109, 102

Find the median weight. Ans 105 lbs

22 The following table represents the marks obtained by a batch of 25 students in a certain class test in Economics and Politics In which subject is the level of knowledge of the students as revealed from the following figures higher ? Give reasons.

Serial No	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Marks (Econ)	29	63	23	45	51	72	48	33	42	25	28	35	46	42
Marks (Pol.)	36	30	38	39	64	50	46	15	42	10	72	33	80	44
Serial No	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25			
Marks (Econ)	60	30	32	52	54	56	58	49	38	40	46			
Marks (Pol.)	85	20	32	25	55	28	53	34	40	62	58			

Ans Economics 46 Marks.

Politics 40 „

(Level of knowledge is higher in Economics)

23. From the following data of income distribution of a certain group of persons calculate the median and 4 th decile income.

Income Rs.	No of persons
Below 30	69
30-40	167
40-50	207
50-60	65
60-70	58
70-80	27
80 & over	10
	603

Ans 4th Decile Rs 40 25
Median Rs. 43 16

24 The following are the scores in an intelligence test. Find out the Median and 77th percentile

Total Scores	Frequency
135 - 140	0
130 - 135	5
125 - 130	8
120 - 125	9
115 - 120	12
110 - 115	18
105 - 110	25
100 - 105	18
95 - 100	20
90 - 95	13
85 - 90	6
80 - 85	7
75 - 80	2
	143

Ans Median 106 1 scores
P_{77} 115 46

Hint—It is a case of descending series

25 Find out median and the upper quartile in the series given below ·

Marks	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70
Class A	110	125	86	45	18	12
Class B	90	140	75	50	15	10

Class A
Ans Median 27 04 marks
Q_3 .. 37 21 „
Class B
Median 27 14 marks
Q_3 37.33 „

26 Calculate the Median and Quartile ages from the following population data of *unmarried persons in a town in India.*

Age (years)	10	15	20	25	30
Population (in 00)	1250	845	1360	1575	1243

Ans Median 21 33 years
Q_1 14 38 ,,
Q_3 26 47 ,,

Hint--Age is a continuous variable Hence the Class intervals are 7 5-12 5, 12 5-17 5, and so on

27 The following table gives the distribution of male and female population of a certain area in India Find the Median and Quartile ages of the population

Age Group (Years)	0—9	10—19	20—29	30—39
Males	285	223	167	140
Female	279	183	176	147

Age Group	40—49	50—59	60—69	70—79
Males	91	56	26	12
Females	103	73	31	8

Ans Male. Median 19 14 years
Q_1 8 33 years
Q_3 34 86 years

Female Median 21 66 years
Q_1 8 50 years
Q_3 37 12 years

28 The weekly wages of labourers in a factory are given below. Find out the mean and Median

Weekly Wages	1—5	6—10	11—15	16—20	21—25
Employees (No)	3	4	6	1	5

Weekly Wages	26—30	31—35	36—40	41—45	46—50
Employees (No)	4	2	2	2	1

Ans Mean Rs 21.33
Median Rs 21 50

29 From the following table find out the Median

Class Interval	Frequency
1 — 2.99	6
3 — 4 99	53
5 — 6 99	85
7 — 8 99	56
9 — 10 99	21
11 — 12 99	16
13 — 14 99	4
15 — 16 99	4

Hint—Treat it as 1—3, 3—5, 5—7 etc Ans Median 6 5

MODE

30 Find out the Mode from the following series

Size of the item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Frequency ..	2	7	13	15	20	25	23	24	20	23	15

Ans. mode is 7

31 The table below gives the distribution of ages at marriage of males in England and Wales in 1931 Find out the modal ages

Age	males
Under 21 years	136
21 — 25	979
25 — 30	1,183
30 — 35	378
35 — 40	222
45 — 55	198
55 & over	97

Ans Mode is 26 01 years

32 A company has taken orders of the sizes and quantities noted below. Find out the modal order.

Size	Number
2 s and under 4 s	9
4 s and under 6 s	27
6 s and under 8 s	45
8 s and under 10 s	54
10 s and under 12 s	42
12 s and under 14 s.	30
14 s and under 16 s	9

Modal order is for 8 86 s

33 The table given below gives the marks obtained by pupils in a class in a certain subject Find out the Mode.

Marks	No of Pupils.
0 — 9	3
10 — 19	12
20 — 29	21
30 — 39	28
40 — 49	35
50 — 59	37
60 — 69	29
70 — 79	17
80 — 89	10
90 — 99	5
	197

Ans Mode is 51 5 marks

34. The following table gives heights of 182 Americans of Swiss descent. Find the modal height.

Height in inches	Males
45 - 49	2
50 - 54	10
55 - 59	55
60 - 64	21
65 - 69	57
70 - 74	32
75 - 79	5

Ans 67 45 inches

35 Determine the modal wage from the following data showing weekly wages of 250 persons in a factory

Weekly Wages	No of workers
30 - 40	11
40 - 50	26
50 - 60	63
60 - 70	81
70 - 80	35
80 - 90	21
90 - 100	13

Ans 62 81

36 The following table gives the length of life of 150 electric lamps

Life hours	0-400	400-800	800-1200	1200-1600
No of lamps	4	12	40	41
Life hours	1600-2000	2000-2400	2400-2800	2800-3200
No of lamps	27	13	9	4

Calculate the Arithmetic average, the median and the mode.

(Agra B Com 1946)

Ans Mean 1453 hours 20 mts.
Median 1385 hours 22 mts.
Mode 1226 hours 40 mts

37 The following is the population in thousands, of thirty cities of India Find the Median and the Quartiles.

1,486, 400, 250, 182, 144, 1,161, 314, 214, 174, 143,
647, 306, 230, 160, 139, 467, 275, 215, 148, 137,
447, 265, 205, 145, 127, 430, 264, 184, 144, 124.

(B Com. Agra 1935)

Hint-Arrange the data in ascending order)

Ans Median 214 5 Thousand
Q_1 „ 144 75 Thousand
Q_3 „ 335 5 „

38. According to the Census of 1941 the following are the population figures in thousands, of the first 36 cities in India.

2,488, 591, 437 208, 213, 143, 1,490, 407, 284, 176, 168, 181,
777, 387, 302, 213 204, 153, 733, 391, 263, 176, 178, 142,
522, 360, 260, 193, 131, 92, 672, 258, 239, 160, 147, 151,

Find the Median and the Quartiles

(M Com Agra 1948)

Ans Median 226 Thousand
Q_1... 170 „
Q_3 ...403 „

39 The following table gives the distribution of the male population of a certain area in India Find the modal age

Age Group	Males
0- 9	1,677
10-19	2,124
20-29	2,756
30-39	1,481
40-49	1,021
50-59	610
60-69	245
70-79	67
80-89	16
90-99	3
	10,000

Modal age is 22 81 year

40 A man goes a mile at the rate of 4 miles, another mile at the rate of 5 miles and the last mile at the rate of 6 miles per hour. Find out the average speed of the man

Hint (*This is a case of Harmonic mean*)

Ans 4.86 m p h.

41 The marks obtained by students of classes A & B are given below Give as much information as you can regarding the classes in respect of intelligence

(B Com, Agra 1939)

Marks obtained	5-10	10-15	15-20	20-25	25-30	30-35	35-40	40-45
No of students in Class A	1	10	20	8	6	3	1	0
No of students in Class B	5	6	15	10	5	4	2	2

Ans

	A (Marks)	B
Mean	19 64	20 97
Median	18 38	19 50
Mode	17.27	18 21

Class B is more intelligent

42 Find the modal wage from the following data—

Weekly wage				No of wage earners
s	d	s	d	
12		17	6	4
17	6	22	6	44
22	6	27	6	38
27	6	32	6	28
32	6	37	6	6
37	6	42	6	8
42	6	47	6	12
47	6	52	6	2
52	6	57	6	2
				144

Hint—mode lies in (22 5—27 5) wage group

(B Com Raj 1949)

Ans 24 375 shillings

43 Calculate the Median, Quartiles, 6th decile and 75th percentile from the following data

Marks	No of students
Less than 80	100
Less than 70	90
Less than 60	80
Less than 50	60
Less than 40	32
Less than 30	20
Less than 20	13
Less than 10	5

(B Com, Raj 1951)

Ans		
Median	46 43	marks
Q_1	34 17	„
Q_3	57 50	„
D_6	50 0	„
P_{75}	57 50	„

Class Work

44 Find out the Arithmetic average, median and mode from the following table

Marks		No of students
Below	10	15
„	20	35
„	30	60
„	40	84
„	50	96
„	60	127
„	70	198
„	80	250

(B Com. Raj 1952)

Ans		
Mode	66 78	marks
Median	59 35	„
Mean	50 4	„

49. Calculate the weighted Geometric mean of the following frequency distribution.

Item	*weights*
110	4
125	1
92	3
100	10
160	5
84	8

Ans. g′=104.3

50 Calulate the weighted harmonic mean from the table given below

Marks	Weights
11	3
12	7
13	8
14	5
15	2

Ans. 12 74 approx

51. Interpret the following results relating to two Universities A and B and find out which of the *two* is better—

Examinations	A		B	
	No of Candi dates appeared	Successful	No of Candidates appeared	Successfu l
M. Sc. M A B Sc B A	60 100 400 240	50 90 300 150	200 240 200 160	160 190 140 100
Total	800	590	800	590

(II year T. D C, Raj 1961)

(Hint-Calculate Weighted Arithmetic Average by assuming equal weights for both)

Result of A University is better.

52—The following table gives the distribution of the average weekly wages of 100 workers in a factory. Calculate

(i) Average weekly total wage bill of these workers,

(ii) The weekly wage of a worker whose wage is greater than that of 75% of workers

weekly wages	No of workers
16 - 20	2
21 - 25	7
26 - 30	12
31 - 35	23
36 - 40	31
41 - 45	11
46 - 50	8
51 - 55	5
56 - 60	1
	100

(B Com. Raj , 1961)

Ans (i) Rs 3650

(ii) Rs. 40.95

53 Compute the mode from the following table —

Class	0-3	3-6	6-10	10-12	12-15	15-18	18-20	20-24	24-25	25-28	28-30	30-36
Frequency	4	8	10	14	16	20	21	14	16	11	10	6

Ans Mode = 22

Hint —As the class intervals are not equal, hence make the class intervals equal by taking 6 as the magnitude of each class-interval.

54 Compute median from the following frequency table —

Class	77-80	74-77	71-74	68-71	65-68	62-65	59-62	56-59	53-56	50-53	47-50	44-47	41-44	38-41
Frequency	2	2	2	7	9	15	18	16	9	5	3	7	1	2

Ans Median = 60 00

Hint —(It is a case of descending series)

55 The following table gives the number of persons with different income —

Income in thousand rupees	Under 1	1-2	2-3	3-5	5-10	10-25	25-50	50-100	100-1000
No of persons in lakhs	13	90	81	117	66	27	6	2	2

Calculate the average income per head

Mean = 8 06 thousand Rupees

56 The following is the age distribution of candidates appearing at the Matriculation and Intermediate Arts examination of a University in 1937

Age in years	12-	13-	14-	15-	16-	17-	18-	19-	20-	21-	22-	Total
Matriculation	5	48	189	303	522	980	981	794	515	474	—	4811
Intermediate	–	—	–	5	45	87	127	150	155	127	175	871

Compare the median and modal ages of the matriculation candidates with those of Intetmediate Arts candidates.

(M A, Patna)

Ans Matriculation—Median = 18 37 years
Mode = 18 01 years
Intermediate Arts Median = 20 15 „

57 A buys bananas from one shop for Rs 0 50 a seer and from another shop at the rate of Re 1 per seer Find the average price if (i) he buys two seers from each shop, and (ii) he buys bananas of Rs 2/- each from both the shops

Ans —Rs 0 75 per seer (find Arithmetic Mean)
(ii) Rs 0 67 per seer (find Harmonic Mean)

58 (a) If mode in a tolerably asymmetrical frequency distribution is 12 and Median is 16, what would be the most probable Mean ?

(b) 20 girls of a class have an average height of 50 inches & 40 boys of the same class have an average of 60 inches Find the average height of the 60 students taken together

Ans — (a) Mean = 18
(b) 56 67 inches

59 A limited company wants to pay bonus to the members of the staff The bonus is to be paid as under --

Monthly salary	Bonus Rs
Rs 100 and not exceeding Rs 120	50
„ 120 „ „ „ 140	60
„ 140 „ „ „ 160	70
„ 160 „ „ „ 180	80
„ 180 „ „ „ 200	90
„ 200 „ „ „ 220	100
„ 220 and over	110

Actual salary of the members of the staff is given as under —
Rs. 200, 180, 195, 218, 187, 160, 250, 168, 190, 168, 170, 178 175, 140, 120, 148, 165, 155, 145, 125, 110, 162, 130, 150 185

What is the total bonus paid ? What is the average bonus paid per member of the staff ?

(B Com, Raj, 1960)

Total Bonus paid Rs 1980
Average Bonus per member Rs 79.2 } Answer

Hint—Treat upper limit as excluded

60—Define Mode.

Calculate the Mode for the following frequency distribution

Ages	frequency
10 — 19	6
20 — 29	15
30 — 39	12
40 — 49	10
50 — 59	6
60 — 69	3

After regrouping the above data into wider classes we get the ollowing frequency distribution

Ages	*frequency*
10 — 29	21
30 — 49	22
50 — 69	9

Calculate the Mode of the data regrouped above Do the two Modes exactly equal ? If not, account for the difference

(R A S 1959)

Ans —35 5 and 30 93

The difference is because of the change in the composition of Age-groups

61 Following is the frequency distribution of yield of cane in *quintals per acre*

Class intervals	frequency
35 -	7
40 -	9
45 -	12
50 -	26
55 -	32
60 -	42
65 -	42
70 -	--
75 -	17
80 - 85	9

Mean of the above is 61 84 Find the missing figure

Ans —15

62 The following are the death rates per thousand per annum of two towns in a certain year

Age (years)	Town A Population	Death	Death Rate per 1000	Town B Population	Death	Death Rate per 1000
under 2	3,000	192	64 0	5,000	300	60 0
2 - 10	10,000	70	7 0	12 000	78	6 5
10 - 20	10,000	40	4 0	10 000	38	3 8
20 - 60	32,500	260	8 0	25,000	190	7 6
60 and above	8,500	510	60 0	8,000	460	57 5
All	64 000	1,072	16 75	60 000	1,066	17 77

(a) For each age group the death-rate of town A is greater than that of Town B, but the reverse is the case when all age-groups are grouped together, why is it so ?

(b) Calculate the standardized death rate for town B, taking the population of Town A as the standard

Ans -(a) Basis of comparison is not the same.

(b) 15 92‰

63 What is a weighted average ? Why and how are weights given ?

Determine which of the two towns, A and B is more healthy (Assume B town as standard)

Age	A		B	
	Population	Death	Population	Deaths
0 - 15	15,000	360	20 000	500
15 - 50	20,000	400	52,000	1040
50 and above	5,000	140	8 000	240
	40,000	900	80 000	1,780

Ans --C. D R of B town - 22.25‰

S D R of A town - 21 8%

Hence A town is healthier

64 If the sum of the values of a given series is equal to 3600 and the arithmetic mean is equal to 72, find the total number of items in that series.

Ans 50

65 If the arithmetic mean is 28 and the total number of items is 60 in a series find the sum of the values

Ans 1680

66 Given (i) $\Sigma X = 876$ (ii) $N = 10$

find $\overline{X}$

Ans 87 6

67. Given (i) $A = 150$ (ii) $N = 20$

(iii) $\overline{X} = 200$ (iv) $\Sigma [fx] = 200$

find i [interval] in a continuous series

Ans 5

68 100 boys, who were examined in a paper of Statistics got 20 marks on an average Later on it was discovered that the marks of one boy were read 68 instead of 48 Find the true mean.

Ans 19 8 Marks

69 The following table gives the Diastolic Blood pressure reading of 250 proposers for life insurance in U. K.

Diastolic Blood Pressure	No of Proposers
59.5 - 67 5	9
67.5 - 72 5	31
72.5 - 77.5	39
77 5 - 82.5	114
82 5 - 87.5	30
87.5 - 95.5	27

Calculate the Median (मध्यका), First Quartile (प्रथम चतुर्थक), and Third Quartile (तृतीय चतुर्थक), and mention the ranges in which the first quarter and the last quarter of the items lie.

(B Com., Raj, 1962)

Ans Q_1 75.38
M 79 5
Q_3 82 26

Range of First quarter items 15 88
" " Last " " 13 24

70 Calculate the arithmetic average (समान्तर मध्यक), median (मध्यका), and mode (भूयिष्ठक) from the following data

Age [Years]	Number of employees
25	8
30	23
35	51
40	81
45	103
50	113
55	117
60	120

Ans $\overline{X} = 36\,83$
$Z = 36$
$M = 36.5$

(B. Com. Final Raj 1963)

71 If $\overline{X}$ and g of two values are 10 and 8 respectively, find the values. Ans 16 and 4

72 Find the two numbers whose $\overline{X} = 18$
$g' = 14\,4$

Ans. 28.8 ; 7.2

अध्याय ९

अपकिरण

(DISPERSION)

पिछले अध्याय में हम यह देख चुके हैं कि मध्यक द्वारा हमे एक श्रेणी की सामान्य स्थिति का पता चल जाता है। मध्यक किसी भी श्रेणी की मध्य स्थिति की परिचायक होती है परन्तु मध्यक द्वारा यह पता नही चलता कि सारी श्रेणी मे अंको का विस्तार, फैलाव या बिखराव कैसा है। अंको का विस्तार सममितीय (Symmetrical) है या बहुत असममितीय (asymmetrical)। यह सर्वथा सम्भव है कि दो या तीन श्रेणियो के मध्यक समान हो परन्तु उनके अंको के बिखराव या विचरण (Variation) मे बहुत भिन्नता हो। नीचे एक उदाहरण दिया जाता है।

उदाहरण नं० 91

तीन कम्पनियां पाच वर्षो मे निम्न लिखित लाभार्जन करती हैं।

लाभ हजार रु० मे

	अ	ब	स
	1	8	6
	2	7	6
	4	6	6
	8	5	6
	15	4	6
मध्यक	6	6	6

उपरोक्त तीनो ही कम्पनियो के लाभ की प्रतिवर्षीय मध्यक 6 हजार रुपये हैं परन्तु क्या इन तीनों कम्पनियो की आर्थिक स्थिति समान है ? उत्तर स्पष्ट ही 'नहीं' मे होगा क्योंकि पहली कम्पनी बहुत तेजी से उन्नति कर रही है। उसके लाभ प्रतिवर्ष लगभग दुगने हो रहे हैं जब कि दूसरी कम्पनी के लाभ लगातार गिरते जा रहे हैं। तीसरी कम्पनी के लाभ पाचो वर्षों में समान हैं। इस प्रकार मध्यक बराबर होने पर भी एक कम्पनी बहुत उन्नति कर रही है, दूसरी लगातार अवनति की ओर जा रही है तथा तीसरी की स्थिति स्थिर है। उपरोक्त उदाहरण से हम इस निष्कर्ष पर भी पहुचते है कि पहली कम्पनी के लाभ-सम्बन्धी अंको मे विचरण बहुत है, बिखराव ज्यादा है। दूसरी कम्पनी के बिखराव में एक नियमितता है तथा तीसरी कम्पनी के अंको में कोई परिवर्तन हो नहीं है। अत मध्यक किसी अंक-श्रेणी की बनावट की वास्तविक स्थिति नहीं बतलाते तथा अंको के विस्तार अथवा भिन्नता की मात्रा का प्रदर्शन नहीं करते जो उनकी वास्तविक स्थिति जानने के लिए आवश्यक है।

मध्यक भिन्न परन्तु बनावट समान—कभी-कभी दो श्रेणियो का मध्यक अलग-अलग होने पर भी उनकी बनावट एक सी हो सकती है। उनका बिखराव

या बिखराव दोनो श्रेणियो में एक सा हो सकता है, जैसे 1,2,3,4,5, और 26,27, 28,29,30। दोनो श्रेणियो का माध्य अलग-अलग 3 व 28 है लेकिन उनकी बनावट, विचलन व बिखराव समान हैं।

अपकिरण (dispersion) इन दोनो कमियो की पूर्ति करता है। विभिन्न श्रेणियो में अंक किस हद तक बिखरे हुए है, उनके बढने अथवा घटने की गति क्या है, इन सब बातो का उत्तर अपकिरण से मिलता है। अत अपकिरण किसी समूह के अंको के बिखराव अथवा विचरण की सीमा बतलाने वाला माप है। ऊपर दिये हुए उदाहरण मे ही अ श्रेणी मे विचलन अधिक, ब श्रेणी में साधारण तथा स श्रेणी मे शून्य है।

केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापों को तो, जैसा कि हम पिछले अध्याय में पढ चुके हैं, "प्रथम दर्जे के माध्य" कहते हैं और विचरणता (variability) एवं अपकिरण (dispersion) के मापो (measures) को द्वितीय दर्जे के माध्य (Averages of second order) कहते हैं।

सामान्यतया अपकिरण दो रीतियो से ज्ञात किये जाते हैं।

(1) सीमाओ के अन्तर द्वारा (Method of Limits)

(2) श्रेणी के माध्य (Average) से विचलनो (deviations) के औसत द्वारा (Method of averaging deviations)

१—सीमाओ के अन्तर के द्वारा (Method of Limits) अपकिरण (dispersion) निम्न दो रीतियो से मापा जाता है—

अ—विस्तार (Range) द्वारा

ब—चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation) या अर्ध अन्तर चतुर्थक-विस्तार (Semi interquartile Range) द्वारा

२—विचलनो के माध्य (Method of averaging deviations) के द्वारा निम्न दो रीतियो से अपकिरण मापा जाता है—

अ—माध्य विचलन (Mean deviation or Average Deviation)

ब—प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

अपकिरण का निरपेक्ष (absolute) माप भी होता है और सापेक्ष (relative) भी। उपरोक्त चारो माप निरपेक्ष है। इनको सापेक्ष बनाने के लिए सब मापों का गुणक (coefficient) निकाला जाता है।

विस्तार (Range) —

अधर तथा अपर सीमाओ के द्वारा प्राप्त अपकिरण को विस्तार (Range) कहते हैं। विस्तार द्वारा अपकिरण जानने की पद्धति सबसे सरल है। यदि एक कक्षा के विद्यार्थियो में सबसे लम्बे विद्यार्थी की लम्बाई 72 इन्च तथा सबसे छोटे विद्यार्थी की लम्बाई 58 इंच है तो कक्षा में विद्यार्थियो की लम्बाई का विस्तार 72–58 अर्थात् 14 इंच हुआ। इस प्रकार विस्तार (range) ज्ञात करने के लिये श्रेणी के सबसे बडे तथा सब से छोटे मूल्य का अन्तर ले लिया जाता है। यदि अव्यावसंतत श्रेणी अर्थात् वर्गान्तरों (classe intervals) के रूप में दिये गये हैं तो सब

से बड़े वर्गान्तर की उच्चतम सीमा तथा सबसे छोटे वर्गान्तर की निम्नतम सीमा का अन्तर ही विस्तार कहलाता है। जैसे यदि कोई श्रेणी 5–10, 10–15, 15–20, 20–25, 25–30, 30–35 के वर्गान्तरों में विभाजित है तो श्रेणी का विस्तार 35–5 अर्थात् 30 होगा। उसका सूत्र (E_2-E_1) है जहा E_2 = श्रेणी का सबसे बड़ा मूल्य व E_1 = श्रेणी का सबसे छोटा मूल्य।

विस्तार वास्तव में अपकिरण का एक निरपेक्ष (absolute) माप है। अतः दो श्रेणियों की तुलना करने के लिये यह विशेष उपयोगी नहीं है। जैसे एक श्रेणी बहुत बड़ी हो और दूसरी बहुत छोटी तो एक का विस्तार अधिक होगा दूसरी का कम, परन्तु यह हो सकता है कि जिसका विस्तार कम है वह असम हो तथा अधिक विस्तार वाली सम हो। नीचे के उदाहरण से यह स्पष्ट हो जाता है।

श्रेणी अ 2, 3, 5, 8, 11, 25, 27

ब 4, 8, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56

अ श्रेणी में केवल 7 मद हैं और ब में 13 और दोनों के विस्तार क्रमशः 25 और 52 हैं परन्तु इससे यह तय कर लेना कि अ श्रेणी ब से अधिक सम है क्योंकि इसमें अंकों का विस्तार ब श्रेणी से कम है, अशुद्ध होगा। ऐसी स्थिति आने पर सापेक्षिक माप, विस्तार गुणक (Coefficient of Range) का प्रयोग किया जाता है। विस्तार में चरम मूल्यों (extreme values) के जोड़ का भाग देने से विस्तार गुणक निकल आता है। इसके जानने के लिये निम्न सूत्र है-$\frac{E_2-E_1}{E_2+E_1}$जहा-

E_2 श्रेणी का सबसे बड़ा मूल्य

E_1 श्रेणी का सबसे छोटा मूल्य है।

नीचे दो उदाहरणों द्वारा विस्तार गुणक निकालना बतलाया गया है।

उदाहरण 9·2

दो परिवारों के सदस्यों की लम्बाई इंचों में निम्नलिखित है।

परिवार अ	40	45	50	58	62	71
परिवार ब	31	36	48	66	68	73

दोनों में कौन से परिवार के सदस्यों की लम्बाई में विचलन अधिक है। विस्तार (Range) पद्धति से बतलाइये।

हलः—

संख्या	परिवार अ (लम्बाई इंचों में)	परिवार ब (लम्बाई इंचों में)
1	40	31
2	45	36
3	50	48
4	58	66
5	62	68
6	71	73

अ परिवार मे लम्बाई का विस्तार $(E_2 - E_1) = 71 - 40 = 31$

(Coefficient of Range) विस्तार गुणक $= \left(\frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1}\right)$

$$= \frac{71 - 40}{71 + 40}$$

$$= \frac{31}{111}$$

$$= 28$$

ब परिवार में लम्बाई का विस्तार $= 73 - 31 = 42$

विस्तार गुणक $= \frac{73 - 31}{73 + 31}$

$$= \frac{42}{104}$$

$$= .40$$

प्रकट है कि विचरण ब परिवार मे अधिक है।

सतत श्रेणी मे विस्तार द्वारा अपकिरण निकालना —

उदाहरण नं० 93

निम्नलिखित सारणी में 13 से 15 वर्ष की आयु वाले 76 विद्यार्थियों की लम्बाई दी गई है। विस्तार पद्धति से उनकी लम्बाई में विचलन ज्ञात कीजिये।

इचो मे लम्बाई	विद्यार्थियो की सख्या
50-53	2
53-56	7
56-59	24
59-62	27
62-65	13
65-68	3

उपरोक्त सारणी से विस्तार $(E_2 - E_1) = (68 - 50) = 18$

विस्तार गुणक $\left(\frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1}\right) = \frac{68 - 50}{68 + 50}$

$$= \frac{18}{118}$$

$$= 15$$

विस्तार की विशेषताएं (Features of Range)

(1) विस्तार का आगणन अत्यन्त सरल है तथा इसका महत्व आसानी से समझ में आ जाता है।

(2) विस्तार बहुत अस्थाई माप है क्योंकि चरम मूल्यों मे तनिक भी परिवर्तन का इस पर सीधा प्रभाव पडता है ।

(3) विस्तार द्वारा दोनो चरम सीमाओं (extreme limits) के बीच के मूल्यों मे कितनी समता अथवा असमता है यह ज्ञात नही हो सकता ।

विस्तार का प्रयोग —विस्तार ज्ञात करना सरल होता है यही इसका मुख्य गुण है परन्तु व्यवहारिक रूप मे इसका प्रयोग बहुत कम किया जाता है क्योंकि इसमे चरम मूल्य सारे परिणामो को प्रभावित करते है । यदि कम लम्बाई वाले व्यक्तियो मे एक भी बहुत लम्बा या बहुत छोटा व्यक्ति सम्मिलित हो जाय तो विस्तार बहुत बढ जायगा भले ही शेष सब विद्यार्थियो की लम्बाई मे साधारण अन्तर हो । अत विस्तार पद्धति का प्रयोग बहुत सावधानी से करने की आवश्यकता है । विस्तार पद्धति का प्रयोग जूता बनाने, तैयार वस्त्र बेचने आदि की कम्पनियो मे होता है जहा उन्हे सब कदो के व्यक्तियो के लिये सामान तैयार करना होता है । किस्म नियत्रण मे भी विस्तार का प्रयोग अधिक होता है ।

चतुर्थक विचलन (Quartile Deviation)

अपकिरण का एक माप अर्द्ध-अन्तर्चतुर्थक विस्तार (Semi-inter-quartile range) अथवा चतुर्थक विचलन है । इसके नाम से ही प्रकट है कि इसमें चतुर्थको के अन्तर की औसत निकाली जाती है । यदि श्रेणी नियमित अथवा सममितीय (Symmetrical) हो तो मध्यका अपर चतुर्थक (Q_3) तथा अधर चतुर्थक (Q_1) के ठीक बीच में होगा । परन्तु ऐसा बिल्कुल समितीय श्रेणी मे ही सम्भव है ।

चतुर्थक विचलन या अर्द्ध अन्तर्चतुर्थक विस्तार (Semi-inter-quartile range) निकालने के निम्नलिखित सूत्र काम मे लाया जाता है ।

च० वि० या Q D. $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

Q_3 अपर चतुर्थक तथा Q_1 अधर चतुर्थक है ।

अन्य विचलनो की भाति तुलना मे चतुर्थक विचलन का भी प्रयोग नही होता बल्कि चतुर्थक विचलन का गुणक (Coefficient) निकाला जाता है । गुणक निकालने के लिये निम्नलिखित सूत्र काम मे लाया जाता है ।

चतुर्थक विचलन गुणक (Coefficient of Q D.) $= \left(\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} \right)$

नीचे के उदाहरणो से चतुर्थक विचलन का आगणन स्पष्ट हो जायेगा ।

व्यक्तिगत श्रेणी मे चतुर्थक विचलन ज्ञात करना (Calculation of Q D. in Individual series)

उदाहरण 9.4

नीचे 31 विद्यार्थियों की लम्बाई इंचों में दी गई है। चतुर्थक विचलन ज्ञात कीजिये।

लम्बाई इंचों में—55, 56, 57, 57, 58, 58, 59, 59, 60, 60, 60, 61, 62, 62, 62, 63, 63, 63, 64, 64, 65, 65, 65, 66, 66, 66, 67, 68, 68, 69, 70

श्रेणी मे प्रथम चतुर्थक $(Q_1) = \left(\frac{31+1}{4}\right)$ अर्थात आठवें मद का मूल्य

$= 59$ इंच

श्रेणी मे तृतीय चतुर्थक $(Q_3) = \frac{3(31+1)}{4}$ अर्थात 24 वें मद का मूल्य

$= 66$ इंच

चतुर्थक विचलन $(Q.D) = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$= \frac{66 - 59}{2}$

$= 3.5$ इंच

नोट —व्यक्तिगत श्रेणी में मूल्यों को क्रम-बद्ध करना आवश्यक है।

खंडित श्रेणी मे चतुर्थक विचलन ज्ञात करना (Calculation of Quartile deviation in discrete series)

उदाहरण 9.5

निम्नलिखित श्रेणी में 31 विद्यार्थियों के तौल दिये गये हैं। उनका चतुर्थक विचलन तथा गुणक ज्ञात कीजिये।

तौल सेरों में	32	35	38	43	50	56	60
आवृत्ति	2	4	8	9	4	3	1

चतुर्थक विचलन

तौल सेरों में	आवृत्ति (f)	सामूहिक आवृत्ति
32	2	2
35	4	6
38	8	14
43	9	23
50	4	27
36	3	30
60	1	31

$Q_1 = \frac{31+1}{4}$ अर्थात् 8 वें मद का मूल्य

$= 38$ सेर

$$Q_3 = \frac{3(31+1)}{4}$$ अर्थात् 24 वें मद का मूल्य

$= 50$ सेर

चतु० विच० (Q.D.) $= \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{50-38}{2}$

$= 6$ सेर

चतु० विच० गुणक $= \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{50-38}{50+38} = \frac{12}{88}$

[Coefficient of Q D] = 136

सतत श्रेणी मे चतुर्थक विचलन निकालना (Calculation of Q.D. in continuous series)

सतत श्रेणी मे भी चतुर्थक विचलन निकालने की रीति वही है जो साधारण अथवा खंडित श्रेणी मे लागू होती है ।

उदाहरण 96

निम्नलिखित तालिका में एक फैक्ट्री में काम करने वाले 250 श्रमिको के मजदूरी सम्बन्धी अंक दिये गये हैं। विभिन्न श्रमिको की मजदूरी मे चतुर्थक विचलन तथा उसका गुणक ज्ञात कीजिये ।

मासिक मजदूरी [रु० मे०]	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100
आवृत्ति	11	26	63	81	35	21	13

हल

चतुर्थक विचलन

1 मासिक मजदूरी [रु० मे०]	2 आवृत्ति (f)	3 सामूहिक आवृत्ति (cf)
30 – 40	11	11
40 – 50	26	37
50 – 60	63	100
60 – 70	81	181
70 – 80	35	216
80 – 90	21	237
90 – 100	13	250

$Q_1 = \left(\frac{N}{4}\right)$ वें मद का मूल्य

$= \frac{250}{4}$ अर्थात् 62.5 वें मद का मूल्य

अर्थात्

$$Q_1 = l_1 + \left\{ \frac{i}{f} \left(\frac{N}{4} - C_o \right) \right\}$$

$$= 50 + \left\{ \frac{10}{63} \; (62\,5 - 37) \right\}$$

$$= 50 + \left(\frac{10}{63} \times 25\,5 \right)$$

$$= 50 + 4\,05$$

$$= 54\,05$$

$$Q_3 = \left(\frac{3N}{4} \right) \text{वें मद का मूल्य}$$

$$= \frac{3\,(250)}{4} \text{ अर्थात् 187.5 वें मद का मूल्य}$$

$$Q_3 = l_1 + \left\{ \frac{i}{f} \left(\frac{3N}{4} - C_o \right) \right\}$$

$$= 70 + \left\{ \frac{10}{35} \; (187\,5 - 181) \right\}$$

$$= 70 + \left(\frac{10}{35} \times 6\,5 \right)$$

$$= 70 + 1\,86$$

$$= 71\,86$$

$$QD = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

$$= \frac{71\,86 - 54\,05}{2}$$

$$= \frac{17\,81}{2}$$

$$= 8\,905$$

$$\text{Coefficient of QD} = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1} = \frac{71\,86 - 54.05}{71\,86 + 54\,05}$$

$$= \frac{17\,81}{125\,91}$$

$$= .14$$

चतुर्थक विचलन के गुण तथा दोष (Advantages and disadvantages of Q. D) चतुर्थक विचलन का आगणन बहुत सरल है तथा इसको समझना भी बहुत आसान है क्योंकि इसे ज्ञात करने मे किन्हीं जटिल गणितीय सूत्रों का प्रयोग नहीं करना पडता परन्तु चतुर्थक विचलन निकालने मे सारे मदो के मूल्यो को [illegible] नहीं किया जाता केवल सीमावर्ती अथवा चतुर्थक के आस-पास के मूल्यो को ही

माध्य विचलन (Mean Deviation) से हमें यह अर्थ नहीं लगा लेना चाहिए कि विचलन Mean अर्थात् समान्तर मध्यक से ही निकाले जाए। विचलन समान्तर मध्यक और मध्यका दोनों से ही निकाले जाते हैं। यहां Mean का अर्थ माध्य (Average) से है न कि समान्तर मध्यक से। इसीलिये अंग्रेजी में इसे Mean Deviation के स्थान पर Average Deviation कहना अधिक उपयुक्त है।

माध्य विचलन यदि प्रत्यक्ष रीति से ज्ञात किया जाता है तो आकलन अधिक करने पड़ते हैं व समय भी अधिक लगता है क्योंकि समान्तर मध्यक या मध्यका बहुधा पूर्णांक (integers) नहीं होते हैं। अतः इन प्रश्नों का लघु रीति से (Short cut method) हल करने में अधिक आसानी रहती है।

उपरोक्त प्रश्न उदाहरण (२ 11) हल किया जाता है:—

1	2	3		4	5	6	7	९	9
मूल्य	मध्य-बिन्दु X	आवृत्ति f		संचयी आवृत्ति cf	कल्पित मध्यका से विचलन M′=45 (दस दस में) $\lvert d_M' \rvert$ (X−M′)	कुल विचलन $\lvert f d_M' \rvert$ (3×5)	fX (2×3)	कल्पित समान्तर मध्यक से विचलन A=45 दस दसमें $\lvert x \rvert$ (X−A)	कुल विचलन $\lvert fx \rvert$ (3×8)
10 – 20	15	2		2	3	6	30	3	6
20 – 30	25	4		6	2	8	100	2	8
30 – 40	35	7	N_1	13	1	7	245	1	7
40 – 50	45	12		25	0	0	540	0	0
50 – 60				33	1	8	440	1	8
60 – 70	55	8		37	2	8	260	2	8
70 – 80	65	4	N_2	40	3	9	225	3	9
	75	3							
		40 N				46 $\lvert f\Sigma d_M' \rvert$	1840 ΣfX		46 $\lvert \Sigma fx \rvert$

$$\delta_M = \frac{(|\Sigma fd_M'| \times i) + (M-M')(N_1-N_2)}{N}$$

M = वास्तविक मध्यका (true Median) = 45.83

M' = कल्पित मध्यका (Assumed Median) = 45

i = वर्ग विस्तार (magnitude or interval of the class-group in which M lies) = 10

d_M' = कल्पित मध्यका से विचलन (deviations of values from the assumed median, (x−M')

N_1 = वास्तविक मध्यका से कम मूल्य वाले मदों की संख्या (the number of items having value less than the true median (Be guided by the mid-value column) = 25

N_2 = वास्तविक मध्यका से अधिक मूल्य वाले मदों की संख्या (the number of items having value more than the true median—(Be guided by the mid-pt column) = 15

N = श्रेणी में कुल मदों की संख्या—total number of items in a series = 40

जो मूल्य दो खड़ी रेखाओं [| |] के बीच में लिखे हैं उनका चिह्न हमेशा धनात्मक [positive] माना जाता है। (M − M') और [$N_1 - N_2$] में चिह्न, ऋणात्मक या धनात्मक, जैसा भी हो, वही रखना चाहिए। यह याद रहे कि सदा M में से M' और N_1 में से ही N_2 घटाया जाय। i का प्रयोग तब ही किया जाय जबकि संतत श्रेणी हो और उसमें प्रत्येक वर्गान्तर में वर्ग विस्तार समान हो। यदि दी हुई संतत श्रेणी में वर्ग विस्तार समान नहीं हो तो i का प्रयोग नहीं करना चाहिए। कल्पित मध्यका M' उस वर्गान्तर का मध्य बिन्दु मानना आवश्यक है जिस वर्गान्तर में वास्तविक मध्यका M हो।

उपरोक्त सूत्र में मूल्यों का प्रतिस्थापन करने पर—

$$\delta_M = \frac{(46 \times 10) + (45.83 - 45)(25 - 15)}{40}$$

$$= \frac{460 + (.83 \times 10)}{40}$$

$$= \frac{460 + 8.3}{40}$$

$$= \frac{468.3}{40}$$

$$= 11.70$$

गुणक $= \frac{\delta_M}{M}$

$$= \frac{11.70}{45.83} = .2553$$

इसी प्रकार उपरोक्त प्रश्न कल्पित समान्तर मध्यक से भी लघु रीति से निम्न प्रकार से हल किया जाता है।

$$\delta x = \frac{(|\Sigma fx|\ i) + (\bar{X} - A)(N_1 - N_2)}{N}$$

x = कल्पित स० म० से विचलन $(X - A)$

$\bar{X}$ = वास्तविक स० मध्यक = 46

A = कल्पित स० मध्यक = 45

N, N_1, N_2 व i का अर्थ वही है जो पिछले सूत्र मे था तथा उपरोक्त सूत्र में भी उन सब मान्यताओं का ध्यान रखना आवश्यक है जो पिछले सूत्र मे ध्यान में रखी गई थी।

$$\delta x = \frac{(46 \times 10) + (46 - 45)(25 - 15)}{40}$$

$$= \frac{460 + (1 \times 10)}{40}$$

$$= \frac{470}{40} = 11\cdot75$$

$$\text{गुणाक} = \frac{\delta x}{\bar{X}}$$

$$= \frac{11\cdot75}{46} = \cdot2554$$

नोट:—यदि प्रश्न सतत श्रेणी मे दिया गया हो और प्रत्येक वर्गान्तर के वर्ग विस्तार समान हों तो उपरोक्त हल मे पद-विचलन-रीति (step deviation-method) का प्रयोग करके खाने न० २ (मध्य बिन्दु) को हटाया जा सकता है। विधि ठीक वही है जो उदाहरण न० ७ ७ मे दी हुई है। यदि माध्य विचलन अवरोही (descending) क्रम मे दिये हुए मूल्यो (सतत श्रेणी) का निकालना हो तो भी उपरोक्त सूत्र मे कोई परिवर्तन नही करना पडेगा क्योकि इसमें विचलन निकालने के लिए ऋणात्मक चिन्हो का कोई ध्यान नही रखा जाता है। हा, वास्तविक मध्यका ज्ञात करने के लिए अवश्य वही ध्यान रखा जाएगा जो उदाहरण 7.31 में रखा गया है।

उदाहरण न० 9 12

165 व्यक्तियो की लम्बाई नीचे की सारणी मे दी जाती है। माध्य विचलन [मध्यका से] निकालिए।

लम्बाई इचों में)	45-50	50-55	55-60	60-65	65-70	70-75	75-80
आवृत्ति	2	10	21	55	40	32	5

1	2	3	4	5	6	7	8
लम्बाई (इन्चों मे)	मध्य–बिन्दु X	कल्पित मध्यका $M'=62{\cdot}5$ से विचलन (पाच मे) $\|d_{M}'\|$ $(X - M')$	आवृत्ति f	कुल विचलन $\|fd_{M}'\|$ (3×4)	सचयी आवृत्ति cf	असली मध्यका 65 5 से विचलन $\|d_{M}\|$	कुल विचलन $\|fd_{M}\|$ (4×7)
45 – 50	47.5	3	2	6	2	17	34
50 – 55	52 5	2	10	20	12	12	120
55 – 60	57.5	1	21 N_1	21	33	7	147
60 – 65	62.5	0	55	0	88	2	110
65 – 70				40	128	3	120
70 – 75	67.5	1	40	64	160	8	256
75 – 80	72.5	2	32 N_2	15	165	13	65
	77.5	3	5				
			165 N	166 $\|\Sigma fd_{M}'\|$			852 $\|\Sigma fd_{M}\|$

Median मध्यका $= \frac{N}{2}$ वें मद का मूल्य

$= \frac{165}{2} = 82.5$ वें मद का मूल्य जो (60 – 65)

वर्गान्तर मे है।

$M = 60 + \left\{ \frac{5}{55}\left(82.5 - 33\right) \right\}$

$= 60 + \frac{49.5}{11}$

$= 60 + 4.5 = 64.5$

माध्य विचलन $\delta_M = \frac{|\Sigma f d_M|}{N}$ (प्रत्यक्ष रीति से)

$= \frac{852}{165} = 5.16$

माध्य विचलन $\delta_M = \frac{(|\Sigma fd'| \times i) + (M - M')(N_1 - N_2)}{N}$

(लघु रीति से)

$= \frac{(166 \times 5) + (64.5 - 62.5)(88 - 77)}{165}$

$= \frac{830 + (2 \times 11)}{165}$

$= \frac{830 + 22}{165} = \frac{852}{165} = 5.16$

मध्य विचलन गुणक $= \frac{\delta_M}{M}$

$= \frac{5.16}{64.5}$

$= .08$

यह आवश्यक नहीं है कि माध्य विचलन असली तथा कल्पित मध्यका दोनों से ही निकाला जाय। कोई एक रीति, जो भी आसान हो, काम मे लाई जा सकती है।

उदाहरण 9.13

निम्न लिखित अंक माला में माध्य विचलन तथा उसका गुणक निकालिए—

लम्बाई (इंचो मे)	45-49	50-54	55-59	60-64	65-69	70-74	75-79
आवृत्ति	2	10	55	21	57	32	5

हल —

1	2	3	4	5	6
लम्बाई इंचो में	मध्य-बिन्दु	आवृत्ति	संचयी आवृत्ति	कल्पित मध्यका M'=67 से विचलन पाच मे $\lvert d_{M'} \rvert$	कुल विचलन $\lvert fd_{M'} \rvert$
	X	f	cf	X–M'	(3×5)
45–49	47	2	2	4	8
50–54	52	10	12	3	30
55-59	57	55 N_1	67	2	110
60–64	62	21	88	1	21
65–69	67	57	145	0	0
70–74	72	32 N_2	177	1	32
75–79	77	5	182	2	10
		182 N			211 $\lvert \Sigma fd_{M'} \rvert$

मध्यका $= \frac{182}{2} = 91$ वें पद का मूल्य जो (65-69) वर्गान्तर मे है।

$$M = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_o\right) \right\}$$

$$= 64{\cdot}5 + \left\{ \frac{5}{57}\left(91-88 \right) \right\}$$

$$= 64{\cdot}5 + \left(\frac{5}{57} \times 3 \right)$$

$$= 64{\cdot}5 + {\cdot}26 = 64{\cdot}76$$

विचलन $\delta_M = \frac{(\lvert \Sigma fd_{M'} \rvert \times i) + (M-M')\ (N_1-N_2)}{N}$

$$= \frac{(211 \times 5) + (64{\cdot}76 - 67)\ (88-94)}{182}$$

$$= \frac{1055 + (-2{\cdot}24 \times -6)}{182}$$

$$= \frac{1055 + 13{\cdot}44}{182}$$

$$= \frac{1068{\cdot}44}{182} = 5{\cdot}87$$

गुणक $\frac{\delta_M}{M} = \frac{5{\cdot}87}{64{\cdot}76}$

09

माध्य विचलन के गुण

(1) निश्चित माध्य विचलन, अपकिरण का एक निश्चित माप है तथा इसका मूल्य सर्वथा शुद्ध अंश तक निकाला जा सकता है परन्तु यह स्मरण रखना चाहिये कि माध्य विचलन समान्तर मध्यक, मध्यका अथवा भूयिष्ठक में से किसी को भी आधार मान कर निकाला जा सकता है अतः जब दो अथवा अधिक श्रेणियों में विचलन की तुलना करनी हो तो यह ध्यान रखना चाहिए कि अलग-अलग श्रेणियों में यदि अलग-अलग मध्यकों के आधार पर विचलन निकाले गये हैं तो तुलना ठीक प्रकार से नहीं की जा सकती। तुलना के लिए सब सम्बन्धित श्रेणियों के विचलन एक ही माध्य से निकाले जाने चाहियें।

(2) सब तथ्यों से प्रभावित — माध्य विचलन सब मदों के आधार पर निकाला जाता है क्योंकि इसमें सब मदों के मध्यक में विचलन की औसत ली जाती है।

(3) चरम मदों से कम प्रभावित — माध्य विचलन चरम मदों (extreme items) से कम प्रभावित होता है क्योंकि इसमें शुद्ध विचलन ही लिये जाते हैं। प्रमाप विचलन की भांति उनके वर्ग नहीं लिये जाते।

(4) सरल आगणन — माध्य विचलन का आगणन बहुत सरल है क्योंकि इसके अन्तर्गत न तो जटिल गणितीय सूत्रों का प्रयोग करने की आवश्यकता है और न लम्बे जोड़ गुणा ही करने पड़ते हैं।

(5) समझने में सरल — माध्य विचलन समझने में भी सरल है क्योंकि इतना बतला देना पर्याप्त है कि माध्य विचलन किसी भी माध्य से विचलनों के योग का औसत मूल्य होता है।

दोष —

(1) चिन्हों को छोड़ना — माध्य विचलन निकालने में विचलनों का योग किया जाता है तब उनके धन (+) तथा ऋण (—) चिन्हों पर कोई ध्यान नहीं दिया जाता बल्कि सब विचलनों को सकारात्मक (धन) मान कर जोड़ लिया जाता है। यह कुछ तर्क सगत नहीं जान पड़ता। साथ ही इस पर आगे गणितीय प्रयोग नहीं किये जा सकते।

(2) अविश्वसनीय — माध्य विचलन अधिक विश्वसनीय नहीं है क्योंकि भूयिष्ठक के तो अनिश्चित होने के कारण उससे विचलन निकालना ही अनुपयुक्त है, मध्यका चरम सीमाओं (मूल्यों) से अधिक प्रभावित हो सकता है। इसके साथ ही यह भी स्पष्ट है कि मध्यका तथा समान्तर मध्यक से निकाले गये विचलनों में अन्तर होता है।

उपरोक्त दोष होते हुए भी सरलता तथा निश्चितता के कारण वाणिज्य क्षेत्र में इसका प्रयोग किया जाता है परन्तु व्यावहारिक रूप में प्रमाप विचलन अधिक प्रचलित है जिसका विवरण आगे दिया गया है।

प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

इससे पूर्व यह बतलाया जा चुका है कि माध्य विचलन, धन (+) तथा ऋण

(–) के चिन्हो का ध्यान न रखते हुए कुल विचलनों का औसत होता है। वास्तव मे यह बीजगणित के सिद्धान्तो की अवहेलना है परन्तु हमे कुल विचलन लेने होते हैं उनकी दिशा को महत्व नही देना होता इसलिए हम सब विचलनो को चिन्हों के ध्यान दिये बिना जोड लेते हैं। इस गणितीय अशुद्धि अथवा अवहेलना को ठीक करने के लिये विचलन ज्ञात करने की एक और पद्धति काम मे लाई जाती है। इस पद्धति के अन्तर्गत समान्तर मध्यक निकाल कर इससे सब मदो के विचलन निकाल लेते हैं और फिर सब विचलनो के वर्ग (squares) निकाल लेते हैं। अन्त मे इन वर्ग सख्याओ को जोडकर उनका औसत ले लेते हैं तथा प्राप्त अकों का वर्गमूल निकाल लेते हैं। इस प्रकार जो अंक प्राप्त होता है वह प्रमाप विचलन (standard deviation) कहलाता है। वर्गमूल निकालने से पहले जो मूल्य आता है उसे द्वितीय अपकिरण की घात (Second Moment of Dispersion) या विचरणाक (Variance) भी कहते हैं।

प्रमाप विचलन को मध्यक भूल (Mean error) मध्यक वर्ग की भूल (Error of Mean square or Mean square Error) तथा मूल मध्यक वर्ग विचलन (Root Mean square deviation) भी कहते हैं। इन सब नामो का कारण यह है कि प्रमाप विचलन निकालने के लिए विचलनो के वर्ग निकाल कर उनका औसत लेकर फिर वर्ग मूल निकाला जाता है। इसमें वर्गों का महत्व अधिक है इसलिये इसके प्रत्येक नाम के साथ "वर्ग" शब्द जुडा है।

प्रमाप विचलन निकालने के लिये निम्नलिखित सूत्र (formula) काम मे लाया जाता है

व्यक्तिगत श्रेणी — (प्रत्यक्ष रीति)

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

σ = (sigma small) प्रमाप विचलन (standard deviation) जो ग्रीक लिपि का अक्षर है।

*d = (deviation) वास्तविक स० म० से विचलन ($X - \overline{X}$)

Σd^2 = विचलनो के वर्गों का योग।

N = मदो की सख्या।

दो श्रेणियो की तुलना के लिए साधारणतया प्रमाप विचलन काम मे नही लाया जाता क्यो कि यह भी एक निरपेक्ष प्रमाप है। तुलना के लिए प्रमाप गुणक (coefficient of standard deviation) काम में लाते हैं। प्रमाप विचलन को समान्तर मध्यक (arithmetic mean) से भाग देने से प्रमाप विचलन का गुणक निकल आता है। प्रमाप विचलन सदा समान्तर मध्यक से ही निकाला जाता है।

---

* d $\overline{X}$ लिखने की कोई विशेष आवश्यकता नही है क्यो कि प्रमाप विचलन मे विचलन सदा समान्तर माध्यक से ही निकाले जाते हैं।

क्यो कि समान्तर मध्यक से निकाले गए विचलनो के वर्ग का योग अन्य मध्यक से निकाले गए विचलनो के वर्गों के योग की तुलना मे सबसे कम होता है ।

नीचे प्रमाप विचलन के कुछ उदाहरण दिए जाते हैं।

उदाहरण 9 14

निम्नलिखित श्रेणी मे 10 लडको के तोल पौंड में दिये गये हैं। प्रमाप विचलन तथा उसका गुणाक ज्ञात कीजिये ।

101, 104, 109, 110, 114, 120, 136, 144, 148, 154

प्रामप विचलन

1 तौल पौंडो में X	2 मध्यक (124) $\overline{X}$ से विचलन d $(X - \overline{X})$	1 विचलन के वर्ग d^2
101	− 23	529
104	− 20	400
109	− 15	225
110	− 14	196
114	− 10	100
120	− 4	16
136	12	144
144	20	400
148	24	576
154	30	900
N = 10 ΣX = 1,240		Σd^2 = 3486

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{1,240}{10}$$

$$\overline{X} = 124$$

$$\sigma = \Sigma\sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{3486}{10}}$$

$$= 18\ 67$$

प्रमाप विचलन (coefficient of S. D) गुणक $= \frac{18\ 67}{124}$

$= .15$

यह स्मरण रखना चाहिये कि गुणाक सदा 1 से कम होता है । प्रमाप विचल में विचलन निकालते समय ± चिन्हों का सदा ध्यान रखना चाहिए ।

प्रमाप विचलन निकालने की एक और प्रत्यक्ष रीति है जिसके अनुसार मूल्यों निकाल लिये जाते हैं । तत्पश्चात् मूल्यों के योग का वर्ग निकाल कर उसमें मदों व

संख्या का भाग दे दिया जाता है। भागफल को मूल्यों के अलग-अलग प्राप्त वर्गों के योग में से घटा दिया जाता है और इसे फिर मदों की संख्या से भाग देकर इसका वर्गमूल निकाल लिया जाता है। यही प्रमाप विचलन है। इसके लिए निम्न सूत्र है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}}{N}}$$

σ = प्रमाप विचलन (Standard Deviation)

Σx^2 = मूल्यों के वर्ग का योग (Square total of the values)

Σx = मूल्यों का योग (sum total of the values)

N = मदों की संख्या (Number of items)

उदाहरण न० 9·15

पिछली तालिका से कुल-वर्ग द्वारा प्रमाप विचलन ज्ञात कीजिये।

प्रमाप विचलन (कुल वर्ग रीति द्वारा)

मूल्य (X) (तौल पौंडों में)	मूल्यों के वर्ग (X^2)
101	10,201
104	10,816
109	11,881
110	12,100
114	12,996
120	14,400
136	18,496
144	20,736
148	21,904
154	23,716
N = 10 ΣX = 1240	1,57,246 ΣX^2

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - \frac{(\Sigma x)^2}{N}}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{1,57,246 - \frac{(1240)^2}{10}}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{1,57,246 - 1,53760}{10}}$$

$$= \sqrt{348 6}$$

$$= 18 67$$

लघु रीति—प्रमाप विचलन लघुरीति द्वारा भी निकाला जा सकता है। लघुरीति से प्रमाप विचलन निकालने में कल्पित समान्तर मध्यक का प्रत्येक मूल्य से विचलन लेकर

उनके वर्गों का योग लगा लेते है। फिर जिस कालम मे कल्पित मध्यक से विचलन निकाले गये हैं उसका, चिन्हों को ध्यान में रखकर, योग लगा लेते है। अब हमारे सामने दो संख्याए हैं। एक तो कल्पित मध्यक विचलनो के वर्गों का योग तथा दूसरी कल्पित मध्यक से विचलनो का योग। पहली संख्या (वर्गों के योग) को मदों की सख्या से भाग देकर उसमे से विचलनो के योग को मदो की सख्या मे भाग देकर प्राप्त सख्या का वर्ग घटा देते हैं। जो सख्या प्राप्त होती है उसका वर्गमूल ही प्रमाप विचलन है। इसका सूत्र नीचे दिया है।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2}$$

σ = प्रमाप विचलन (Standard deviation)

Σx = कल्पित मध्यक से लिये गये विचलनो का योग (total of deviations from assumed mean)

Σx^2 = कल्पित मध्यक से लिये गये विचलनो के वर्गों का योग (Total of squares of deviations from assumed mean)

N = मदो की सख्या (Number of items)

उपरोक्त सूत्र को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है।

$$\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma x^2 . N - (\Sigma x)^2}$$

उदाहरण 9 16

लघु रीति द्वारा पिछली सारणी मे दिए गए मूल्यो का प्रमाप विचलन निकालिए।

प्रमाप विचलन

मद (तोल पौंडो में) X	कल्पित मध्यक A = 114 से विचलन x (X–A)	कल्पित मध्यक से विचलनो के वर्ग (x^2)
101	−13	169
104	−10	100
109	− 5	25
110	− 4	16
114	0	0
120	6	36
136	22	484
144	30	900
148	34	1,156
154	40	1,600
N = 10	−32+132 Σx=100	= 4,486 Σx^2

कल्पित समान्तर मध्यक (A) = 114

असली समान्तर मध्यक $(\bar{X}) = (A) + \frac{\Sigma x}{N}$

$= 114 + \frac{110}{}$

= 124 पौंड

प्रमाप विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2}$

या $= \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma x^2 . N - (\Sigma x)^2}$

$= \frac{1}{10}\sqrt{4,486 \times 10 - (100)^2}$

$= \frac{1}{10}\sqrt{44,860 - 10,000}$

$= \frac{1}{10}\sqrt{34,860} = \frac{1}{10} \times 186.7$

$= 18.67$

खंडित श्रेणी मे प्रमाप विचलन निकालना : (प्रत्यक्ष रीति)

खंडित श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालने मे साधारणतया ऊपर बतलाई हुई रीतियो का ही प्रयोग किया जाता है। इस श्रेणी में विचलनो के वर्गों को आवृत्ति से गुणा करने से ही कुल वर्ग संख्या ज्ञात होती है । खंडित माला में प्रमाप विचलन *निकालने का सूत्र निम्नलिखित है।*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

यहा f से तात्पर्य frequency अर्थात् आवृत्ति से है।

उदाहरण नं० 9·17

निम्नलिखित सारणी से प्रमाप विचलन तथा उसका गुणक ज्ञात कीजिये —

लम्बाई इंचो मे	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
आवृत्ति	5	3	7	10	13	18	11	6	4	3	2

प्रमाप विचलन

1 इचों में लम्बाई X	2 आवृत्ति f	3 स० मध्यक से $\overline{X}$ विचलन (59.6) d (X−$\overline{X}$)	4 विचलनो के वर्ग d^2	5 कुल वर्ग (2×4) fd^2	6 fX (1×2)
55	5	−4 6	21 16	105 80	275
56	3	−3 6	12 96	38 88	168
57	7	−2 6	6.76	47.32	399
58	10	−1 6	2 56	25 60	580
59	13	− 6	36	4 68	767
60	18	− ·4	16	2 88	1080
61	11	1 4	1.96	21 56	671
62	6	2 4	5.76	34 56	372
63	4	3 4	11.56	46 24	252
64	3	4 4	19.36	58 08	192
65	2	5 4	29 16	58.32	130
	82 N			443 92 Σfd^2	4,886 ΣfX

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{N}$$

$$= \frac{4,886}{82}$$

$$= 59\ 6$$

$$\text{प्रमाप विचलन या } \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{443\ 92}{82}}$$

$$= \sqrt{5\ 41}$$

$$= 2\ 33$$

प्रमाप विचलन (Coefficient of S. D.) गुणक = $\frac{2\ 33}{59\ 6}$

= ·04

खडित श्रेणी मे लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन —

खडित श्रेणी में लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकाला जा सकता है। इसके लिए एक कल्पित समान्तर मध्यक का मूल्यो से विचलन निकाल लीजिए और उनको आवृतियों से अलग-अलग गुणा कर कुल विचलन निकाल लीजिए। इनके योग को मदों की संख्या (आवृति) से भाग देकर उसका वर्ग लीजिए। इसे हम 'अ' कहेंगे। तत्पश्चात्

कल्पित मध्यक से प्राप्त मूल्यो के कुल विचलनो को फिर से अलग-अलग विचलनो (x) से गुणा करके उसके योग में N का भाग दे दीजिए। उसे 'ब' कहिए। 'ब' मे से 'अ' को घटा कर उसका वर्गमूल ले लीजिए। यही प्रमाप विचलन है। प्रमाप विचलन का लघु रीति का सूत्र निम्नलिखित है :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$$

$$\text{या } \sigma = \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma fx^2 \cdot N - (\Sigma fx)^2}$$

यह सूत्र सामान्य श्रेणी के सूत्र जैसा ही है इस मे केवल f और जुडा हुआ है जिसका तात्पर्य frequency (आवृति) से है।

प्रमाप विचलन निकालने के लिए निम्न सूत्रो का भी प्रयोग किया जाता है, लेकिन यह सब अधिक समय लेते हैं—

(i) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - (\overline{X} - A)^2}$

(ii) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2 - N(\overline{X} - A)}{N}}$

(iii) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fX^2 - N \cdot \overline{X}^2}{N}}$

(iv) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2}{N} - \overline{X}^2}$

(v) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma (X - \overline{X})^2}{N}}$

उदाहरण 9·18

पिछली सारणी मे दिये गये अङ्कों से लघु रीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालिए।

प्रमाप विचलन

1 मद लम्बाई इंचो में X	2 आवृत्ति (f)	3 कल्पित मध्यक A=(60) से विचलन x (X–A)	4 कुल विचलन fx (2×3)	5 कुल विचलन (fx) × विचलन (x) (3×4) fx^2
55	5	–5	–25	125
56	3	–4	–12	48
57	7	–3	–21	63
58	10	–2	–20	40
59	13	–1	–13	13
60	18	0	0	0
61	11	1	11	11
62	6	2	12	24
63	4	3	12	36
64	3	4	12	48
65	2	5	10	50
	82 N		$\Sigma fx = -91+57$ $= -34$	$\Sigma fx^2 =$ 458

प्रमाप विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$

या $\frac{1}{N}\sqrt{\Sigma fx^2 . N - (\Sigma fx)^2}$

$= \frac{1}{82}\sqrt{458 \times 82 - (-34)^2}$

$= \frac{1}{82}\sqrt{37556 - 1156}$

$= \frac{1}{82}\sqrt{36400} = \frac{1}{82} + 190.8 = 2.33$

संतत श्रेणी में प्रमाप विचलन निकालना :–(प्रत्यक्ष रीति)

सतत श्रेणी मे प्रमाप विचलन निकालने की रीति बिल्कुल खडित श्रेणी की तरह ही है। अन्तर केवल इतना है कि सतत श्रेणी में वर्गान्तरों के मध्य बिन्दु निकाल कर एक स्तम्भ (column) में रख लेते हैं जो मूल्य का काम देते हैं।

उदाहरण 9·19

एक परिवार के सदस्यो की आयु का वर्गों में निम्न प्रकार वर्गीकरण किया गया है। परिवार के सदस्यों की आयु का प्रमाप विचलन तथा गुणक निकालिये।

आयु वर्ग वर्षों में	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80
आवृत्ति	2	4	4	8	6	3	2

प्रमाप विचलन

1	2	3	4	5	6	7
आयु वर्ग (वर्षों में)	मध्य बिन्दु X	आवृत्ति (f)	म० मध्यक $\bar{X}$ (45) से विचलन (d) $(X-\bar{X})$	मध्य बिन्दु × आवृत्ति (2×3) fX	विचलन के वर्ग (d^2)	आवृत्ति × वर्ग (3 × 6)
10–20	15	2	− 30	30	900	1,800
20–30	25	4	− 20	100	400	1,600
30–40	35	4	− 10	140	100	400
40–50	45	8	0	360	0	0
50–60	55	6	10	330	100	600
60–70	65	3	20	195	400	1,200
70–80	75	2	30	150	900	1,800
		29 N		1,305 ΣfX		7,400 Σfd^2

समान्तर मध्यक $(\bar{X}) = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{1305}{29} = 45$

प्रमाप विचलन $(\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{N}}$

$= \sqrt{\frac{7400}{29}}$

$= \sqrt{255\ 17}$

$= 15\ 97$

प्रमाप विचलन गुणक (Coefficient of S D) $= \frac{15\ 97}{45}$

लघु रीति—जब वास्तविक समान्तर मध्यक पूर्णांक नहीं होता है तो प्रत्यक्ष रीति से प्रमाप विचलन निकालना कठिन हो जाता है। ऐसी परिस्थिति में लघुरीति का प्रयोग बहुत आसान रहता है। सतत श्रेणी में भी लघुरीति द्वारा प्रमाप विचलन निकालने के लिये उसी सूत्र का प्रयोग होता है जिसका प्रयोग खंडित श्रेणी में करते हैं।

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2} . i$$

या $\frac{i}{N}\sqrt{\Sigma fx^2 \, N - (\Sigma fx)^2}$

i = (interval) वर्ग विस्तार

नोट—वर्ग विस्तार (i) का प्रयोग सतत श्रेणी में ही जहां वर्ग-विस्तार समान हों करना चाहिए अन्यथा खंडित श्रेणी वाले सूत्र की तरह $\left(\frac{i}{N}\right)$ के बजाय $\frac{1}{N}$ का ही प्रयोग करना चाहिए।

उदाहरण 9.20

निम्नी सारणी में दिए हुए अंकों का प्रमाप विचलन (लघु रीति) द्वारा निकालिए।

1 आयु (वर्षों में)	2 मध्य बिन्दु X	3 आवृत्ति f	4 विचलन कल्पित मध्यक A=(55) से (दस-दस में) (X − A) x	5 कुल विचलन (3×4) fx	6 कुल विचलन × विचलन (4×5) fx^2
10–20	15	2	−4	− 8	32
20–30	25	4	−3	−12	36
30–40	35	4	−2	− 8	16
40–50	45	8	−1	− 8	8
50–60	55	6	0	0	0
60–70	65	3	1	3	3
70–80	75	2	2	4	8
		29 N		−36+7 Σfx=−29	103 Σfx^2

$$\text{प्रमाप विचलन } (\sigma) = \sqrt{\frac{\Sigma fx^2}{N} - \left(\frac{\Sigma fx}{N}\right)^2}$$

$$\sigma = \frac{i}{N}\sqrt{\Sigma fx^2 . N - (\Sigma fx)^2}$$

$$= \frac{10}{29}\sqrt{103 \times 29 - (-29)^2}$$

$$= \frac{10}{29}\sqrt{2987 - 841}$$

$$= \frac{10}{29}\sqrt{2146}$$

$$= \frac{10}{29} \times 46\ 32 = 15\ 97$$

$$\text{गुणक} = \frac{\sigma}{\overline{X}}$$

$$= \frac{15\ 97}{45} = 355$$

$$\overline{X} = 55 + \left(\frac{-29 \times 10}{29}\right) = 45$$

उपरोक्त प्रश्न मे हम पद–विचलन रीति (step-deviation method) का प्रयोग कर आकलन और भी कम कर सकते हैं। यह याद रहे, जैसा कि अध्याय ७ मे बताया जा चुका है, कि पद-विचलन रीति का प्रयोग केवल उस सतत श्रेणी मे दिए गए मूल्यो के लिए करना चाहिए जो समान वर्ग विस्तार मे प्रस्तुत किए गए हो, इसमे सूत्र वही रहता है।

उदाहरण नं० 9 21

उदाहरण 9 20 मे पद विचलन-रीति से प्रमाप विचलन और उसका गुणक निकालिए।

1 आयु (वर्षों मे)	2 पद विचलन stop deviations x कल्पित मध्यक A = 35	3 आवृत्ति f	4 कुल विचलन fx (2 × 3)	5 कुल विचलन (fx) × विचलन (x) fx^2 (2 × +)
10 – 20	–2	2	–4	8
20 – 30	–1	4	–4	4
30 – 40	0	4	0	0
40 – 50	1	8	8	8
50 – 60	2	6	12	24
60 – 70	3	3	9	27
70 – 80	4	2	8	32
		29 N	29 Σfx	103 Σfx^2

$$\overline{X} = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N} \times i\right) \quad [\text{जहा } A = 35 \text{ और } i = 10]$$

$$= 35 + \left(\frac{29 \times 10}{29}\right)$$

$$= 45$$

$$\sigma = \frac{i}{N}\sqrt{\Sigma fx^2 \quad N - (\Sigma fx)^2}$$

$$= \frac{10}{29}\sqrt{103 \times 29 - (29)^2}$$
$$= \frac{10}{29}\sqrt{2983 - 841}$$
$$= \frac{10}{29} \times 46\ 32 \qquad = 15{\cdot}97$$

गुणक $= \frac{\sigma}{\bar{X}}$

$$= \frac{15\ 97}{45} = 355$$

विचरण गुणक (CV) = 355×100
$= 35\ 5\%$

यदि प्रश्न मे वर्गान्तर (class interval) अवरोही क्रम मे दिए गए हो तो यह आवश्यक है कि पद विचलनो मे 0 से पहिले + के चिन्ह लगाए जाए और 0 से बाद मे (−) के चिन्ह। देखिए उदाहरण 9 23

विचरण गुणक (Coefficient of Variation) —जब हम प्रमाप विचलन गुणक निकाल लेते है तो कभी-कभी उसे प्रतिशत में रखा जाता है इसे विचरण गुणक कहते हैं। ऊपर दिए हुए उदाहरण में 15·97 प्रमाप विचलन है, इसका गुणक $\frac{15\ 97}{45}$ अर्थात् 355 हुआ। इसका विचरण गुणक निकालने के लिए इसे 100 से गुणा करना होगा अर्थात् विचरण गुणक $355 \times 100 = 35\ 5\%$ हुआ।

दो श्रेणियो मे विचरण की तुलना करने में प्राय· प्रमाप विचलन गुणक (coefficient o fstandard deviation) अथवा विचरण गुणक (coefficient of variation [CV] का ही प्रयोग किया जाता है। विचरण गुणक निकालने के लिए प्रमाप विचलन गुणक को 100 से गुणा करना पडता है। विचरण गुणक को प्रतिशत गुणक (Percentage Variation) भी कहते है। यदि दो या अधिक श्रेणियो में विचरणता (variability), समता (consistency) सजातिता (homogeneity), विजातिता (heterogeneity) आदि की तुलना करनी हो तो विचरण गुणक (coefficient of variation) निकाला जाता है।

उदाहरण 9 22

निम्नलिखित सारणी में विद्यार्थियो के दो वर्गों के तौल सेरो में दिए गए हैं। आगणन द्वारा बतलाइये कि कौन से समूह के तौल में विचरण की मात्रा अधिक है।

सेरा मे तौल	अ वर्ग	ब वर्ग
20 − 30	7	5
30 − 40	10	9
40 − 50	20	21
50 − 60	18	15
60 − 70	7	6
योग	62	56

विचरण की तुलना

तौल (सेरो मे)	अ वर्ग				ब वर्ग			
	आवृत्ति f	पद विचलन (Step-deviations) x	कुल विचलन (2 × 3) fx	कुल विचलन × विचलन $fx\,x = fx^2$ (3 × 4)	आवृत्ति f	पद विचलन (Step-Deviations) x	कुल विचलन (6 × 7) fx	कुल विचलन × विचलन $fx\,x$ (7 × 8) fx^2
1	2	3	4	5	6	7	8	9
20 – 30	7	–2	–14	28	5	–1	–5	5
30 – 40	10	–1	–10	10	9	0	0	0
40 – 50	20	0	0	0	21	1	21	21
50 – 60	18	1	18	18	15	2	30	60
60 – 70	7	2	14	28	6	3	18	54
	62 N		8 Σfx	84 Σfx^2	56 N		64 Σfx	140 Σfx^2

अ वर्ग

$$\text{स० मध्यक } \overline{X} = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N} \cdot i\right) \quad [\text{ जहां } A = 45 \text{ और } i = 10]$$

$$= 45 + \left(\frac{8 \times 10}{62}\right) = 46{\cdot}29$$

$$\text{प्रमाप विचलन } (\sigma) = \frac{i}{N}\sqrt{\Sigma fx^2 \cdot N - (\Sigma fx)^2}$$

$$= \frac{10}{62}\sqrt{84 \times 62 - (8)^2}$$

$$= \frac{10}{62}\sqrt{5208 - 64}$$

$$= \frac{10}{62}\sqrt{5144} = \frac{10}{62} \times 71{\cdot}72 = 11{\cdot}56$$

$$\text{प्र० वि० गुणक} = \frac{\sigma}{\overline{X}} = \frac{11{\cdot}56}{46{\cdot}29}$$

$$= {\cdot}249$$

$$\text{विचरण गुणक (CV)} = {\cdot}249 \times 100 = 24{\cdot}9\%$$

ब वर्ग

$$\text{स० म० } (\overline{X}) = 35 + \left(\frac{64 \times 10}{56}\right)$$

$$= 35 + 11{\cdot}43 = 46{\cdot}43$$

$$\text{प्रमाप विचलन } (\sigma) = \frac{10}{56}\sqrt{140 \times 56 - (64)^2}$$

$$= \frac{10}{56}\sqrt{7840 - 4096}$$

$$= \frac{10}{56}\sqrt{3744}$$

$$= \frac{10}{56} \times 61{\cdot}19 = 10{\cdot}93$$

$$\text{प्र० वि० गुणक} = \frac{10{\cdot}93}{46{\cdot}43} = {\cdot}235$$

$$\text{विचरण गुणक} = {\cdot}235 \times 100 = 23{\cdot}5\%$$

उदाहरण 9·23

निम्नलिखित तालिका में 55 विद्यार्थियों द्वारा प्राप्तांकों का वर्गीकरण किया गया है। इनका प्रमाप विचलन तथा विचरण गुणक (CV) निकालिए—

अंक	91–100	81–90	71–80	61–70	51–60	41–50	31–40	21–30	11–20	1–10
विद्यार्थी	1	2	3	6	11	12	10	6	3	1

हल —

1 अंक	2 विद्यार्थी f	3 पद विचलन [step-deviations] x	4 कुल विचलन (2 × 3) fx	5 कुल विचलन × विचलन $fx.x$ (3×4) fx^2
91–100	1	4	4	16
81–90	2	3	6	18
71–80	3	2	6	12
61–70	6	1	6	6
51–60	11	0	0	0
41–50	12	–1	–12	12
31–40	10	–2	–20	40
21–30	6	–3	–18	54
11–20	3	–4	–12	48
1–10	1	–5	– 5	25
	55 N		Σfx (–45)	231 Σfx^2

उपरोक्त प्रश्न सतत श्रेणी (सम्मिलित inclusive) में है तथा मूल्य अवरोही क्रम में व्यवस्थित है। अतः विचलनों में चिन्ह 0 से पहिले (+) में है और 0 से बाद में (–) में।

$$\text{स॰ मध्यक } \overline{X} = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N} \cdot i\right) \text{ [जहां } A = 55\ 5 \text{ और } i = 10]$$

$$= 55\ 5 + \left(\frac{-45 \times 10}{55}\right)$$

$$= 47{\cdot}32$$

$$\text{प्रमाप विचलन } (\sigma) = \frac{i}{N}\sqrt{\Sigma xf.^2\ N - (\Sigma fx)^2}$$

$$= \frac{10}{55}\sqrt{231 \times 55 - (-45)^2}$$

$$= \frac{10}{55}\sqrt{12705 - 2025}$$

$$= \frac{10}{55}\sqrt{10680}$$

$$= \frac{10}{55} \times 103\ 34 = 18{\cdot}79$$

$$\text{विचरण गुणक CV} = \frac{\sigma}{\overline{X}} \times 100$$

$$= \frac{18{\cdot}79}{47{\cdot}32} \times 100$$

$$= 39\ 7\%$$

उदाहरण 9·24

एक कालर व्यापारी नवयुवको को लुभाने के लिये नई तरह के कालर [collar] बनाने का विचार कर रहा है। विद्यार्थियो के एक वर्ग के गले की परिधि [Circumference] निम्न है।

मध्य बिन्दु इन्चो मे	12 5	13	13 5	14	14 5	15	15 5	16	16 5
विद्यार्थी	4	19	30	63	66	29	18	1	1

प्रमाप विचलन निकालिये तथा $\bar{X} \pm 3\sigma$ *को आधार मानकर यह मालूम* कीजिये कि वह सबसे बडा तथा सबसे छोटा कालर किस माप का बनाये कि उसके लगभग सब ग्राहको की आवश्यकता की पूर्ति हो जाय। इस बात को ध्यान मे रखना है कि कालर औसत मे गले के माप से 75 इन्च बडा पहना जाता है।

प्रमाप विचलन

1 मध्य बिन्दु इन्चो X	2 आवृत्ति f	3 कल्पित मध्यक से विचलन x A = 14 5	4 कुल विचलन (2×3) fx	5 (3×4) fx^2
12 5	4	−2 0	−8 0	16 00
13 0	19	−1 5	−28.5	42 75
13 5	30	−1 0	−30 0	30 00
14 0	63	−0 5	−31 5	15 75
14 5	66	0	0	0
15 0	29	0 5	14 5	7.25
15 5	18	1 0	18 0	18 00
16 0	1	1 5	1.5	2.25
16 5	1	2 0	2 0	4 00
	231 N		$\Sigma fx = [-62]$	136 00 Σfx^2

उपरोक्त प्रश्न को सतत श्रेणी का ही प्रश्न मानना चाहिए। यहा मूल्यो का विस्तार [i] केवल 5 इन्च मे ही है अत पद विचलन रीति अपनाना ठीक नहीं रहेगा और न [i] का प्रयोग ही।

$$\text{समान्तर मध्यक } \bar{X} = A + \frac{\Sigma fx}{N}$$

$$= 14\ 5 + \left(\frac{-62}{231}\right)$$

$$= 14.5 - \frac{62}{231}$$

$= 14.50 - .27$

$= 14.23$

प्रमाप विचलन $[\sigma] = \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma fx^2 \cdot N - (\Sigma fx)^2}$

$= \frac{1}{231}\sqrt{136 \times 231 - (-62)^2}$

$= \frac{1}{231}\sqrt{31416 - 3844}$

$= \frac{1}{231}\sqrt{27572}$

$= \frac{1}{231} \times 166.0 = .72$

कालर का बड़े से बड़ा माप $= \overline{X} + 3\,(\sigma) + .75$

$= 14.23 + 3\,(.72) + .75$

$= 17.14$ इंच

कालर का छोटे से छोटा माप $= \overline{X} - 3\,(\sigma) + .75$

$= 14.23 - 3\,(.72) + .75$

$= 12.82$ इंच

संयुक्त-प्रमाप विचलन (Combined Standard Deviation) जब दो या अधिक सघटकों (components) का अलग-अलग प्रमाप विचलन दिया हुआ हो तो उनसे संयुक्त प्रमाप विचलन भी निकाला जा सकता है। उदाहरण 7.20 में हमने संयुक्त समान्तर मध्यक निकालना सीखा था। उसी प्रकार संयुक्त प्रमाप विचलन भी निम्न सूत्र से निकाला जा सकता है—

$$\sigma_{12 \ldots n} = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2+\triangle_1^2)+N_2(\sigma_2^2+\triangle_2^2)+\ldots N_n(\sigma_n^2+\triangle_n^2)}{N_1+N_2+\ldots N_n}}$$

जहां—

N_1, N_2 आदि = प्रथम, द्वितीय आदि सघटकों में मदों की संख्या

σ_1, σ_2 आदि = प्रथम, द्वितीय आदि सघटकों में प्रमाप विचलन

$\triangle_1 = (\overline{X}_1 - \overline{X}_{12 \ldots n})$ संयुक्त समान्तर मध्यक का प्रथम सघटक के समान्तर मध्यक में से अन्तर

$\triangle_2 = (\overline{X}_2 - \overline{X}_{12 \ldots n})$ संयुक्त समान्तर मध्यक का द्वितीय सघटक के समान्तर मध्यक में से अन्तर।

उदाहरण 9.25

एक फैक्टरी में 20 औरतें व 30 आदमी मजदूरी करते हैं। औरतों को प्रति सप्ताह 25 रुपये व आदमियों को प्रति सप्ताह 20 रुपये औसत मजदूरी मिलती है। औरतों व आदमियों की मजदूरी का प्रमाप विचलन क्रमशः 5 व 3 है। संयुक्त प्रमाप विचलन निकालिए।

हल

संयुक्त प्रमाप विचलन निकालने के लिए संयुक्त समान्तर मध्यक निकालना आवश्यक है।

औरतों को (1) व आदमियों को (2) मानने पर

$$\bar{X}_{12} = \frac{N_1 \bar{X}_1 + N_2 \bar{X}_2}{N_1 + N_2}$$

$$= \frac{(20 \times 25) + (30 \times 20)}{20 + 30}$$

$$= \frac{500 + 600}{50}$$

$$= \frac{1100}{50} = 22 \text{ रुपये}$$

अब $\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + \Delta_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + \Delta_2^2)}{N_1 + N_2}}$

$\sigma_1 = 5, \quad \sigma_2 = 3$

$\Delta_1 = (\bar{X}_1 - \bar{X}_{12}) = (25 - 22) = 3$

$\Delta_2 = (\bar{X}_2 - \bar{X}_{12}) = (20 - 22) = -2$

$$\therefore \sqrt{\frac{20\,(5^2 + 3^2) + 30\,[3^2 + (-2)^2]}{20 + 30}}$$

$$= \sqrt{\frac{20\,(25+9) + 30\,(9+4)}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{(20 \times 34) + (30 \times 13)}{50}}$$

$$= \sqrt{\frac{680 + 390}{50}}$$

$$= \sqrt{21.4}$$

$$= 4.626$$

अपकिरण के अन्य माप

अपकिरण को ज्ञात करने के अन्य छोटे छोटे माप और भी हैं जिनका अधिक प्रयोग नहीं है। कुछ मुख्य माप नीचे दिए गए हैं —

माध्य अन्तर (Mean Difference)

माध्य अन्तर भी माध्य विचलन के समान ही है। फर्क इतना सा है कि माध्य विचलन में तो विचलन समान्तर मध्यक या मध्यका से लिए जाते हैं लेकिन माध्यान्तर (Mean Difference) में अन्तर मूल्यों में आपस में निकाले जाते हैं। सबसे ऊपर वाले मूल्य को बाकी सब मूल्यों में से क्रमश घटाया जाता है। इन अन्तरों (Δ) को अगले खाने में रखा जाता है। अब उस दूसरे खाने में भी सबसे ऊपर वाले अन्तर को बाकी अन्तरों में से क्रमश घटाकर तीसरे खाने में रख दिया

जाना है। इस प्रकार से घटाने का क्रम तब तक जारी रहता है जब तक अन्तिम खाने मे केवल एक अन्तर ही रह जाए। अब प्रत्येक खाने मे लिखे अन्तरो को (मूल्यो को नही) जोड लीजिए और इन जोडो का भी जोड ज्ञात कर लिजिए। इसे $\Sigma\Delta$ कहा जाता है। इसमे n का भाग दे दीजिए। यह निम्न प्रकार निकाला जाता है।

$$n = \frac{1}{2}(N-1)$$ [N= कुल मदो की सख्या]

$$\text{माध्यान्तर (Mean Difference)} = \frac{\Sigma\Delta}{n}$$

उदाहरण 9 26

निम्न मूल्यो का माध्यान्तर निकालिए —

10, 12, 15, 20, 25

हल —

मूल्य	अन्तर Δ				योग
10					
12	2				2
15	5	3			8
20	10	8	5		23
25	15	13	10	5	43
योग	32	24	15	5	76

$$\Sigma\Delta = (32+24+15+5) = 76 \text{ या } (2+8+23+43) = 76$$

$$n = \frac{1}{2} N (N-1)$$

$$= \frac{1}{2}\, 5\,(5-1) = 10$$

$$\text{माध्यान्तर} = \frac{\Sigma\Delta}{n}$$

$$= \frac{76}{10}$$

$$= 7\ 6$$

धनक (Modulus)

धनक (Modulus) का प्रमाप विचलन से वही सम्बन्ध है जो कि माध्यान्तर (Mean Difference) का माध्य विचलन से। प्रमाप विचलन मे तो समान्तर मध्यक से विचलन निकाल कर उनका वर्ग किया जाता है। लेकिन धनक मे मूल्यो का आपस मे ही अन्तर निकाल कर उनका वर्ग लिया जाता है। धनक मालूम करने के लिए हमे अलग अलग अन्तर निकालने की कोई आवश्यकता नही है। निम्न सूत्र से हम सीधे ही धनक ज्ञात कर सकते हैं।

$$C = \sigma\sqrt{2} \text{ या } \sqrt{\frac{2\Sigma d^2}{N}}$$

जहा C = घनक (Modulus) है

अपकिरण की द्वितीय घात (Second Moment of Dispersion) को 2 से गुणा कर गुणनफल का वर्ग मूल निकालने से घनक आजाता है या प्रमाप विचलन को 2 के वर्गमूल से गुणा करने पर भी घनक मालूम हो जाता है।

उदाहरण 9 26 मे

$\sigma = 5\ 46$ और $\frac{|\Sigma d^2|}{N} = 29\ 84$ आता है

अत घनक $C = \sigma\sqrt{2}$

$= 5\ 46 \times \sqrt{2}$

$= 5\ 46 \times 1\ 414$

$= 7\ 72$

$C = \sqrt{\frac{2\Sigma d^2}{N}}$

$= \sqrt{2 \times 29\ 84}$

$= \sqrt{59\ 68}$

$= 7\ 72$

सुतथ्यता (Precision) — यह भी अपकिरण का एक माप है। घनक का उल्टा करने पर (Precision) (P) का मूल्य निकलता है।

सू॰ या $P = \frac{1}{C}$ या $\sqrt{\frac{N}{2\Sigma d^2}}$ या $\frac{1}{\sigma\sqrt{2}}$

उच्चावचन (Fluctuation) —

यह भी अपकिरण का एक माप है। घनक का वर्ग करने पर Fluctuation (F) ज्ञात होता है।

सूत्र — $F = C^2$ या $\frac{2\Sigma d^2}{N}$

अपकिरण की द्वितीय घात (Second Moment of Dispersion) को 2 से गुणा करने पर उच्चावचन का मूल्य ज्ञात होता है।

विचरणाक [(Variance) —

प्रमाप विचलन का वर्ग करने पर विचरणाक (Variance) का मूल्य ज्ञात होता है। विचरणाक का ठीक वही मूल्य होता है जो अपकिरण की द्वितीय घात (Second Moment of Dispersion) का। इसका सूत्र है —

V [variance] $= \sigma^2$ or $\frac{\Sigma d^2}{N}$

विचरणाक का विभ्रम सिद्धान्त (Theory of Errors) में प्रयोग होता है।

यह याद रखना आवश्यक है कि अपकिरण की प्रथम घात (First moment of Dispersion) का मूल्य माध्य विचलन के समान होता है लेकिन

अपकिरण की द्वितीय घात (Second moment of Dispersion) का मूल्य प्रमाप विचलन के समान कदापि नहीं होता है। अपकिरण की द्वितीय घात का वर्गमूल निकालने पर प्रमाप विचलन आता है या प्रमाप विचलन का वर्ग करने पर अपकिरण की द्वितीय घात का मूल्य ज्ञात होता है।

चतुर्थक विचलन, माध्य विचलन और प्रमाप विचलन में संबंध —

यदि आवृत्ति का वटन समित या थोड़ा सा ही असमित हो तो अपकिरण के विभिन्न मापों में निम्न सम्बन्ध पाया जाता है —

प्र० वि० = $\frac{3}{2}$ च० वि०	या	च० वि० = $\frac{2}{3}$ प्र० वि०
मा० वि० = $\frac{4}{5}$ प्र० वि०	या	प्र० वि० = $\frac{5}{4}$ मा० वि०
च० वि० = $\frac{5}{6}$ मा० वि०	या	मा० वि० = $\frac{6}{5}$ च० वि०

यदि कोई से एक माप का मूल्य मालूम हो तो शेष दोनों मापों के मूल्य का भी अनुमान लगाया जा सकता है, जैसे-यदि प्र० वि० 15 है तो उपरोक्त संबंध के आधार पर मा० वि० 12 और च० वि० 10 होगा।

प्रमाप विचलन के गुण —

(1) प्रमाप विचलन सब तथ्यों के आधार पर निकाला जाता है।

(2) यह गणितीय रीतियों पर आधारित है तथा इस पर गणितीय प्रयोग आगे भी किये जा सकते हैं। इसीलिए प्रमाप विचलन का उच्चस्तरीय अध्ययन में बहुत प्रयोग होता है। सह सम्बन्ध (Correlation) ज्ञात करने में प्रमाप विचलन का विशेष स्थान है।

(3) वर्गों द्वारा मूल्य प्राप्त करने के कारण प्रमाप विचलन बीज गणितीय नियमों का पालन करता है। ऋणात्मक (Negative) चिह्न वर्ग लेने से धनात्मक (Positive) हो जाते हैं।

(4) अन्य विचलनों की बजाय प्रमाप विचलन पर आकस्मिक परिवर्तनों का प्रभाव कम पड़ता है।

(5) प्रमाप विचलन में निश्चितता का गुण है।

कमियां —

(1) प्रमाप विचलन का आगणन बहुत जटिल तथा गणितीय है। इसलिये इसको समझना भी सरल नहीं है।

(2) *इस पर बड़े मदों का अधिक प्रभाव पड़ता है क्योंकि मदों का विचलन तो* अधिक होता ही है, उसके वर्ग और भी बड़े होते हैं और वह विचलन को बहुत बड़ा देते हैं।

प्रमाप विचलन के उपरोक्त विवरण से स्पष्ट है कि गणितीय तथ्यों में विवरणों तथा परिवर्तनों का दिग्दर्शन करने में यह महत्वपूर्ण सहयोग देता है। अर्थशास्त्री तथा व्यापारी इसका प्रयोग इसलिये नहीं करते कि इसका आगणन कठिन है तथा यह बड़े बड़े मदों को अधिक महत्व देता है। तो भी जिस प्रकार समान्तर मध्यक सब माध्यकों में अधिक

उपयोगी और महत्वपूर्ण है उसी प्रकार प्रमाप विचलन भी सबसे अधिक प्रचलित, उपयोगी एव महत्वपूर्ण है।

साराश

अपकिरण — अको के विस्तार अथवा बिखराव के माप को कहते है।

विस्तार (Range) — चरम सीमाओ के अन्तर को कहते है। सतत श्रेणी मे वर्गान्तर की उच्चतम तथा निम्नतम सीमा के अन्तर को विस्तार कहते है।

विस्तार की विशेषताए (1) सरलता
(2) अस्थाईपन
(3) चरम सीमाओ के बीच के मूल्यो का विस्तार नही जाना जा सकता।

विस्तार का प्रयोग बहुत सीमित है।

अपकिरण के अन्य माप - (1) चतुर्थक विचलन
(2) माध्य विचलन—स० मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक से
(3) प्रमाप विचलन

सूत्र

माध्य विचलन

प्रत्यक्ष रीति

$$\delta\bar{X} = \frac{|\Sigma fd\,\bar{x}|}{N}$$

$$\delta M = \frac{|\Sigma fd_M|}{N}$$

$$\delta Z = \frac{|\Sigma fd\,z|}{N}$$

लघु रीति

$$\delta_M = \frac{(|\Sigma fd_{M'}| \times i + (M - M')(N_1 - N_2)}{N}$$

$$\delta_{\bar{X}} = \frac{(|\Sigma fx\,i| + (\bar{X} - A)(N_1 - N_2)}{N}$$

माध्य विचलन के गुण (1) निश्चित
(2) सब तथ्यो से प्रभावित
(3) चरम मूल्यो मे कम प्रभावित
(4) सरल आगणन
(5) समझने में सरल

दोष (1) चिन्हो को छोडना
(2) अविश्वसनीय
(3) इन पर आगे गणितीय प्रयोग नही किये जा सकते।

(२) प्रमाप विचलन —

सूत्र [1] व्यक्तिगत श्रेणी में (अ) $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{N}}$

$$(ब)\ \sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X^2 - \left(\frac{\Sigma X}{N}\right)^2}{N}}$$

लघु रीति $\sigma = \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma x^2 N - [\Sigma x]^2}$

$$= \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma x}{N}\right)^2}$$

[2] खंडित या सतत श्रेणी में [अ] $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f d^2}{N}}$

लघु रीति [ब] $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma f x^2}{N} - \left(\frac{\Sigma f x}{N}\right)^2}$ या

$$= \frac{1}{N}\sqrt{\Sigma f x^2 . N - [\Sigma f x]^2}$$

$$गुणक = \frac{\sigma}{\bar{X}}$$

विचरण गुणक (Coefficient of Variation) प्रमाप विचलन गुणक को 100 से गुणा देने से प्राप्त होता है।

संयुक्त प्रमाप विचलन :-

$$\sigma_{12} = \sqrt{\frac{N_1(\sigma_1^2 + \Delta_1^2) + N_2(\sigma_2^2 + \Delta_2^2)}{N_1 + N_2}}$$

प्रमाप विचलन के गुण : [1] सब तथ्यों पर आधारित
[2] गणितीय प्रयोगों के लिये उपयुक्त
[3] बीजगणितीय नियमों का पालन
[4] आकस्मिक परिवर्तनों से कम प्रभावित।
[5] निश्चित

कमियां [1] कठिन आगणन
[2] बड़े मूल्यों से अधिक प्रभावित

[3] चतुर्थक विचलन सूत्र − चतु० वि० $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$

$$चतु०\ वि०\ गुणक = \frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

चतुर्थक विचलन के गुण . [1] सरल
[2] चरम मूल्यों के प्रयोग से मुक्त

दोष : [1] सब मूल्यों को महत्व नहीं दिया जाता।
[2] बड़े मूल्यों से अधिक प्रभावित

EXERCISE IX

Theory

1 Explain the meaning of the term Dispersion and distinguish between absolute and relative measures of dispersion
(B Com Alld 1946)

2 Discuss the various ways in which the differences in the characteristics of frequency distribution are generally measured.
(B Com Luck 1937)

3 What are the moments of dispersion ? Explain their use in practice (M Com Agra 1953)

4 Mention the important methods of measuring dispersion and discuss their comparative merits (B Com Agra 1948)

5 What is meant by dispersion ? What are the methohs of computing measures of dispersion ? Illustrate the practical utility of such measures (M Com Alld 1954)

6 What is Variability ? Explain the different measures of variability

7 'Frequency distribution may either differ in the numerical size of their averages though not necessarily in their formation, or they may have the same values their averages yet differ in their respective formations"—Explain and illustrate how the measures of dispersion afford a supplement to the information about frequency distribution furnished by averages

(B Com Raj, 1961)

8 Write short notes on—Modulus, Variance, Fluctuation, Precision, Percentage Variation, First Moment of Dispersion, Second Moment of Dispersion, Mean Difference

9 Define carefully the mean deviation, standard deviation, and quartile deviation of any given distribution In what problems should each be used ?

(M. A. Alld 1940)

10 If you are given mean, standard deviation and number of items of two different series, and are required to find the standard deviation by combining the two series, state and explain what statistical formula you will use for this purpose

(M Com, Raj, 1963)

11 Explain and illustrate how the measures of dispersion afford a supplement to the information about the frequency distribution given by the averages

Practical (M Com., Raj. 1952)

1 Calculate the mean deviation from the following data :

Unit Values	frequency
Rs.	
1	3
2	7
3	9
4	11
5	11
6	8
7	6
	55

Ans M D Rs. 1 40

2. The monthly wages of 29 workers are given below Find out the mean deviation

Values	No of workers
Rs 10 and under 20	2
20 " " 30	4
30 " " 40	4
40 " " 50	8
50 " " 60	6
60 " " 70	3
70 " " 80	2
	29

Ans. Mean deviation, Rs. 12 41

3. Find out average deviation about median for the following distribution

Value of variable	frequency
6	4
12	7
18	9
24	18
30	15
36	10
42	5

Ans 7.5

4. The following are the rents of 18 houses in a locality. Find out the mean deviation

Rs. 6.50, 5.0, 5 50, 5.25, 4.75, 4 00, 5 00, 4.50, 6 25
3 00, 9 00, 4 50, 4.00, 5.00, 3.75, 5 00, 3.00 5 25

(Hint Arrange the figures) Ans Rs 0.903

5. Find out the mean deviation and mean coefficient of dispersion for the following :

Weekly wage	Workers
Rs. 2 - 4	20
4 - 6	40
6 - 8	30
8 - 10	10

Ans. M. D Rs 1 50

M. Coefficient of D 27

6. Calculate the mean deviation from the following

Marks obtained	10 –,	15 –,	20 –,	25 –,	30 –,	35 –
No of candidates	10	23	29	35	40	52

Marks obtained	40 –,	45 –,	50 –,	55 –,	60 –
No of candidates	70	60	12	9	3

Ans M. D 9 05

7. Find the average deviation from the mean for the following :

Class	frequency
0 — 6	8
6 — 12	10
12 — 18	12
18 — 24	9
24 — 30	6

Ans. A. D = 6 40

8 Find the mean, median and standard deviation of the following table giving the marks obtained by 250 candidates :

No of marks under	No of Candidates
10	15
20	35
30	65
40	150
50	190
60	215
70	240
80	250

Ans $\overline{X} = 38\ 6$

M = ~~37.12~~ 37 06

S.D. = 17.44

9 Differences in the ages of husband and wife in a particular community are given below. Calculate mean and mean deviation

Diff in years	frequency
0 - 5	449
5 - 10	705
10 - 15	507
15 - 20	211
20 - 25	109
25 - 30	52
30 - 35	16
35 - 40	4

Ans $\overline{X} = 10\ 5$

M D. = 5 3

10 From the following frequency table of marks obtained in examination, calculate mean and quartile deviations

Marks	Candidates
10	26
11	201
12	673
13	1,001
14	739
15	310
16	89
17	13
18	1

Ans M D = 92
Q D = 1

11 Find the average and the standard deviation for the following

Years	No of persons
Under 10	15
,, 20	32
,, 30	51
,, 40	78
,, 50	97
,, 60	109

Ans A D = 13 26
S D = 15 30

12 Find out the mean deviation, standard deviation and quartile deviation from the following

First student gets 5 marks
Second student gets 7 marks
Third student gets 9 marks
Fourth student gets 11 marks

Ans. M D = 2
SD = 2 23
Q. D. = 2 5

13. Find Mean and standard deviations of examination marks of 75 students

Marks	20,	25,	30,	35,	40,	45,	50,	55,	60,	65	70,	75
No ..	2	4	7	5	3	8	6	7	5	9	8	4

Marks	80,	85,	90
No .	3	2	2

Ans M. D = 15'29
S D = 18 06

14 Calculate the standard deviation from the data given below .

Frequency	3,	10,	12,	15,	17,	22,	21,	20,	18,	12,	6,	4,	3.
Size of the item	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17

Ans S D = 2 77

15 Sales for five years are given below Find the coefficient of variation

Sales in '000 Rs 230, 390, 582, 799, 1,035

Ans. C. V. = 47.15%

16. Find Standard deviation and coefficient of variation of the following numbers by grouping the numbers in class intervals of 10.

40, 43, 43, 46, 46, 46, 54, 56, 59, 62, 64, 64, 66, 66, 67, 67, 68, 68, 69, 69, 69, 71, 75, 75, 76, 76, 78, 80, 82, 82, 82, 82, 82, 83, 84, 86, 88, 90, 90 91, 91, 92, 95, 102, 127.

Ans. S D = 17.96
C. V. = 24 38%

17. Compare the variatons in the following series of weights of boys.

Weights in seers	A	B	C
20 - 30	7	5	6
30 - 40	10	9	25
40 - 50	20	21	24
50 - 60	18	15	4
60 - 70	7	6	3

Also find which series is more skew.

Ans. C V = A......= 25 %
B .....= 23 5%
C ....= 22 8%

18 *Calculate the standard deviation from the following data :*

Size of the item	6	7	8	9	10	11	12
Frequency.........	3	6	9	13	8	5	4

(B. Com. Nagpur 1944)

Ans S. D = 1.6

19. Find the quartile and standard deviations in the following figures to show whether the variation is greater in the area or the yield.

Years	Area in lakh acres	Yield in lakh bales
1914 - 15	152	49
1915 - 16	114	51
1916 - 17	138	50
1917 - 18	154	45
1918 - 19	144	40
1919 - 20	153	53
1920 - 21	144	59
1921 - 22	117	60
1922 - 23	136	63
1923 - 24	154	60

(Hint. The table may be arranged for calculating Q D)

Ans.	Area	Yield
S D.	13 994	7 042
Coefficient =	'09	.13
Q D =	11	6
Coefficient =	08	.11

Yield is more variable.

20. During the ten weeks of a session the marks obtained by two students taking a course are.

X	Y
58	84
59	56
60	92
54	65
65	86
66	78
52	44
75	54
69	78
52	68

Which of the two was more consistent ?

Ans	X	Y
C. V. =	11.9%	21 1%

Y is more variable. X is more consistent.

21 Find out the variance from the following data :

Year	Exports in rupees	Imports in rupees
1927 - 28	319	250
1928 - 29	339	263
1929 - 30	345	258
1930 - 31	308	206
1931 - 32	263	176
1932 - 33	239	203
1933 - 34	275	182
1934 - 35	280	210
1935 - 36	282	216
1936 - 37	342	199

Ans.	Exports	Imports
Variance = $(S.D)^2$ =	1216 61	847.81

(Variance is square of standard deviation)

22 The marks awarded to 392 candidates at a professional examination are given below. Calculate the standard deviation.

Marks	Frequency
11 - 15	6
16 - 20	12
21 - 25	30
26 - 30	53
31 - 35	77
36 - 40	96
41 - 45	54
46 - 50	37
51 - 55	19
56 - 60	8
	392

Ans. S D. = 9.3

23 Find the standard devitation of the series of the data given below

Marks	No of Students
91 - 100	1
81 - 90	2
71 - 80	3
61 - 70	6
51 - 60	11
41 - 50	12
31 - 40	10
21 - 30	6
11 - 20	3
1 - 10	1

Ans S D = 18 8

24 Below are two random samples of family incomes in a certain city, one taken in 1928 and the other in 1932. Did the depression reduce or increase the spread in income between families ?

Income	No. of families 1928	1932
Under Rs. 500	5	76
500 - 999	15	123
1000 - 1499	115	155
1500 - 1999	190	91
2000 - 2499	82	70
2500 - 2999	63	52
3000 - 3499	27	17
3500 - 3999	19	12
4000 - 4499	10	7
4500 - 4999	6	3
5000 - 5499	3	1
	535	637

Ans 1928 1932
C V.=41% 62%

The depression increased the spread.

25. Find the mean yield of paddy and the standard deviation of the results of 3,061 crop cutting experiments shown in the following table .

Yield of paddy (per acre in lbs)	No of experiments
0 - 400	236
401 - 800	481
801 - 1200	604
1201 - 1600	576
1601 - 2000	419
2001 - 2400	333
2401 - 2800	217
2801 - 3200	87
3201 - 3600	64
3601 - 4000	23
4001 - 4400	14
4401 - 4800	6
4801 - 5200	1
	3061

(B Com Bom 1945)
Ans 833.2 lbs

26. Compile a table showing the frequencies with which words of different lengths occur in this question, treating as the variable the number of letters in each word. Obtain the median, mode and coefficient of variation of the distribution.

Ans Median = 5 letters
Mode = 3 letters
C V. = 55 3%

27 Find out the quartile deviation and its coefficient from the following data

Age	No of students Boys	Girls
10	1	.
11	4	1
12	7	7
13	12	13
14	15	10
15	15	12
16	5	2
17	3	.
18	1	1
	63	46

Both for Boys and Girls
Ans Q D. = 1
Coeff. = ·077

28 Calculate the Quartile deviation and its coefficient from the following table

X	3,	8,	13,	18,	23,	28,	33,	38,	43,	48,	53,	58,	63
f	5	9	28	49	58	82	87	79	50	37	21	6	1

Ans Q D. = 7 5
Coeff 0 25

29. Compare the following two series of figures in respect of their dispersion by Quartile measures.

Height in inches	Weight in lbs.
58	117
56	112
62	127
61	123
63	125
64	130
65	106
59	119
62	121
65	132
55	108

(B Com. Bom. 1949)

Ans.	Height	Weight
Coeff Q D =	.049	.063

30. From the following table compute quartile deviation as wel as a coefficient of skewness.

Size	frequency
2 - 4	5
4 - 6	12
6 - 8	17
8 - 10	27
10 - 12	15
12 - 14	12
14 - 16	10
16 - 18	8
18 - 20	3
	109

Ans. Q D. = 2 875
Coeff. = .29

31. The following table gives the marks of 59 students in Economics. Calculate the semi-interquartile range and its coefficient.

Marks-group	No. of students.
0 - 10	4
10 - 20	8
20 - 30	11
30 - 40	15
40 - 50	12
50 - 60	6
60 - 70	3

Ans. S. I. R. = 11.35
Coeff. = .34

32. Find out Quartile deviation and the coefficient of variation from the following figures

Weights in lbs	No of students
70- 80	12
80- 90	18
90-100	35
100-110	49
110-120	50
120-130	45
130-140	20
140-150	8

Ans Q D = 12.315
C V = 11 36

33 The figures in the table below relate to the size of retail butchers'shops *classified according to their weekly turn over*,

Weekly turn over in £s	All shops	Cooperative shops
Under 15	2,035	135
15 and under 30	5,126	376
30 and under 45	7,204	656
45 and under 60	7,084	759
60 and under 75	5,941	673
75 and under 90	4,612	637
90 and under 105	3,192	459
105 and under 120	2,428	372
120 and under 135	1,697	244
135 and under 150	1,227	202
150 and under 180	1,533	255
180 & over	2,488	442
	44,567	5,210

Find out quartile deviation and standard deviation

	Ans All shops	Coop. Shops
S D. =	£ 48	£ 50
Q D =	29	33

34 The following table gives the heights of students in a class. Find out the quartile deviation.

Heights in inches	No of students
50—53	2
53—56	7
56—59	24
59—62	27
62—65	13
65—68	3

Ans. Q. D. = 2 41

35. The following table gives the earnings of clerks in allied offices in Bombay Find the Quartile deviation.

Earnings in Rs	No
36—40	77
41—45	44
46—50	110
51—55	64
56—60	161
61—65	318
66—70	118
71—75	234
76—80	78
81—85	213
86—90	110
91—95	138
96-100	68

Ans Q D =:12 155

36 For a frequency distribution of marks in history of 20 candidates (grouped in intervals 0-5, 5-10 etc) the mean and standard deviation were found to be 40 and 15 Later it was discovered that the score 43 was misread as 53 in obtaining the frequency distribution Find the corrected mean and standard deviation—corresponding to the corrected frequency distribution (I A S 1957)

$\sqrt{\bar{X}}$=39 95 σ=14·97

Hint-apply $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma X2}{N} - \bar{X}^2}$

37 For a certain group of 'saree' weavers of Banaras, the median and quartile earnings per week are Rs 44 3, Rs 43 0 and Rs 45 9 respectively The earnings for the group range between Rs 40 and Rs 50 Ten percent of the group earn under Rs 42 per week, 13 percent earn Rs 47 and over, and 6 percent Rs 48 and over Put these data in the form of a frequency distribution and obtain an estimate of the mean wage and the standard deviation (R A S 1962)

(P. C. S 1956)

$\bar{X}$=Rs 44 5 σ =Rs.2.1

38 A distribution consists of three components with frequencies of 200, 250 and 300 having means of 25, 10 and 15 and standard deviation of 3, 4 and 5 respectively Find the mean and the S D. of the combined distribution

(M Com Banaras 1954)

$\bar{X}$=16 σ = 7.18

What will happen to $\bar{X}$, σ and variances if

(i) 4 is added to each measurement,

(ii) each measurement is multiplied by 4

Ans —(i) $\overline{X}$ will become $(\overline{X}+4)$

σ will remain the same

σ^2 will remain the same

(ii) $\overline{X}$ will become 4 times

σ will become 4 times

σ^2 will become 16 times

40* Find the actual class groups from the data given below—

x	f
—3	10
—2	15
—1	25
0	25
1	10
2	10
3	5

The mean $\overline{X}$ = 31 and the σ = 15 9

Ans. -0-10, 10-20, 20-30, 30-40, 40-50, 50-60, 60 70

41 Calculate the mean and standard deviation of the following values

94, 95, 96, 93, 87, 79, 73, 69, 78, 67,
78, 82, 83, 89, 95, 103, 108, 117, 130, 97,

Also calculate the percentage of cases lying outside the mean at a distance of $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$, when σ denotes standard deviation

Ans $\overline{X}$ = 90 65 σ = 15 99

Percentage of Cases lying outside $\overline{X} \pm \sigma$ = 30

" " " $\overline{X} \pm 2\sigma$ = 0

" " " $\overline{X} \pm 3\sigma$ = 0

42 If the coefficient of variation of X series is 14·6% and that of Y series is 36 9% and their means are 101 2 and 101 25 respectively find their standard deviations

Ans σ X series = 14 77

σ of Y series = 40 4

43 Mean of 48 items is 9 and their standard deviation is 1 6. Find the sum of squares of all the item—values

Ans 4011 app

Hint—Apply the formula

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2 - N\overline{X}^2}{N}}$$

44. The $\overline{X}$, σ and range of a frequency distribution of 12

are 9,2 and 6 respectively The median of the distribution is the same as the mean Find the $\overline{X}$ and σ of the series if the smallest and the largest values of the series are ignored

Ans — $\overline{X} = 9$

$\sigma = 1732$

45 If the standard deviation of a frequency distribution is 30 estimate the mean deviation and the quartile deviation

Ans — M D = 24 and Q D = 20

46 An analysis of the monthly wages paid to workers in two firms A and B belonging to the same industry gives the following results.

	Firm A	Firm B
No of wage earners	586	648
Average monthly wage	Rs 52 5	Rs 47 5
Variance distribution of wages	100	121

(a) Which firm, A or B pays out the larger amount of monthly wages ?

(b) In which firm A or B is there greater variability in individual wages ?

(c) What are the measures of average monthly wage and the variability in individual wages of all the workers in the firms A and B taken together ?

(I A S 1951)

Ans —(a) B firm gives more wages,

(b) There is greater variability in B firm

(c) $\overline{X}_{12} = 49\ 9$ and $\sigma_{12} = 10\ 8$

47 In any two samples, where the Variates N_1 and N_2 are measured in same units,

$N_1 = 36$ (Summation) $\Sigma x_1^2{}_1 = 49{,}428$

$N_2 = 49$ („) $\Sigma x_2^2{}_2 = 71{,}258$

Compute the value of the standard deviations of the two samples. What additional information is required to calculate the coefficient of the above two samples ?

(B Com Lucknow)

Ans S D of the 1st sample = 37 01

„ 2nd „ = 38 08

दोनों न्यादर्शों की समान्तर मध्यक की और आवश्यकता है क्योंकि इसके बिना विचरण गुणक ज्ञात नहीं हो सकता ।

48 Goals scored by two teams A and B in a football match during a season were as follows :—

No of goals scored in a match	No of Matches	
	A	B
0	27	7
1	9	9
2	8	6
3	5	5
4	4	3

Find which team is more consistent ?

[I A S , 1954, B Com , Raj , 1963]

[Ans —coefficient of variation team A = 123 68

" " " B = 109 2

[Team B is more consistent]

49. The following table gives the mean marks and standard deviations of students of certain ages :—

Age in years	No of students	Mean Marks	S D of Marks
10 – 11	22	143 9	12
11 – 12	18	176 1	7
12 – 13	20	195 2	6

Find the mean marks for all students, as also the standard deviation of marks obtained by students of ages 10—12 years

(M A Raj , 1961)

Ans —Mean marks for all students = 170 66

S D of marks obtained by students

of ages 10—12 years = 18 9

$\overline{X}$ = 158 39

50 From the following table of marks obtained by ten candidates find the coefficient of variation

Statistics :—25, 50, 45, 30, 70, 42, 36, 38, 34, 60

Mathematics :—10, 70, 50, 20, 95, 55, 42, 60, 48, 80

(B. Com , Raj , 1960)

(Ans C V in statistics is 30 5% and in Mathematics 46%)

51. Find the arithmetic averages and S D in factories A and B from the data given below —

Wages	Factory A No of workers	Factory B No of workers
Less than Rs 40	30	45
Rs 40 – 80	25	25
80 – 120	30	35
120 – 160	45	40
160 – 200	25	25
200 – 240	13	20
240 – 280	24	5
280 – 320	8	5
Total	200	200

(M A Raj, 1960)

	Factory A	Factory B
Ans. Mean	137 0	80 8
S. D	114 0	75 6

53 The following table gives the age distribution of students admitted to a college in the years 1959 and 1960 Find which of the two groups is more variable in age.

Ages –	17	18	19	20	21	22	23	24	25
1959	1	3	8	12	14	14	5	3	2
1960	6	22	34	40	32	20	16	9	3

(B. Com, Raj, 1961)

(Ans 1960 year group is more variable)

54 Calculate mean and First Moment of Dispersion from the following income data

Income in rupees	No of persons
Not more than 20	18
„ „ „ 40	25
„ „ „ 60	64
„ „ „ 80	73
„ „ „ 100	89
„ „ „ 120	110
„ „ „ 140	115
„ „ „ 160	129
„ „ „ 180	140
„ „ „ 200	150

(Final Year T D C, Raj, 1961)

(Ans Mean is 88 3 approx and First Moment of Dispersion is 46.4)

55 Calculate the standard Deviation of the following data with regard to 2298 families of a certain locality of Kanpur –

No of persons in the family	No. of families
1	165
2	552
3	580
4	433
5	268
6	148
7	77
8	41
9	20
10	8
11	5
12	1
Total	2298

(B. Com Raj, 1962)
Ans —1 76

अध्याय २०

विषमता, घात एवं शीर्षत्व

(Skewness, Moments & Kurtosis)

अब तक हमने उपकिरण के जिन प्रमापों पर विचार किया है उनसे निरपेक्ष अथवा सापेक्षिक रीतियों द्वारा विभिन्न अङ्क-श्रेणियों में अपकिरण ज्ञात किया जा सकता है परन्तु यह सारे वर्ग के झुकाव अथवा रुझान (Tendency) की ओर संकेत नहीं करते। अङ्क-श्रेणी समता अथवा समिता से कितनी दूर और किस दिशा में झुकी हुई है अथवा अङ्कों में वृद्धि या कमी का सामूहिक झुकाव किस दिशा में है यह ज्ञात नहीं होता। यह ज्ञात करने के लिये ही विषमता का मापन किया जाता है। विषमता किसी भी अङ्क-श्रेणी में विद्यमान असमितता (assymetry) अथवा अनियमितता का संख्यात्मक वर्णन होता है।

अङ्क-श्रेणी जब बिल्कुल समित होती है तो उसमें मध्यक के दोनों ओर के अङ्कों में भी नियमितता होती है, ऐसी श्रेणी में समान्तर मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक समान होते। तथा इनमें विषमता बिल्कुल नहीं रहती। ऐसी श्रेणी की वक्र रेखा दोनों दिशाओं में समान झुकाव दिखलाती है। व्यवहारिक जीवन में ऐसी अङ्क-श्रेणियाँ कम उपलब्ध होती, जिनमें विषमता अनुपस्थित हो या श्रेणी सर्वथा सम हो। ऐसी स्थिति में विषमता धनात्मक हो सकती है या ऋणात्मक। यदि वक्र पश्चिम अथवा बाईं ओर अधिक फैलाव प्रदर्शित करती है तो अङ्क-श्रेणी में विषमता ऋणात्मक है और यदि वक्र पूर्व दिशा अथवा दाईं ओर फैलाव अधिक दिखलाती हो तो विषमता धनात्मक है। नीचे धनात्मक तथा ऋणात्मक विषमता के उदाहरण-चित्र दिये गये हैं।

इस प्रकार हम यह देखते हैं कि विषमता धनात्मक अथवा ऋणात्मक होती है। दूसरी बात यह है कि विषमता कम या अधिक होती है। यदि वक्र कम फैला हुआ हो तो विषमता साधारणतया कम, और वक्र के अधिक फैला होने की दशा में विषमता अधिक होती है।

विषमता की उपस्थिति के लक्षण —

ऊपर बतलाया जा चुका है कि विषमता असमित अथवा असम श्रेणियों में होती है। इस सम्बन्ध में यह स्मरण रखना होगा कि श्रेणी के सम होने का प्रमाण

यह भी होता है कि समान्तर मध्यक (X), मध्यका (M), तथा भूयिष्ठक (Z) समान होते हैं। इन तीनों में जितनी अधिक असमानता होगी उतनी ही श्रेणी असम होगी। अतः विषमता का पहला लक्षण है मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक में असमानता होना।

दूसरे, सामान्य सम श्रेणी में मध्यका, साधारणतया समान्तर मध्यक तथा भूयिष्ठक के बीच में स्थित होती है और उसके लिए निम्नलिखित सूत्र लागू होता है —

$$\text{स० मध्यक} = \text{भू०} + \tfrac{3}{2}\,(\text{मध्यका} - \text{भू०})$$

$$\text{or Mean} = \text{Mode} + \tfrac{3}{2}\,(\text{Median} - \text{Mode})$$

यदि इसके अनुसार परिणाम न मिले तो श्रेणी में विषमता विद्यमान है। विषमता की उपस्थिति का तीसरा परीक्षण यह है कि मध्यका और प्रथम चतुर्थक तथा तृतीय चतुर्थक और मध्यका, के दोनों अन्तर समान नहीं होंगे क्योंकि सम श्रेणी में $(Q_3 - M) = (M - Q_1)$ होता है।

सामान्य सम श्रेणी का वक्र घंटी की शकल का होता है। अतः यदि वक्र किसी भी एक दिशा में अधिक विस्तृत हो तो यह अ-क श्रेणी में विषमता की उपस्थिति का लक्षण है।

विषमता का माप —

उपरोक्त विवरण से स्पष्ट है कि जब कोई आवृत्ति वक्र (frequency curve) समितता अथवा समता से दूर होती है तो मध्यका, भूयिष्ठक तथा समान्तर मध्यक में अन्तर बढ़ जाता है और वक्र का आधार भूयिष्ठक के दाईं ओर फैल जाता है। अतः विभिन्न मध्यकों का अन्तर ही विषमता का माप होता है।

(i) Sk = Mean – Mode

(ii) Sk = Mean – Median

(iii) Sk = Median – Mode

विषमता के उपरोक्त माप निरपेक्ष माप हैं। इनके द्वारा तुलना करना उचित नहीं है। अतः तुलना के लिए सापेक्षिक माप निकालने आवश्यक है। साधारणतया सापेक्ष माप (गुणक) निकालने के लिए हम अन्तर संख्या को किसी मध्यक से भाग दे देते हैं जैसे यदि समान्तर मध्यक–भूयिष्ठक सूत्र से विषमता निकाली गई हो तो विषमता गुणक निकालने के लिए मध्यक–भूयिष्ठक को मध्यक या भूयिष्ठक से भाग दे देंगे। परन्तु विषमता गुणक निकालने में यह सिद्धांत लागू नहीं होता क्योंकि विषमता गुणक, विभिन्न मध्यकों से विषमता ज्ञात करने के लिए नहीं निकाला जाता बल्कि किसी मध्यक के दोनों ओर के विचलनों में विषमता का अध्ययन करने के लिए निकाला जाता है। यह कहना अधिक स्पष्ट होगा कि हमें विषमता तथा विषमता गुणक, माध्य विचलन या प्रमाप विचलन में निकालने होते हैं। यदि मध्यक के दोनों ओर के विचलन माध्य अथवा प्रमाप विचलन में कम होंगे तो विषमता कम, तथा अधिक होने की दशा में विषमता अधिक होगी। अतः विषमता गुणक निकालने के लिए हम विषमता को अपकिरण के किसी माप (measure of dispersion) से [illegible] देते हैं।

विपमता गुणक ज्ञात करने के लिए निम्नलिखित सूत्र काम मे लाये जाते हैं।

$$J = \frac{\bar{X} - Z}{\delta_Z} \text{ या } \frac{\bar{X} - Z}{\delta \bar{X}}$$

J से तात्पर्य विपमता गुणक (coefficient of skewness) है। शेष चिन्हो (symbols) से विद्यार्थी अब तक परिचित हो ही चुके है अत उन्हे पुन समझाने की आवश्यकता नही है।

कभी-कभी भूयिष्ठक (Z) का मूल्य अनिश्चित होता है तो उसके स्थान पर मध्यका काम मे लाया जाता है और

(iii) $J = \frac{\bar{X} - M}{\delta \bar{X}}$ या $\frac{\bar{X} - M}{\delta_M}$

मध्यका तथा भूयिष्ठक के अन्तर से भी विपमता गुणक प्राप्त किया जा सकता है।

(iv) $J = \frac{M - Z}{z}$ या $\frac{M - Z}{\delta_M}$

उपरोक्त सूत्रो मे मध्यक, तथा भूयिष्ठक और माध्य विचलन (Mean deviation) का प्रयोग किया गया है परन्तु विपमता तथा विपमता गुणक निकालने की सर्वाधिक प्रचलित रीति कार्ल पियर्सन [Karl Pearson] द्वारा दिया गया सूत्र है।

विपमता (Sk) = $\bar{X} - Z$ (म० – भू०)

वि० गुणक [J] = $\frac{(\bar{X} - Z)}{\sigma}$, $\frac{(\text{म०} - \text{भू०})}{\sigma}$

इससे स्पष्ट है कि इस सूत्र मे केवल मध्यका तथा भूयिष्ठक और प्रमाप विचलन के आधार पर विपमता निकालने को महत्व दिया गया है।

ऊपर प्रमाप विचलन द्वारा विपमता का आकलन [Calculation] करने की जो पद्धति दी गई है उसमे कभी–कभी एक कठिनाई तब उपस्थित हो जाती है जबकि भूयिष्ठक का मूल्य स्पष्ट नही होता। ऐसी स्थिति मे इस सूत्र में थोडा परिवर्तन कर दिया जाता है।

$$J = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma} \text{ या वि० गु० } = \frac{3(\text{म०} - \text{मध्यका})}{\sigma}$$

इस सम्बन्ध में आपको स्मरण होगा कि भूयिष्ठक, मध्यका तथा मध्यक के सबध को स्पष्ट करते हुए हमने अध्याय ८ में यह बतलाया है कि

$$(\bar{X} - Z) = 3(\bar{X} - M)$$

अत कार्ल पियर्सन के $J = \frac{(\bar{X} - Z)}{\sigma}$ मे हमने ($\bar{X} - Z$) के स्थान पर मूल्य 3 ($\bar{X} - M$) रख दिया है।

विषमता के उपरोक्त सब मापो को हम विषमता के प्रथम माप (First Measures of Skewness) कहते हैं ।

विषमता के द्वितीय मापों मे मध्यका तथा चतुर्थको की सहायता ली जाती है। यह पहले स्पष्ट किया जा चुका है कि सम श्रेणी मे ($Q_3 - M$) = ($M - Q_1$) अर्थात् तृतीय चतुर्थक और मध्यका का अन्तर मध्यका तथा प्रथम चतुर्थक के अन्तर के समान होता है । इसमे यदि अन्तर शून्य से अधिक हो तो श्रेणी में विषमता विद्यमान होगी । अत मध्यका तथा चतुर्थको पर आधारित प्रो० बाउले का सूत्र निम्न है —

$$Sk = (Q_3 - M) - (M - Q_1)$$
$$= Q_3 + Q_1 - 2M$$

इस प्रकार निकाली गई विषमता का गुणक प्राप्त करने के लिए निम्न सूत्र का प्रयोग किया जाता है —

$$J = \frac{(Q_3 - M) - [M - Q_1]}{[Q_3 - M] + [M - Q_1]}$$
$$= \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

अब हम उपरोक्त सब सूत्रो के आधार पर विषमता तथा उसके गुणक निकालने सम्बन्धी कुछ उदाहरण देते हैं ।

उदाहरण नं० 10·1

निम्नलिखित सारणी में दो समूहो के तौल का विवरण दिया गया है । यह बतलाइये कि दोनो समूहों में कौनसा अधिक विषम है ?

संख्या	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
अ [तौल पौंडो में]	125	128	140	143	152	152	152	156	159	162	178
ब [तौल पौंडो मे]	120	138	139	146	146	147	156	159	172	185	193

विषमता का आकलन

संख्या	अ श्रेणी				ब श्रेणी		
	मद (तौल पौंडों मे) X	स. मध्यक (149.7) से विचलन d	विचलनो के वर्ग d^2		मद (तौल पौंडों में) X	स मध्यक (154 6) से विचलन d	विचलनो के वर्ग d^2
1	125	−24 7	610 09		120	−34 6	1,197.16
2	128	−21 7	470 89		138	−16.6	275.56
3	140	−9 7	94.09		139	−15 6	243.36
4	143	−6 7	44 89		146	−8 6	73 96
5	152	2 3	5 29		146	−8 6	73 96
6	152	2 3	5.29		147	−7.6	57.76
7	152	2 3	5 29		156	1.4	1 96
8	156	6 3	39 69		159	4 4	19 36
9	159	9 3	86 49		172	17.4	302.76
10	162	12 3	151 29		185	30.4	924.16
11	178	28 3	800.89		193	38 4	1,474.56
		125 9 Σd	2,314 19 Σd^2			183 6 Σd	4,644 56 Σd^2

अ श्रेणी

स० मध्यक $[\bar{X}] = 149\ 7$

मध्यका $[M] = 152$

भूयिष्ठक $[Z] = 152$

$$\delta \bar{X} = \frac{125\ 9}{11}$$

$= 11.45$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2314\ 19}{11}}$$

$= 14\ 5$

विषमता (Sk)

[i] $\bar{X} - Z = 149.7 - 152$

$= -2.3$

[ii] $\bar{X} - M = 149.7 - 152$

$= -2\ 3$

[iii] $M - Z = 152 - 152$

$= 0$

ब श्रेणी

स० मध्यक $[\bar{X}] = 154\ 6$

मध्यका $[M] = 147$

भूयिष्ठक $[Z] = 146$

$$\delta \bar{X} = \frac{183\ 6}{11}$$

$= 16.7$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4,644.56}{11}}$$

$= 20\ 5$

विषमता [Sk]

[i] $\bar{X} - Z = 154\ 6 - 146$

$= 8\ 6$

[ii] $\bar{X} - M = 154.6 - 147$

$= 7.6$

[iii] $M - Z = 147 - 146$

$= 1$

खण्डित श्रेणी :—

उदाहरण 10·2

निम्नलिखित सारणी से विषमता तथा गुणक ज्ञात कीजिए।

लम्बाई इंचों में	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	55
आवृत्ति	5	3	7	10	13	18	11	6	4	3	2

हल

1 लम्बाई (इंचों में)	2 आवृत्ति (f)	3 स० मध्यक $\overline{X}$(59.6) से विचलन (d)	4 कुल विचलन fd [2×3]	5 कुल वर्ग fd^2 [3×4]
55	5	−4.6	−23.0	105.80
56	3	−3.6	−10.8	38.88
57	7	−2.6	−18.2	47.32
58	10	−1.6	−16.0	25.60
59	13	−.6	−7.8	4.68
60	18	.4	7.2	2.88
61	11	1.4	15.4	21.56
62	6	2.4	14.4	34.56
63	4	3.4	13.6	46.24
64	3	4.4	13.2	58.08
65	2	5.4	10.8	58.32
	82		148.4	443.92
	N		Σfd	Σfd^2

स० मध्यक ($\overline{X}$) = 59.6

मध्यका (M) = 60 [41 वा मद]

भूयिष्ठक [Z] = 60

चतु०$_1$ (Q_1) = 58 (20.5 वा मद)

चतु०$_3$ (Q_3) = 61 (61.5 वा मद)

$$\delta_{\overline{X}} = \frac{148.4}{82}$$

$$= 1.8$$

$\sigma = \left(\sqrt{\frac{443.92}{82}}\right)$

$= 5.41$

$= 2.33$

विषमता (Sk) $= (\bar{X}-Z) = 59.6-60$

$= -.4$

गुणक (j) $= \frac{(\bar{X}-Z)}{\delta\bar{X}} = \frac{.4}{1.8}$

$= -.22$

प्रमाप विचलन से —

विषमता (Sk) $= \bar{X}-Z = 59.6-60$

$= -.4$

गुणक (j) $= \frac{(\bar{X}-Z)}{\sigma} = \frac{-.4}{2.33}$

$= -.17$

चतुर्थक विचलन से —

विषमता (Sk) $= Q_3+Q_1-2M$

$= 61+58-2(60)$

$= -1$

गुणक (j) $= \frac{Q_3+Q_1-2M}{Q_3-Q_1}$

$= \frac{-1}{61-58}$

$= -.33$

विषमता सामान्य तथा ऋणात्मक है।

संतत श्रेणी में विषमता का आकलन —

उदाहरण 10·3

165 व्यक्तियों की लम्बाई नीचे की सारणी में दी जाती है। विषमता गुणक [निका]लिए।

[ल]म्बाई ([इ]न्चों में)	45–50	50–55	55–60	60–65	65–70	70–75	75–80
[आ]वृत्ति	2	10	21	55	40	32	5

हल–

विषमता गुणक का आकलन

1 लम्बाई (इन्चो मे)	2 पद - विचलन Step-deviations x	3 आवृत्ति f	4 कुल विचलन fx (2×3)	5 कुल वर्ग fx^2 (2×4)	6 सचयी आवृत्ति cf
45–50	–3	2	– 6	18	2
50–55	–2	10	–20	40	12
55–60	–1	21	–21	21	33
60–65	0	55	0	0	88
65–70	1	40	40	40	128
70–75	2	32	64	128	160
75–80	3	5	15	45	165
		165 N	Σfx=72 $\lvert\Sigma fx\rvert$ = 166	292 Σfx^2	

स० म० $[\overline{X}] = A + \left(\frac{\Sigma fx}{N} i\right)$ (जहा A=62 5 और i = 5 है)

$$= 62 5 + \left(\frac{72}{165} \times 5\right)$$

$$= 62 5 + \left(\frac{360}{165}\right)$$

$$= 62 5 + 2 2 = 64 7$$

मध्यका (M) = $\frac{165}{2}$ = 82 5 वें मद का मूल्य

$$M = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{2} - c_0\right) \right\}$$

$$= 60 + \left\{ \frac{5}{55} (82 5-33) \right\}$$

$$= 60 + \left(\frac{1}{11} \times 49 5\right)$$

$$= 60 + 4.5 = 64 5$$

भूयिष्ठक (Z) = $l_1 + \left(\frac{\Delta_1}{\Delta_1+\Delta_2} \times i \right.$ [जहां Δ_1 (55–21) = 34 और Δ_2 = 55–40 = 15 है]

$$= 60 + \left(\frac{34}{34 + 15} \times 5\right)$$

$$= 60 + \frac{170}{49} = 63\ 47$$

माध्य विचलन $(\delta_{\overline{X}}) = \frac{|\Sigma fx|\ i + (\overline{X}-A)\ (N_1 - N_2)}{N}$

$$= \frac{(166 \times 5) + (64\ 7 - 62\ 5)\ (88 - 77)}{165}$$

$$= \frac{830 \times (2\ 2 \times 11)}{165}$$

$$= \frac{830 + 24\ 2}{165}$$

$$= \frac{854\ 2}{165}$$

$$= 5\ 18$$

प्रमाप विचलन $(\sigma) = \frac{i}{N} \sqrt{\Sigma fx^2\ N - (\Sigma fx)^2}$

$$= \frac{5}{165} \sqrt{292 \times 165 - (72)^2}$$

$$= \frac{1}{33} \sqrt{48180 - 5184}$$

$$= \frac{1}{33} \sqrt{42996}$$

$$= \frac{1}{33} \times 207{\cdot}35$$

$$= 6{\cdot}28$$

माध्य विचलन से

विषमता $(Sk) = (\overline{X} - Z)$

$$= (64\ 7 - 63\ 47) = 1\ 23$$

गुणक $(j) = \frac{(\overline{X} - Z)}{\delta\overline{X}}$

$$= \frac{64{\cdot}7 - 63{\cdot}47}{5\ 18}$$

$$= \frac{1{\cdot}23}{5\ 18}$$

$$= {\cdot}24$$

प्रमाप विचलन से —

विषमता $(Sk) = (\overline{X} - Z)$

$$= (64\ 7 - 63\ 47) = 1\ 23$$

$$\text{गुणक (j)} = \frac{(\bar{X} - Z)}{\sigma}$$
$$= \frac{(64\ 7 - 63\ 47)}{6\ 28}$$
$$= \frac{1\ 23}{6\ 28}$$
$$= {}^{\cdot}19$$

चतुर्थक विचलन से —

$$Q_1 = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{N}{4} - c_0\right) \right\}$$
$$= 60 + \left\{ \frac{5}{55}(41{}^{\cdot}25 - 33) \right\}$$
$$= 60 + \left(\frac{1}{11} \times 8\ 25 \right)$$
$$= 60 + \ 75 = 60\ 75$$
$$Q_3 = l_1 + \left\{ \frac{i}{f}\left(\frac{3N}{4} - c_0\right) \right\}$$
$$= 65 + \left\{ \frac{5}{40}(123\ 75 - 88) \right\}$$
$$= 65 + \left(\frac{1}{8} \times 35\ 75 \right)$$
$$= 65 + 4{}^{\cdot}47 = 69\ 47$$

$$\text{विषमता (Sk)} = Q_3 + Q_1 - 2M$$
$$= 69{}^{\cdot}47 + 60\ 75 - (2 \times 64{}^{\cdot}5)$$
$$= 130\ 22 - 129\ 0$$
$$= 1{}^{\cdot}22$$

$$\text{गुणक (j)} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$
$$= \frac{1{}^{\cdot}22}{69{}^{\cdot}47 - 60\ 75}$$
$$= \frac{1{}^{\cdot}22}{8\ 72}$$
$$= {}^{\cdot}14$$

तीनों प्रकार से निकाले गये विषमता गुणक क्रमश: '24, '19 व '14 हैं। कई बार कार्ल पियर्सन और बाउले द्वारा निकाले गए विषमता गुणकों में काफी अन्तर आता है।

विषमता ज्ञात करने की अन्य रीतियां भी हैं जिनमे सर्व श्री फ्राक्सटन तथा काउडन की दो रीतियां भी हैं।

$$\text{(i) } Sk = (P_{90} - P_{50}) - (P_{50} - P_{10}) \text{ या}$$
$$= P_{90} + P_{10} - 2\,(P_{50})$$
$$j = \frac{P_{90} + P_{10} - 2\,(P_{50})}{P_{90} - P_{10}}$$

यहाँ P से तात्पर्य Percentile अर्थात् शततमक से है।

$$\text{(ii) } Sk = (D_9 - D_5) - (D_5 - D_1) \text{ या}$$
$$= (D_9 + D_1) - 2\,(D_5)$$
$$j = \frac{[D_9 + D_1 - 2\,D_5]}{D_9 - D_1}$$

यहाँ D से तात्पर्य Decile अर्थात् दशमक से है।

उपरोक्त दोनों सीमित शततमकों तथा दशमकों पर आधारित हैं।

यह बात स्मरण रखना चाहिये कि विषमता गुणक कभी भी ± 1 से अधिक नहीं होगा।

तृतीय माप (Third measure of Skewness)

विषमता का एक तृतीय माप भी बतलाया गया है जो घन तथा घनमूल की सहायता से निकाला जाता है। इसके सूत्र निम्न हैं —

$$Sk = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{N}}$$

$$j = \frac{\sqrt[3]{\frac{d^3}{N}}}{\sigma}$$

माध्य विचलन से गुणक निकालना हो तो प्रमाप विचलन [σ] के स्थान पर मध्यक विचलन [δ] लिख दिया जाता है। श्री किंग के कथनानुसार विषमता का यह गुणांक बहुत उत्तम है परन्तु इसका आकलन बहुत कठिन है अतः व्यावहारिक दृष्टि से इसका महत्व अधिक नहीं है।

विषमता गुणांक ज्ञात करने के अन्य सूत्र भी हैं।

$$\text{[i] } j = \beta_1$$

$$\text{[ii] } j = \frac{\sqrt{\beta_1}\,(\beta_2 + 3)}{2\,(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9}$$

विषमता तथा अपकिरण :

अपकिरण द्वारा यह ज्ञात होता है कि किसी श्रेणी में विभिन्न मूल्य माध्य से कितने दूर तक फैले हुए हैं। माध्य अथवा प्रमाप विचलन से विभिन्न तथ्यों का अपकिरण, केवल अंकों के बिखराव पर प्रकाश डालता है जबकि विषमता यह स्पष्ट करती है कि वक्र रेखा संमित है या असंमित।

दूसरे, अपकिरण यह स्पष्ट नहीं करता कि मध्यक के किस दिशा में बिखराव अधिक है तथा किस दिशा में कम, वह केवल औसत बिखराव ही बतलाता है। विषमता

स्पष्टतया विचरण की दिशा की ओर सकेत करती है। यह बतला देती है कि विचरण किस दिशा में अधिक है क्योंकि यह धनात्मक अथवा ऋणात्मक होती है।

विषमता किसी भी आवृत्ति के बटन की सामान्यता (normality) अथवा असामान्यता की ओर सकेत करती है। व्यवहारिक जीवन मे सर्वथा सम श्रेणियां कल्पना मात्र हैं अत विषमता का ज्ञान प्राप्त करना बहुत महत्वपूर्ण है।

घात (Moments)

घात (Moments) शब्द का प्रयोग मूल रूप से तो यान्त्रिक विज्ञान (Mechanical science) में होता है। सांख्यिकी में भी अपकिरण के प्रथम, द्वितीय, तृतीय, चतुर्थ आदि घात मालूम करके सामान्यता (Normality), विषमता (skewness) शीर्षत्व (Kurtosis), माध्य विचलन (Average Deviation), प्रमाप विचलन आदि का अध्ययन किया जाता है।

घात सदा समान्तर मध्यक से ही निकाले जाते हैं। लेकिन उन श्रेणियों (Series) मे जहा समान्तर मध्यक पूर्णाङ्क न हो, किसी भी पूर्णाङ्क को कल्पित मध्यक मान कर चारो घात ज्ञात कर लिए जाते हैं। फिर इन घातो को शुद्ध करके वास्तविक समान्तर मध्यक से चारो घात ज्ञात किए जाते है। कभी कभी कल्पित मध्यक शून्य (0) मान कर भी घात निकाले जाते हैं। इन घातो को भी शुद्ध करना होता है। निम्न उदाहरणो से सब प्रकार के घात निकालने की विधि समझ में आ जायगी।

व्यक्तिगत श्रेणी — (प्रत्यक्ष रीति)

उदाहरण 194

निम्न तथ्यो से अपकिरण के चारो घात वास्तविक समान्तर मध्यक से ज्ञात कीजिए मूल्य— 10,11, 12, 13 और 14

हल —

1 मूल्य X	2 स म. = 12 से विचलन d $(X-\overline{X})$	3 d^2	4 d^3 (2 × 3)	5 d^4 (2 × 4)
10	−2	4	−8	16
11	−1	1	−1	1
12	0	0	0	0
13	1	1	1	1
14	2	4	8	16
60 ΣX = 5	0 Σd	10 Σd^2	0 Σd^3	34 Σd^3

$$\overline{X} = \frac{\Sigma X}{N} = \frac{60}{5} = 12$$

π (P10) = Moments घात (वास्तविक स० म० से)

की दो रीतियां भी है।

$$\text{म}_1 = \frac{\Sigma d}{N} = 0 \text{ (अपकिरण का प्रथम घात)}$$

$$\text{म}_2 = \frac{\Sigma d^2}{N} = \frac{10}{5} = 2 \text{ (अपकिरण का द्वितीय घात)}$$

$$\text{म}_3 = \frac{\Sigma d^3}{N} = \frac{0}{5} = 0 \text{ (अपकिरण का तृतीय घात)}$$

$$\text{म}_4 = \frac{\Sigma d^4}{N} = \frac{34}{5} = 6.8 \text{ (अपकिरण का चतुर्थ घात)}$$

वास्तविक समान्तर मध्यक से अपकिरण का प्रथम घात सदा शून्य 0 होता है क्योंकि म० म० ($\bar{X}$) से ऋणात्मक विचलनों की संख्या धनात्मक विचलनों की संख्या के सदा बराबर होती है और उनका योग शून्य होता है।

लघुरीति—

इस रीति में किसी भी मूल्य को कल्पित-समान्तर मध्यक (A) मानकर उनसे विचलन निकाले जाते हैं। इन विचलनों के आधार पर चारों घात उसी सूत्र से ज्ञात कर लिए जाते हैं। बाद में प्रत्येक घात में से निम्न शुद्धि करके वास्तविक म० म० से चारों घात मालूम कर लिए जाते हैं—

$\text{व}_1, \text{व}_2, \text{व}_3, \text{व}_4$, = कल्पित म० म० से चारों घात

$\text{म}_1 = \text{व}_1 - \text{व}_1 = 0$ वास्तविक म० म० से प्रथम घात शुद्धि के बाद

$\text{म}_2 = \text{व}_2 - \text{व}_1^2$ वास्तविक म० म० से द्वितीय घात शुद्धि के बाद

$\text{म}_3 = \text{व}_3 - 3\,\text{व}_2\,\text{व}_1 + 2\text{व}_1^3$

[वास्तविक म० म० से तृतीय घात शुद्धि के बाद]

$\text{म}_4 = \text{व}_4 - 4\,\text{व}_3\,\text{व}_1 + 6\text{व}_2\,\text{व}_1^2 - 3\text{व}_1^4$

[वास्तविक म० म० से चतुर्थ घात शुद्धि के बाद]

इसी प्रकार

$$\begin{aligned}
\text{म}_2 &= \text{व}_2 - 2\,\text{व}_1\text{व}_1 + \text{व}_1^2 \\
&= \text{व}_2 - 2\,\text{व}_1^2 + \text{व}_1^2 \\
&= \text{व}_2 - \text{व}_1^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{म}_3 &= \text{व}_3 - 3\text{व}_2\text{व}_1 + 3\text{व}_1\,\text{व}_1^2 - \text{व}_1^3 \\
&= \text{व}_3 - 3\text{व}_2\text{व}_1 + 3\,\text{व}_1^3 - \text{व}_1^3 \\
&= \text{व}_3 - 3\text{व}_2\text{व}_1 + 2\,\text{व}_1^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{म}_4 &= \text{व}_4 - 4\text{व}_3\text{व}_1 + 6\text{व}_2\text{व}_1^2 - 4\text{व}_1\text{व}_1^3 + \text{व}_1^4 \\
&= \text{व}_4 - 4\text{व}_3\text{व}_1 + 6\text{व}_2\text{व}_1^2 - 4\text{व}_1^4 + \text{व}_1^4 \\
&= \text{व}_4 - 4\text{व}_3\text{व}_1 + 6\text{व}_2\text{व}_1^2 - 3\text{व}_1^4
\end{aligned}$$

उदाहरण 10.5

उदाहरण 10.4 में दिए गए मूल्यों से कोई भी कल्पित म० म० मान कर चारों घात ज्ञात कीजिए और उनकी शुद्धि करके वास्तविक म० म० से भी चारों घात ज्ञात कीजिए।

हल —

1	2	3	4	5
मूल्य X	कल्पित स० म० = 11 से विचलन x (X − A)	x^2	x^3 (2 × 3)	x^4 (2 × 4)
10	−1	1	−1	1
11	0	0	0	0
12	1	1	1	1
13	2	4	8	16
14	3	9	27	81
N = 5	5 Σx	15 Σx^2	35 Σx^3	99 Σx^4

A = 11

कल्पित स० म० मे चारो घात —

$$\nu_1 = \frac{\Sigma x}{N} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\nu_2 = \frac{\Sigma x^2}{N} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\nu_3 = \frac{\Sigma x^3}{N} = \frac{35}{5} = 7$$

$$\nu_4 = \frac{\Sigma x^4}{N} = \frac{99}{5} = 19{\cdot}8$$

शुद्धि (correction) के बाद वास्तविक स० म० से चारो घात —

$\pi_1 = \nu_1 - \nu_1 = (1-1) = 0$ (अपकिरण का प्रथम घात शुद्धि के बाद)

$\pi_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = (3-1^2) = 2$ (अपकिरण का द्वितीय घात शुद्धि के बाद)

$\pi_3 = \nu_3 - 3\nu_2\,\nu_1 + 2\nu_1^3 = (7-9+2) = 0$ (अपकिरण का तृतीय घात शुद्धि के बाद)

$\pi_4 = \nu_4 - 4\nu_3\,\nu_1 + 6\,\nu_2\,\nu^2 - 3\,\nu_1^4 = (19{\cdot}8 - 28 + 18 - 3)$
$= 6.8$ [अपकिरण का चतुर्थ घात शुद्धि के बाद]

यह हम भली भांति जानते ही हैं कि वास्तविक स० म० बहुत कम श्रेणियो मे पूर्णाङ्क होता है अत ऐसे प्रश्न को आसानी मे हल करने के लिए हमे कल्पित स० म० (जो सदा पूर्णाङ्क होगा) मे ही चारो घात निकाल कर उनकी शुद्धि कर लेनीचाहिए ।

खडित श्रेणी —इस श्रेणी मे दिये गये मूल्यों में आवृत्ति का खाना बढ जाने के कारण प्रत्येक विचलन को आवृत्ति (f) से सदा की भांति गुणा करना पडता है अन्यथा सूत्र मे कोई और परिवर्तन नही करना पडता ।

प्रत्यक्ष रीति

उदाहरण 10 6

निम्न तथ्यो से अपकिरण के चारो घात वास्तविक स० म० से ज्ञात कीजिए ।

मूल्य	2	4	6	8	10	12	14
आवृत्ति	1	2	3	5	3	2	1

* दी गयी है ।

हल —

1	2	3	4	5	6	7	8
मूल्य	आवृत्ति	कुल मूल्य	स० म० $\overline{X} = 8$ से विचलन	कुल विचलन	fd^2	fd^3	fd^4
X	f	fX (1×2)	d $(X - \overline{X})$	fd (2×4)	$(fd.d)$ (4×5)	$(fd^2.d)$ (4×6)	$(fd^3.d)$ (4×7)
2	1	2	−6	−6	36	−216	1,296
4	2	8	−4	−8	32	−128	512
6	3	18	−2	−6	12	−24	48
8	5	40	0	0	0	0	0
10	3	30	2	6	12	24	48
12	2	24	4	8	32	128	512
14	1	14	6	6	36	216	1,296
	17	136		0	160	0	3,712
	N	ΣfX		Σfd	Σfd^2	Σfd^3	Σfd^4

$$\overline{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{136}{17} = 8$$

$$\pi_1 = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{0}{17} = 0$$

$$\pi_2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} = \frac{160}{17} = 9 4$$

$$\pi_3 = \frac{\Sigma fd^3}{N} = \frac{0}{17} = 0$$

$$\pi_4 = \frac{\Sigma fd^4}{N} = \frac{3712}{17} = 218 4$$

लघुरीति

उदाहरण 10 7

उदाहरण 10 6 मे दिए गए मूल्यो से कोई भी कल्पित स० म० मानकर चारो घात ज्ञात कीजिए और उनकी शुद्धि करके वास्तविक स० म० से भी चारो घात ज्ञात कीजिए।

हल —

1	2	3	4	5	6	7
मूल्य	आवृत्ति	कल्पित स० म० A = 10 म विचलन x	कुल विचलन fx	fx^2	fx^3	fx^4
X	f	(X − A)	(2×3)	(3×4)	(3×5)	(3×6)
2	1	−8	− 8	64	−512	4,096
4	2	−6	−12	72	−432	2,592
6	3	−4	−12	48	−192	768
8	5	−2	−10	20	− 40	80
10	3	0	0	0	0	0
12	2	2	4	8	16	32
14	1	4	4	16	64	256
	17 N		−34 Σfx	228 Σfx^2	− 1096 Σfx^3	7,824 Σfx^4

A = 10

कल्पित समान्तर मध्यक से चारों घात —

$$\nu_1 = \frac{\Sigma fx}{N} = \frac{-34}{17} = -2$$

$$\nu_2 = \frac{\Sigma fx^2}{N} = \frac{228}{17} = 13 4$$

$$\nu_3 = \frac{\Sigma fx^3}{N} = \frac{-1096}{17} = 64 4$$

$$\nu_4 = \frac{\Sigma fx^4}{N} = \frac{7824}{17} = 460$$

शुद्धि (correction) के बाद वास्तविक स० म० से चारों घात —

$\pi_1 = v_1 - v_1 = \{ -2 - (-2) \} = 0$

$\pi_2 = v_2 - v_1^2 = 13.4 - 4 = 9.4$

$\pi_3 = v_3 - 3v_2 v_1 + 2 v_1^3 = -54.4 - (3 \times -2 \times 13.4) + (2 \times -2^3)$

$= -54.4 + 80.4 - 16 = 10$

$\pi_4 = v_4 - 4v_3 v_1 + 6v_2 v_1^2 - 3v_1^4 = 460 - (4 \times -2 \times -64.4) + (6 \times -2^2 \times 13.4) - (3 \times -2^4)$

$= 460 - 515.2 + 321.6 - 48$

$= 781.6 - 563.2$

$= 218.4$

सतत श्रेणी

(प्रत्यक्ष रीति)

यदि दिए हुए मूल्यों का वास्तविक समान्तर मध्यक पूर्णांक हो तो प्रत्यक्ष रीति सरल रहती है। मूल्यों के मध्य बिन्दु ज्ञात करने के बाद वह श्रेणी खण्डित श्रेणी जैसी हो जाती है, और उसमें उपरोक्त सूत्र के आधार पर चारों घात मालूम किए जा सकते हैं। निम्न उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 10.8

निम्नलिखित मूल्यों के आधार पर वास्तविक समान्तर मध्यक से चारों घात ज्ञात कीजिए —

मूल्य	0–10	10–20	20–30	30–40	40–50
आवृत्ति	5	8	15	16	6

1	2	3	4	5	6	7	8	
मूल्य	मध्य बिन्दु X	प्रावृत्ति f	कुल मूल्य fX (2×3)	स॰ म॰ $\frac{\Sigma fx}{N}=27$ से विचलन d $(x-\bar{X})$	कुल विचलन fd (3×5)	fd^2 (5×6)	fd^3 (5×7)	d^4 (5×8)
0—10	5	5	25	—22	—110	2420	-53240	11,71,280
10—20	15	8	120	—12	— 96	1152	-13824	1,65,888
20—30	25	15	375	— 2	— 30	60	- 120	240
30—40	35	16	560	8	128	1024	8192	65,536
40—50	45	6	270	18	108	1944	34992	6 29,856
		50 N	1350 ΣfX		0 Σfd	6600 Σfd^2	-24000 Σfd^3	20,32,800 Σfd^4

$$\bar{X} = \frac{\Sigma fX}{N} = \frac{1,350}{50} = 27$$

$$\pi_1 = \frac{\Sigma fd}{N} = \frac{0}{50} = 0$$

$$\pi_2 = \frac{\Sigma fd^2}{N} = \frac{6600}{50} = 132$$

$$\pi_3 = \frac{\Sigma fd^3}{N} = \frac{-24000}{50} - 480$$

$$\pi_4 = \frac{\Sigma fd^4}{N} = \frac{20,32,800}{50} = 40656$$

लघु रीति

उदाहरण 10 9

उदाहरण 10 8 मे दिए गए मूल्यो मे कोई भी कल्पित स० म० मानकर चारो घात ज्ञात कीजिए और उनकी शुद्धि करके वास्तविक स० म० मे भी चारो घात ज्ञात कीजिए:—

1	2	3	4	5	6	7
मूल्य	पद विचलन Step deviations कल्पित स० म० = 25 x	आवृत्ति f	fx (2×3)	fx^2 (2×4)	fx^3 (2×5)	fx^4 (2×6)
0 -10	−2	5	−10	20	−40	80
10-20	−1	8	−8	8	−8	8
20-30	0	25	0	0	0	0
30-40	1	16	16	16	16	16
40-50	2	6	12	24	48	96
		50 N	10 Σfx	68 Σfx^2	16 Σfx^3	200 Σfx^4

$$v_1 = \frac{\Sigma fx}{N} \times i = \frac{10 \times 10}{50} = 2 \; [\, i = 10 \,]$$

$$v_2 = \frac{\Sigma fx^2}{N} \times i^2 = \frac{68 \times 10^2}{50} = \frac{6800}{50} = 136$$

$$v_3 = \frac{\Sigma fx^3}{N} \times i^3 = \frac{16 \times 10^3}{50} = \frac{16 \times 1000}{50} = 320$$

$$v_4 = \frac{\Sigma fx^4}{N} \times i^4 = \frac{200 \times 10^4}{50} = \frac{200 \times 10,000}{50} = 40,000$$

शुद्धि के बाद वास्तविक स० म० से चारो घात —

$$\pi_1 = v_1 - v_1 = 2 - 2 = 0$$

$$\pi_2 = v_2 - v_1^2 = 136 - 2^2 = 132$$

$$\pi_3 = v_3 - 3v_2 v_1 + 2v_1^3 = 320 - (3 \times 2 \times 136) + (2 \times 2^3)$$

$$= 320 - 816 + 16 = -480$$

$$\pi_4 = \nu_4 - 4\nu_3\,\nu_1 + 6\nu_2\,\nu^2 - 3\nu_1^4 = 40000 - (4 \times 2 \times 320)$$
$$+ (6 \times 2^2 \times 136) - (3 \times 2^4) = 40000 - 2560 + 3264 - 48 = 40656$$

शेपर्ड की शुद्धि (Sheppards' Correction) —

सतत श्रेणी में मूल्य वर्गान्तरो (Class intervals) में दिए हुए रहते हैं। प्रश्न हल करने मे हम मध्य बिन्दु निकाल कर यह मान लेते हैं कि उस वर्गान्तर में प्रत्येक मद का मूल्य मध्य-बिन्दु के बराबर है, जैसे यदि (10–20) की आवृत्ति 8 है तो हम यह मान लेते हैं कि आठो मदो का मूल्य 15 है। यह अनुचित है चाहे विभ्रम कितनी ही पूरक हो। इस विभ्रम की शुद्धि के लिए (केवल सतत श्रेणी मे ही) शेपर्ड महोदय (Sheppard) ने निम्न शुद्धि (Correction) बतलाई है जिसे π_2 और π_4 मे ही प्रयोग किया जाता है।

$$\mu_1 = \pi_1 - 0$$
$$\mu_2 = \pi_2 - \left(\frac{i^2}{12}\right)$$
$$\mu_3 = \pi_3 - 0$$
$$\mu_4 = \pi_4 - \left(\tfrac{1}{2}\pi_2\ i^2 + .029\ i^4\right)$$

शेपर्ड की शुद्धि के बाद स० स० से चारो घातो को हम क्रमश ग्रीक शब्द "म्यू" $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ मे व्यक्त करेंगे।

द्वितीय एव चतुर्थ घातो मे शुद्धि की विशेष आवश्यकता पडती है क्योकि इसमे विचलनो का वर्ग करने मे सब चिन्ह धनात्मक हो जाते हैं और विभ्रम सचयी (Cumulative) हो जाती है। प्रथम एव तृतीय घातो मे शुद्धि की कोई जरूरत नही होती है क्योकि विचलनो का घन (cube) करने पर भी ऋणात्मक एव धनात्मक चिन्ह दोनो बने रहते हैं। परिणाम स्वरूप विभ्रम पूरक हो जाती है। शेपर्ड की शुद्धि मे यह मान्यता है कि आवृत्ति का वटन समित या थोडा सा ही असमित अर्थात् घन्टी की शक्ल का सा होता है।

व्यक्तिगत या खण्डित श्रेणी मे शेपर्ड की शुद्धि की कोई आवश्यकता नही है क्योकि प्रत्येक मद का मूल्य बिलकुल ठीक ठीक नापा जा सकता है। अत इन दो श्रेणियो मे तो π (Pie) पाई का मूल्य μ (म्यू) के बराबर ही होता है।

उदाहरण 9 10 मे प्राप्त किए गए चारो घातो मे निम्न शेपर्ड-शुद्धि करनी होगी —

$$\pi_1 = 0,\ \pi_2 = 132,\ \pi_3 = -480,\ \pi_4 = +40656$$
$$\mu_1 = \pi_1 - 0 = 0 - 0 = 0$$
$$\mu_2 = \pi_2 - \left(\frac{i^2}{12}\right) = 132 - \frac{10^2}{12} = 132 - 8\ 3 = 123\ 7$$
$$\mu_3 = \pi_3 - 0 = -480 - 0 = -480$$
$$\mu_4 = \pi_4 - \left(\tfrac{1}{2}\pi_2 \cdot i^2 + .029 i^4\right)$$
$$= 40656 - \left(\frac{132 \times 10^2}{2} + .029 \times 10^4\right)$$

$= 40656 - 6600 + 290$

$= 34346$

उदाहरण 10 10

नीचे शून्य (0) को कल्पित मध्यक मानते हुए चारो घातो (moments) के मूल्य दिए गए हैं। इन्हे शुद्ध करके वास्तविक स० म० से चारो घात ज्ञात कीजिए।

$\nu_1 = 5\ 2,\quad \nu_2 = 32{\cdot}2,\quad \nu_3 = 218\ 8$ और $\nu_4 = 1580\ 2$

हल—

$\mu_1 = \nu_1 - \nu_1 = 0$

$= 5\ 2 - 5\ 2 = 0$

$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1{}^2$

$= 32\ 2 - 5\ 2^2$

$= 32\ 2 - 27\ 04$

$= 5\ 16$

$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1{}^3$

$= 218\ 8 - (3 \times 32\ 2 \times 5\ 2) + (2 \times 5{\cdot}2^3)$

$= 218\ 8 - 502\ 32 + 281\ 216$

$= -\ 2\ 304$

$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1{}^2 - 3\nu_1{}^4$

$= 1580\ 2 - (4 \times 218{\cdot}8 \times 5\ 2) + (6 \times 32{\cdot}2 \times 5\ 2^2) - (3 \times 5\ 2^4)$

$= 1580\ 2 - 4551\ 04 + 5224\ 128 + 2193\ 4848$

$= 59{\cdot}8032$

उदाहरण 10'11

नीचे वास्तविक समान्तर मध्यक से चारो घातो (moments) के मूल्य दिए गए हैं। शून्य (origin = 0) को कल्पित स० म० मानते हुए वास्तविक स० म० (5 2) से चारो घात ज्ञात कीजिए।

$\mu_1 = 0,\ \mu_2 = 5\ 16 - \mu_3 = -2\ 304,\ \mu_4 = 59\ 8032$

हल—0 को origin मानकर चारो घात ज्ञात करने के लिए Δ का मूल्य ज्ञात करना पडता है—

$\Delta = \overline{X} - A$

$= 5{\cdot}2 - 0$

$= 5{\cdot}2$

Δ के आधार पर निम्न शुद्धि करनी चाहिए। ज्ञातव्य रहे कि इस शुद्धि मे सब चिन्ह धनात्मक होते हैं।

$\nu_1 = \mu_1 + \Delta$

$= 0 + 5{\cdot}2$

$= 5{\cdot}2$

$\nu_2 = \mu_2 + \Delta^2$
$= 5{\cdot}16 + 5{\cdot}2^2$
$= 5{\cdot}16 + 27\ 04$
$= 32{\cdot}20$

$\nu_3 = \mu_3 + 3\mu_2\Delta + \Delta^3$
$= -2\ 304 + (3 \times 5{\cdot}16 \times 5{\cdot}2) + (5\ 2^3)$
$= -2\ 304 + 80\ 496 + 140\ 608$
$= 218{\cdot}8$

$\nu_4 = \mu_4\ 4\mu_3\Delta + 6\mu_2\Delta^2 + \Delta^4$
$= 59\ 8032 + (4 \times -2\ 304 \times 5\ 2) + (6 \times 5\ 16 \times 5{\cdot}2^2) + (5{\cdot}2^4)$
$= 59\ 8032 - 47\ 9232 + 837\ 1584 + 731{\cdot}1616$
$= 1580\ 2$

नोट—शुद्धि (Correction) द्विपद विस्तार (Binomial expansion) की भाति याद रखी जा सकती है। याद रहे कि यह केवल याद रखने की विधि है, यह वास्तविक द्विपद विस्तार नही है।

$\nu_2 = \mu_2 + 2\mu_1\Delta + \Delta^2$
$= \mu_2 + \Delta^2$ ($\because \mu_1 = 0 \therefore 2\mu_1\Delta = 0$ होगा)

$\nu_3 = \mu_3 + 3\mu_2\Delta + 3\mu_1\Delta^2 + \Delta^3$
$= \mu_3 + 3\mu_2\Delta + \Delta^3$ ($\because \mu_1 = 0 \therefore 3\mu_1\Delta^2 = 0$ होगा)

$\nu_4 = \mu_4 + 4\mu_3\Delta + 6\mu_2\Delta^2 + 4\mu_1\Delta^3 + \Delta^4$
$= \mu_4 + 4\mu_3\Delta + 6\mu_2\Delta^2 + \Delta^4$ ($\because \mu_1 = 0 \therefore 4\mu_1\Delta^3 = 0$ होगा)

शीर्षत्व (Kurtosis)

किसी भी श्रेणी की बनावट का अध्ययन तीन प्रकार से किया जाता है—अपकिरण, विषमता और शीर्षत्व के द्वारा। प्रथम दो का अध्ययन हम कर चुके हैं। शीर्षत्व के द्वारा वक्र में समानता (Normality) का अध्ययन किया जाता है। सामान्य वक्र (Normal curve) का रूप समग्र (universe or population) मे अकों का मुकाव बतलाता है। किसी भी वक्र के ऊपरी भाग पर मदो का मुकाव एक कूबड सी बना देता है। यह कूबड बिल्कुल पतली हो सकती है या अधिक चौडी या सामान्य रूप मे। यदि कूबड पतली होती है तो हम वक्र को पृथु शीर्षत्व (Leptokurtic) कहते है। यदि कूबड चौडी (Flat topped) होती है तो वक्र चिपिट शीर्ष (Platykurtic) और यदि कूबड सामान्य हो तो वक्र समान शीर्ष (Mesokurtic) कहलाता है अर्थात् वक्र की शक्ल सामान्य वक्र (Normal curve) से पतली हुई तो पृथु शीर्ष (Leptokurtic) और चौडी हुई तो चिपिट शीर्ष (Platykurtic) कहलायेगी।

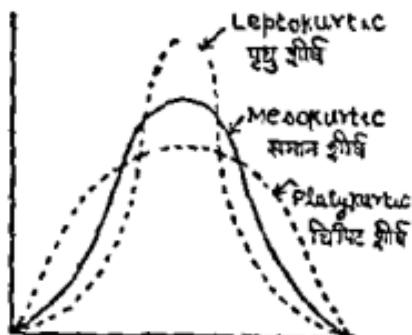
शीर्षत्व (Kurtosis) या अक मुकाव को घातो के विभिन्न मूल्यो द्वारा मालूम किया जाता है। इसके लिए कार्ल पियर्सन के अनुसार निम्न सूत्र है —

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} \quad or \quad \frac{\pi_4}{\pi_2^2}$$

जहा β_2 (बीटा) = शीर्षत्व का मूल्य

μ_4 या π_4 = अपकिरण की चतुर्थ घात

μ_2 या π_2 = ,, ,, द्वितीय,,

यदि β_2 का मूल्य 3 के बराबर होता है तो वक्र सामान्य वक्र होता है। यदि β_2 का मूल्य 3 से अधिक है तो वक्र पृथु शीर्ष (Leptokurtic), और यदि β_2 का मूल्य उससे कम है तो वक्र चिपिट शीर्ष (Platykurtic) होगा। निम्न चित्र से यह स्पष्ट हो जाएगा।

घातो के विभिन्न मूल्यो द्वारा विषमता (skewness) का भी अध्ययन किया जाता है। कार्ल पियर्सन के अनुसार

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} \quad or \quad \frac{\pi_3^2}{\pi_2^3}$$

β_1 = विषमता गुणक का माप

μ_3 या π_3 = अपकिरण का तृतीय घात

μ_2 या π_2 = ,, द्वितीय ,,

यदि $\beta_1 = 0$ होगा तो विषमता नही होगी और वक्र मे समितता (symmetry) होगी।

फिशर (R. A. Fisher) ने विषमता और शीर्षत्व नापने के लिए ग्रीक शब्द गामा (γ) का प्रयोग किया है।

विषमता के लिए —

$\gamma_1 = \sqrt{\beta_1}$

समितता के लिए $\gamma_1 = 0$ होना चाहिए।

शीर्षत्व के लिए:—

$\gamma_2 = \beta_2 - 3 = 0$

सामान्य वक्र के लिए $\gamma_2 = 0$ होना चाहिए।

उदाहरण 10·12

निम्न सूचना के आधार पर β_1 और β_2 ज्ञात कीजिए।

$$\mu_2 = 186\ 67, \mu_3 = -2700, \mu_4 = 124040$$

हल —

$$\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3} = \frac{(-2700)^2}{(186\ 67)^3} = 1\ 11 \text{ (बहुत विषम)}$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{124040}{186\ 67^2} = 3\ 64 \text{ (पृथुशीर्ष)}$$

साराश :

किसी भी श्रेणी मे विद्यमान असमिनता अथवा अभिसमितता के सख्यात्मक विवरण को विषमता कहते हैं।

विषमता की उपस्थिति के लक्षण —

(1) मध्यक, मध्यका तथा भूयिष्ठक मे असमानता

(2) मध्यका का म० मध्यक तथा भू० के बीच मे न होना।

(3) चतुर्थकों का मध्यका से समान अन्तर न होना।

(4) वक्र का घन्टी की शक्ल का न होना।

विषमता के माप —

(i) $Sk = (\overline{X} - Z)$ गुणक : j = (i) $\dfrac{(\overline{X} - Z)}{\delta_{\overline{X}}}$

(ii) $Sk = (\overline{X} - M)$ गुणक . j = (ii) $\dfrac{(\overline{X} - M)}{\delta_M}$

(iii) $Sk = (\overline{X} - Z)$,, ,, = (iii) $\dfrac{(\overline{X} - Z)}{\delta_Z}$

कार्लपियर्सन का सूत्र – विषमता $= (\overline{X} - Z)$

गुणक (j) $= \dfrac{(\overline{X} - Z)}{\sigma}$

भूयिष्ठक का मूल्य अनिश्चित होने पर

$$] = \frac{3(\bar{X} - M)}{\sigma}$$

द्वितीय माप :

$$Sk = Q_3 + Q_1 - 2M$$

$$] = \frac{Q_3 + Q_1 - 2M}{Q_3 - Q_1}$$

तृतीय माप .

$$Sk = \sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{N}}$$

$$] = \frac{\sqrt[3]{\frac{\Sigma d^3}{N}}}{\sigma}$$

विषमता की विशेषता (1) श्रेणी में असमानता बतलाती है।
(2) असमानता की दिशा बतलाती है।
(2) वक्र रेखा के आधार की ओर संकेत करती है।

शीर्षत्व $\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}$

विषमता गुणक : $\beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3}$

EXERCISE X

Theory

1. Distinguish between Dispersion and skewness and state the utility of each in statistical methods.

2 What is meant by skewness in a frequency curve? There are three measures of this characteristic. State each.

(B. Com. Raj 1949)

3. How will you measure Variability and Normality in a frequency distribution?

4. The formation of a frequency distribution can be studied in three ways-by studying variability, symmetry and normality. Explain by what measures it is done.

5. Point out the difference between dispersion and skewness Comment on the nature of the following distributions –

Distribution I	140,	140,	140,	140,	140.
Distribution II.	105,	120,	140,	160,	175.
Distribution III.	8,	21,	46,	163,	462

(B Com Raj, 1962)

6 What is Kurtosis? How is its value computed?

(M. Com, Raj, 1963)

Practical ·

1. The index numbers of prices of cotton and coal shares in 1942 were as follows:

Months	Index numbers of prices of shares	
	Cotton	Coal
Jan.	188	131
Feb	178	130
March	173	130
April	164	129
May	172	129
June	183	129
July	184	127
August	185	127
Sept	211	130
Oct.	217	137
Nov.	232	140
Dec	240	142

Which of the two shares do you consider more variable in price?

(M. A. Agra, 1944)

	Cotton	Coal
Ans C. V. =	12 27%	4 42%

Cotton shares are more variable.

2. Explain the meaning and significance of skewness. Which of the following distributions is more skew?

Distribution of weekly index Nos. of cost of living in Bombay in 1942		Distribution of weekly index Nos of cost of living in Bombay in 1943	
I. No.	Weeks	I. No	Weeks
140 – 150	5	200 – 210	10
150 – 160	10	210 – 220	10
160 – 170	20	220 – 230	10
170 – 180	9	230 – 240	8
180 – 190	6	240 – 250	7
190 – 200	2	250 – 260	7

(M Com. Agra 1950)

Formula — $\frac{3(\bar{X} - M)}{S.D}$

Ans	1942	1943
M.	166 35	227 5
S D	12·4	16·76
$_{1}$ =	·2	·3

(In 1942 distribution is more skew)

3 Explain the significa ce of dispersion in statistics State the practice of mean depends on dispersion.

The prices quoted for two sheres A & B on 15 successive days were as follows

Share A Rs. as.	Share B Rs. as.
12 – 13	135 – 8
12 – 15	137 – 8
13 – 14	139 – 0
13 – 6	140 – 0
14 – 0	142 – 10
13 – 7	140 – 0
13 – 4	138 – 6
12 – 5	135 – 10
13 – 2	130 – 9
13 – 0	134 – 7
13 – 0	142 – 0
13 – 1	141 – 0
13 – 5	140 – 0
13 – 3	138 – 0
13 – 7	136 – 0

Which of the shares would you consider more variable in value ?

(M. A Agra 1946)

Ans. C. V. = A 2.6% B 3 07%

B is more variable.

4 The demand and time Labilities of scheduled banks in 1945 were as follows .

Month (1945)	Liabilities of Scheduled Banks Demand	Time
Jan.	605	671
Feb.	612	220
March	604	222
April	605	222
May	614	294
June	624	235
July	624	241
August	636	249
Sept.	644	254
Oct.	655	261
Nov.	669	269
Dec.	681	277

Which is more Variable ?

(M. A. Agra 1947)

Ans. C. V. = Demand 3 7% Time 8 64%

Time liabilities are more variable.

5 From the figures given below .

Year	Allahabad	Banaras
1881	160	228
1891	175	213
1901	172	213
1911	172	204
1921	157	198
1931	184	205
1941	261	263

Compare the variability. (M. A. Agra 1948)

Allad. Ban.

Ans. C. V. = 17 9% 9 24%

Allahabad is more variable.

6. Find out the mean deviation, standard deviation and skewness of the following series by the method of moments Apply Shepperd's correction to the Measures of dispersion.

Measurement	Frequencies.
0 – 10	1
10 – 20	3
20 – 30	4
30 – 40	2

(M A. Agra 1951)

Ans M D. = 7.6

S.D. = 9

Formula $= \frac{3(\overline{X} - M)}{S\ D}$ j = – ·1667

7. What is skewness and how does it differ from dispersion? Find out coefficient of dispersion and coefficient of skewness from the following table giving wages of 230 persons and explain their significance

Wages	No. of persons
70 — 80	12
80 — 90	18
90 —100	35
100—110	42
110—120	50
120—130	45
130—140	20
140—150	8

(M. A Agra 1952)

Formula $= \frac{3(\overline{X} - M)}{S\ D}$ Ans j = ·332

S. D. = 17 3

j = .16

Apply any suitable method to the following table to calculate the average electricity consumption, (ii) the standard deviation

(iii) the range within which the middle 50% of the consumers fall.

Kilowatt hours of electricity consumed by 100 persons in Bombay

Consumption K watt hours	No. of users
O but lessthan 10	10
10—20	25
20—30	30
30—40	20
40—50	15

(M A. Agra 1952)

Ans $\overline{X} = 25.5$ K watt hours

S D = 12.03 " "

Range = 19 " "

9 The following figures give the annual production of sugar and oilseeds in India from 1945—46 to 1952—53

Year	Production in 0 0 0 tons	
	Sugar	oilseeds
1945—46	4,550	5,015
1946—47	4,915	5,150
1947—48	5,815	5,115
1948—49	4,870	4,505
1949—50	4,935	5,145
1950—51	5,615	5,080
1951—52	6,065	4,820
1952—53	5,260	4,635

Which of the two commodities shows greater variation in production ? Can you give any reasons for this difference in their production ?

(M A. Agra 1956)

Sugar oilseeds

Ans C V = 9.4% 7.4%

Sugar production is more variable.

10 From the following information regarding marks obtained at the college and the competitive examination, find which group is more homogeneous in intelligence ,

Marks at college	No of students	Marks at Com. Examination	No of students
100-150	20	1200-1250	50
150-200	45	1250-1300	85
200-250	50	1300-1350	72
250-300	25	1350-1400	60
300-350	19	1400-1450	16

Which of the two series is more skew ?

[B C [illegible]

Formula = $\frac{3(\bar{X} - M)}{S.D}$

Second is more homogeneons and more skew also.

Ans.	College Exam.	Comp. Exam.
Mean	218 08	1308 6
S D	60 8	57 83
C. V.	27.9%	4.42%
j	·1816	·2098

11 Calculate Karl Pearson's coefficient of skewness from the following data and state whether skewness is positive or negative,

Income per month (Rs.)	No of persons
0– 50	50
50–100	75
100–150	80
150–200	100
200–250	125
250-300	300
300–350	100
350–400	80
400-450	60
450–500	50

Formula = $\frac{3(\bar{X} - M)}{SD}$

(B. Com. Raj 1951)

Ans. j = —·19 i.e. skewness is negative

12. Calculate the coefficient of S Deviation of the following two series. Which of them is more variable?

Section A	Section B
192	83
288	87
236	93
229	109
184	124
260	126
348	126
291	101
330	102
243	108

(B. Com. Raj. 1952)
(P. C. S. 1938)

	A	B
Ans. C. V. =	19.83%	14.12%
S. D.	52.58	84 98

13 What is a coefficient of variation ? The following are the scores made by two batsmen A and B in a series of innings·

A	12	115	6	73	7	19	119	36	84	29
B ·	47	12	76	42	4	51	37	48	13	0

Ans (B Com Raj 1953)

	A	B
(1) Mean	50	33
(2) S D.	41 6	23 4
(3) C V =	83 20%	70 90%

(4) A is more variable

14. From the data given below find (a) the mode and (b) the skewness,

Age	20–25	25–30	30–35	35–40	40–45	45–50	50–55	55–60
No of Persons	50	70	80	180	150	120	70	50

(B Com. Raj. 1954)

Z = 38 9 Mean = 42 28 S. D. = 9 0

Coefficient of skewness = 376

$$\text{Formula} = \frac{(\bar{X} - Z)}{S\ D}$$

15. Find the mean and mean deviation of the following ages of married men in a certain community.

Ages in years	No of married men
15 – 25	33
25 – 35	264
35 – 45	290
45 – 55	214
55 – 65	128
65 – 85	58
85 & over	13

(B. Com , Raj 1956)

Ans. $\bar{X}$ = 44 1

M D. = 11 458

16. The following table gives the working class cost of living index numbers for Calcutta and Delhi from April 1954 to March 1955. Compute the mean deviation of the two series and point out in which of the two cities, the cost of living has been more variable

Index No. of cost of living Base 1949 = 100

Year & Month	Calcutta	Delhi
1954		
April	93	107
May	97	108
June	95	102
July	95	102
August	95	102
Sept	95	104
Oct	97	107
Nov.	97	105
Dec	92	102
Jan 1955	93	100
Feb	89	97
March	89	96

(B Com. Raj. 1957)

	Calcutta	Delhi
Ans. M. D. =	2 1	2.53
Coeff. =	0 022	0 027

Delhi is more variable

17. Find the second moment of dispersion and a coefficient of skewness from the data in the following series

Size of the item	Frequency
3 5	3
4.5	7
5 5	22
6 5	60
7 5	85
8 5	32
9 5	8
	217

Ans $(S D)^2 = 1.31$
$j = -'357$

$$\text{Formula} = \frac{(\bar{X} - Z)}{S\ D.}$$

18 Compute Quartile deviation and a coefficient of skewness for the following :

X	3	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58	63
F	5	9	28	49	58	82	87	79	50	37	21	6	3

(By Bowley's formula)

Ans. Q D. = 7'5
$j = -'33$

19 The following table gives the distribution of population in towns A and B in age groups Compare the variation and skewness of their frequencies,

Ans $Z = 5\ 03, \overline{X} = 7\ 55$

$j = 5851$

Formula $= \frac{(\overline{X} - Z)}{S D}$

22 Find out standard deviation and a coefficient of skewness for the given distribution.

Variable	Frequency
0 - 5	2
5 - 10	5
10 - 15	7
15 - 20	13
20 - 25	21
25 - 30	16
30 - 35	8
35 - 40	3
	75

(B Com., Alld 1951)

Ans $\overline{X} = 21\ 9$

$Z = 23\ 08$

$S\ D. = 7\ 90$

$j = -\ 1477$

Formula $= \frac{(\overline{X} - Z)}{S\ D}$

23 Calculate Karl Pearson's coefficient of skewness from th following data

Marks	No of students
Above 0	150
" 10	140
" 20	100
" 30	80
" 40	80
" 50	70
" 60	30
" 70	14
" 80	0

(B Com Alld 1953)

Ans (1) Mean = 39 27

(2) Median = 45 00

(3) S D = 22 8

(4) $j = -\cdot 7537$

Formula $= \frac{3\ (\overline{X} - M)}{S\ D}$

24 Compute the quartile coefficient of dispersion and skewness of the following array

Central size of the item	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
frequency	2	9	11	14	20	24	20	16	5	2

(By Bowley's formula)

Ans j = — 07
Coeff. Q D = 2659

25 Find out Karl Pearson's coefficient of skewness from the following figures

Income in Rs				No of Persons
I & not exceeding			9	75
10	"	"	19	100
20	"	"	29	302
30	"	"	39	603
40	"	"	49	452
50	"	"	59	63
60	"	"	69	15

(M Com Alld 1948)
Ans j = — ·2793

Formula — $\frac{3(\bar{X} - M)}{S\ D}$

26. The following table gives the distribution of population in towns A and B in age groups. Compare the variation and skewness of their frequencies

Age groups	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	above 70
Pop in 000								
A	18	16	15	12	10	5	2	1
B	10	12	24	32	29	11	3	1

Ans.	A	B
Coeff. Q D	55	·3
j =	083	— ·440.

(By Bowley's formula)

A is more variable and more skew also

27 Find out a coefficient of dispersion and a coefficient of skewness from the following figures and explain them

Income in Rs	No of Persons
1 & not exceeding 9	56
10 & not exceeding 19	70
19 & not exceeding 28	203
28 & not exceeding 37	406
37 & not exceeding 46	304
46 & not exceeding 55	42
55 & not exceeding 64	5

(B Com. Nagpur 1943)

(By Bowley's formula)

Ans. Q. D = 6 95
Coeff = 21
j = .0489

28 Calculate quartile deviation and a coefficient of skewness from the following.

Wages	Labourers
30 - 32	12
32 - 34	18
34 - 36	16
36 - 38	14
38 - 40	12
40 - 42	8
42 - 44	6

(By Bowley's formula)

Ans Q D. = 2 60
j = .09668

29. Calculate the standard deviation for the data given below using the interval 50—59, as working origin

Class-interval	Frequency
0 - 9	2
10 - 19	4
20 - 29	23
30 - 39	30
40 - 49	40
50 - 59	45
60 - 69	35
70 - 79	25
80 - 89	12
90 - 99	9
100 - 109	6
110 - 119	10
120 - 129	3
130 - 139	1
140 - 149	1
150 - 159	3
Total	249

36 Find the mean, mode, standard deviation and a coefficient of skewness for the following —

Years under	10	20	30	40	50	60
No of persons	15	32	51	78	97	109

(M. A, Raj , 1961)

Ans Mean = 29 95 , mode = 35 , S D = 15.49,

j = — 32

37 What is sheppards' correction ? When it is applied ?

You are given the following Values of Higher Moments—

$\pi_2 = 43{\cdot}353$, $\pi_3 = -9.774$; $\pi_4 = 5508\ 567$

Find the corrected values of each one of these, taking into account the class interval which is 3 (M Com. Raj 1963)

Ans — $u_2 = 42\ 603$

$u_4 = 5315\ 828$

अध्याय ११

सह–सम्बन्ध

(Correlation)

अब तक हमने उन रीतियो का अध्ययन किया है जिनके द्वारा अक समूहो, वर्गों अथवा श्रेणियो की तुलना की जा सकती है परन्तु यह भी समझना आवश्यक है कि विभिन्न वर्गों मे कुछ पारस्परिक सम्बन्ध भी होता है। एक तत्व के एक दिशा मे परिवर्तित होने से दूसरे तत्व पर क्या प्रभाव पडता है और प्रभाव पडता भी है या नही यह अध्ययन भी करना बहुधा आवश्यक हो जाता हैं। मूल्यो की वृद्धि का माल की बिक्री पर, आयु का ऊचाई या वजन पर अथवा अन्य अनेकानेक तत्वो का एक दूसरे पर प्रभाव पडता है। इस प्रभाव की जानकारी भी करनी चाहिये क्योंकि अनेक क्षेत्रो मे इस प्रकार के सम्बन्ध की जानकारी उपयोगी सिद्ध होती है।

अत जब दो अ क समूहो अथवा वर्गों मे कोई स्पष्ट सम्बन्ध दृष्टिगोचर हो तो इसे सह सम्बन्ध कहते हैं। इस सम्बन्ध मे यह जान लेना परम आवश्यक है कि एक वर्ग के अ क यदि एक दिशा की ओर झुकते हैं तो दूसरे वर्ग के अ को के उसी दिशा मे झुकने पर सह-सम्बन्ध माना जायगा, ऐसी बात नही है। बात केवल सम्बन्ध की है। मूल्यो के परिवर्तन के साथ प्राय वस्तु की माग मे विपरीत परिवर्तन होता है भले ही परिवर्तन की मात्रा कितनी ही हो। अत महत्वपूर्ण बात यह है कि एक अ क समूह मे परिवर्तन के कारण दूसरे अ क समूह मे, चाहे विपरीत दिशा मे परिवर्तन हो चाहे एक ही दिशा मे, यदि परिवर्तन होता है तो सह सम्बन्ध विद्यमान है अन्यथा नहीं। हम केवल यह कहेगे कि सह सम्बन्ध ऋणात्मक है या धनात्मक। यदि दोनो अ क समूह एक ही दिशा मे बदलते हैं तो सह-सम्बन्ध धनात्मक (Positive) है और यदि विपरीत दिशा में बदलते हैं तो सह सम्बन्ध ऋणात्मक (Negative) होगा। मूल्य तथा माग का सह सम्बन्ध ऋणात्मक होता है और मूल्य तथा पूर्ति का सम्बन्ध धनात्मक होता है।

सह-सम्बन्ध ज्ञात करने का इस दृष्टि से बडा महत्व है कि दो श्रेणियो की तुलना करने के लिए यह जानना भी आवश्यक है कि वह स्वतन्त्र हैं अथवा एक दूसरी पर निर्भर करती हैं। कारण-प्रभाव का सम्बन्ध इसी से ज्ञात किया जाता है। यदि यह जानकारी हो जाय कि वास्तव मे दो समूहो में सह सम्बन्ध है तो एक श्रेणी के एक अङ्क के आधार पर दूसरी श्रेणी का अङ्क निकाला जा सकता है। साधारणतया सह सम्बन्ध का अध्ययन परस्पर निर्भर तत्वो जैसे पति पत्नी की आयु, पत्तो की लम्बाई चौडाई, आय और व्यय, आयात-निर्यात आदि के बारे मे ही किया जाता है।

सह-सम्बन्ध ज्ञात करने की निम्न पद्धतिया हैं।

(1) गणितीय रीति द्वारा

(2) रेखा चित्रीय रीति द्वारा

(3) क्रमान्तर (Rank Differences) रीति द्वारा

(4) सगामी विचलन (Concurrent deviation) गुणक द्वारा

(5) प्रतीपगमन गुणक (Coefficient of Regression) द्वारा

सह-सम्बन्ध की सीमा .

यह सम्बन्ध सब स्थानो पर समान नही हो सकता है। उदाहरण स्वरूप यदि मूल्यो मे दस प्रतिशत वृद्धि हो और वस्तुओ की माग 20 प्रतिशत कम हो जाय और दूसरी ओर मूल्यो मे दस प्रतिशत कमी आने पर वस्तुओ की माग 30 प्रतिशत बढ़ जाय तो दोनो दशाओ मे सह-सम्बन्ध भिन्न है। पहली दशा मे सहसम्बन्ध दूसरी दशा से अधिक है क्योकि दूसरी स्थिति को बजाय पहली स्थिति मे परिवर्तन दोनो मे अधिक समीप है। परिवर्तन जितना अधिक समीप होता है उतना ही सह-सम्बन्ध अधिक माना जायगा। यदि दोनो समूहों मे परिवर्तन अधिक भिन्न है तो सहसम्बन्ध की मात्रा कम होती है। यदि दोनो में परिवर्तन बिलकुल समान्तर हो तो यह सहसम्बन्ध पूर्ण होगा। कभी कभी यह भी हो सकता है कि दो श्रेणियो मे कोई सहसम्बन्ध न हो। अत सहसम्बन्ध सामान्य, अधिक, बहुत अधिक, पूर्ण अथवा नकारात्मक भी हो सकता है। साथ में यह भी बतलाना चाहिये कि सह-सम्बन्ध धनात्मक (अनुलोम) है अथवा ऋणात्मक (विलोम)।

सहसम्बन्ध को सहसम्बन्ध गुणक (Coefficent of correlation) द्वारा प्रकट करते है। गुणक कभी भी + 1 या - 1 से अधिक नही हो सकता, अर्थात् सहसम्बन्ध को सीमा - 1 और + 1 है। सहसम्बन्ध गुणक के - 1 होने का तात्पर्य यह है कि सहसम्बन्ध पूर्ण विलोम (Perfectly Negative) है और + 1 होने की दशा मे सहसम्बन्ध पूर्ण अनुलोम (Perfectly Positive) माना जायगा। परन्तु व्यवहारिक जीवन में पूर्ण अनुलोम अथवा पूर्ण-विलोम सह-सम्बन्ध मिलना बहुत कठिन है। साधारणतया यदि सह-सम्बन्ध गुणक 5 होता है तो उसे सामान्य परिमाण का माना जायगा, यदि 5 से कम हुआ तो अल्प परिमाण का सह-सम्बन्ध होगा और 5 से अधिक होने पर उच्च परिमाण का तथा 75 से अधिक होने पर अत्यन्त उच्च परिमाण का सहसम्बन्ध जानना चाहिये। उदाहरणस्वरूप यदि सह-सम्बन्ध गुणक 67 हो तो उच्च परिमाण का अनुलोम सहसम्बन्ध होगा। यदि सहसम्बन्ध गुणक -- 32 हो तो निम्न अथवा अल्प परिमाण का विलोम सह-सम्बन्ध होगा।

सहसम्बन्ध गुणक ज्ञात करने की रीति (To Find out coefficient of correlation) सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात करने के लिये महान् जीवशास्त्री तथा साख्यिक कार्ल पियर्सन द्वारा दिया हुआ सूत्र बहुत काम मे लिया जाता है। इस रीति के अनुसार दोनो समूहो के प्रत्येक मूल्य का समान्तर मध्यक से विचलन से लिया जाता है और दोनो समूहो के प्रत्येक मूल्य के विचलन को दूसरे से ठीक विपरीत (opposite) विचलन से गुणा कर उनका योग निकाल लिया जाता है। इस योग में दोनो समूहो के प्रमाप विचलनो के गुणनफल को मदो की संख्या मे गुणा कर जो परिणाम प्राप्त हो उसका भाग दे दिया जाता है। उत्तर में सहसम्बन्ध गुणक उपलब्ध होगा। इस सूत्र को Product Moment अर्थात् घात गुणक सूत्र भी कहते है।

सूत्र इस प्रकार है $r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_1\sigma_2}$

r से तात्पर्य सह-सम्बन्ध गुणक, xy मूल्यो के मध्यक से विचलनो के गुणनफल का योग, N मदो की संख्या, तथा σ_1 प्रथम समूह का प्रमाप विचलन और σ_2 दूसरे समूह का प्रमाप विचलन है। अब xy धनात्मक (Positive) है तो गुणक भी धनात्मक निकलेगा और xy के ऋणात्मक होने की दशा मे गुणक भी ऋणात्मक ही होगा।

कार्ल पियर्सन सूत्र-प्रत्यक्ष रीति (Direct method)

उदाहरण 11 1

निम्नलिखित सारणी से पूंजी तथा लाभ में पारस्परिक सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिए।

पूंजी (रु०)	लाभ (रु०)
1,000	300
2,000	400
3,000	800
4,000	800
5,000	1,000
6,000	1,500
7,000	1,500
8,000	2,500
9,000	2,200
10,000	3,000
55,000	14,000

सह सम्बन्ध ज्ञात करने के लिये यह उचित है कि मदो को कुछ संक्षिप्त कर लिया जाय। अत. हम मदो को सैकडो मे रखते हैं।

सह-सम्बन्ध आकलन

1 X पूंजी रु० (सौ मे)	2 स. मध्यक (55) से विचलन x	3 विचलन का वर्ग x^2	4 Y लाभ रु० (सौ मे)	5 स. मध्यक (14) से विचलन (y)	6 विचलन का वर्ग (y^2)	7 (xy)
10	− 45	2,025	3	− 11	121	+495
20	− 35	1,225	4	− 10	100	+350
30	− 25	625	8	− 6	36	+150
40	− 15	225	8	− 6	36	+ 90
50	− 5	25	10	− 4	16	+ 20
60	+ 5	25	15	+ 1	1	+ 5
70	+15	225	15	+ 1	1	+ 15
80	+25	625	25	+11	121	+275
90	+35	1,225	22	+ 8	64	+280
100	+45	2,025	30	+16	256	+720
10|550 $\overline{X}_1$=55	—	8,250 Σx^2	10|140 $\overline{X}_2$=14		752 Σy^2	2400 Σxy

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\frac{8250}{10}} = 28.72$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{752}{10}} = 8.67$$

$$r = \frac{\Sigma xy}{N\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \frac{2400}{10 \times 28.72 \times 8.67}$$

$$\text{स० गु० } (r) = \frac{2400}{2490} = .96$$

दोनो श्रेणियो मे अत्यन्त उच्च परिमाण का धनात्मक सहसम्बन्ध है। इस प्रश्न मे प्रमाप विचलन तक तो सारा क्रम पहले स्पष्ट किया जा चुका है। केवल Σxy को थोडा और स्पष्ट करने की आवश्यकता है Σxy आमने-सामने के समान्तर मध्यक के प्राप्त विचलनो के गुणनफल का योग होता है। प्रस्तुत प्रश्न मे -45×-11, -35×-10 आदि के सामने ही xy के खाने मे क्रमश 495, 350 आदि लिखा है जिनका योग $\Sigma xy = 2400$ है।

दूसरी रीति वैसे तो कार्ल पियर्सन का सह सम्बन्ध गुणक निकालने का सूत्र बहुत प्रसिद्ध तथा प्रचलित है परन्तु गुणक निकालने के लिए निम्न सूत्र अधिक सरल है—

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

इस सूत्र मे हमे प्रमाप विचलन नही निकालने पड़ेंगे। शेष सभी आकलन कार्ल पियर्सन सूत्र की आवश्यकतानुसार ही करना पड़ेगा। उदाहरण स० 11.1 मे दिये गये हल मे—

$$\Sigma xy = 2,400$$

$$\Sigma x^2 = 8,250$$

$$\Sigma y^2 = 752$$

$$\text{अत } r = \frac{240}{\sqrt{8,250 \times 752}}$$

$$= \frac{2400}{2490} = .96$$

इस प्रकार इस सूत्र द्वारा भी परिणाम वही प्राप्त हुआ जो कार्ल पियर्सन के सूत्र मे निकालने पर हुआ। अत. विचलन के लम्बे जोड-गुणा से बचने के लिये इस सूत्र का भी प्रयोग किया जाता है। वास्तव मे ऊपर बतलाए गए दोनों ही सूत्र ऐसी स्थिति मे काम मे आ सकते है जबकि समान्तर मध्यक सम्पूर्ण अंक में प्राप्त हो जाय। पूरे अक मे प्राप्त न होने की दशा मे लघु रीति का प्रयोग ही सरल रहता है।

सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात करने की लघु रीति (Short cut method)

समान्तर मध्यक के अंशों में होने की दशा में लघुरीति का प्रयोग करना चाहिये क्योंकि इसमें प्राकलन सम्बन्धी बहुत श्रम बच जाता है। इस रीति के अनुसार किसी पूर्ण संख्या को समान्तर मध्यक मान कर इससे विचलन निकाल लेने चाहिये। तत्पश्चात् लघु रीति से प्रकार विचलन निकाल लेने चाहिये। इसी प्रकार x^2, y^2 तथा Σxy निकाल लिये जावेंगे। बाद में Σxy में से प्रसली तथा काल्पनिक मध्यकों का अन्तर घटा देना चाहिये। कार्ल पियर्सन के ही सूत्र का लघु रीति से इस प्रकार रखा गया है

$$r = \frac{\Sigma xy - N(\overline{X}_1 - A_1)(\overline{X}_2 - A_2)}{N\sigma_1\sigma_2}$$

इसमें r, Σxy N, σ_1 तथा σ_2 के अर्थ तो प्रत्यक्ष रीति के अनुसार ही हैं $\overline{X}_1$ से तात्पर्य पहली श्रेणी की असली समान्तर मध्यक तथा $\overline{X}_2$ से तात्पर्य दूसरी श्रेणी की समान्तर मध्यक से है। A_1 और A_2 क्रमशः दोनों श्रेणियों के काल्पनिक समान्तर मध्यक हैं।

उदाहरण 11.2

X तथा Y के मूल्यों में सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिये।

X	Y
78	125
89	137
97	156
69	112
59	107
79	136
68	123
57	108

सह सम्बन्ध गुणक का आकलन

मूल्य X	विचलन (69 से) x	विचलन क. स. म. वर्ग x^2	मूल्य Y	विचलन क. स. म. (112 से) y	विचलन वर्ग y^2	(2×5) xy
1	2	3	4	5	6	7
78	9	81	125	13	169	117
89	20	400	137	25	625	500
97	28	784	156	44	1936	1232
69	0	0	112	0	0	0
59	−10	100	107	−5	25	50
79	10	100	136	24	576	240
68	−1	1	123	11	121	−11
57	12	144	108	−4	16	48
N = 8	Σx=44	Σx^2= 1610	N = 8	Σy = 108	Σy^2=3468	Σxy 2176

श्रेणी X

असली समान्तर मध्यक $= 69 + \frac{44}{8} = 74.5$

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1610}{8} - \left(\frac{44}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{171}$$

$$= 13.07$$

श्रेणी Y

असली समान्तर मध्यक $= 112 + \frac{108}{8} = 125.5$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{3468}{8} - \left(\frac{108}{8}\right)^2}$$

$$= \sqrt{251.25}$$

$$= 15.85$$

$$r = \frac{\Sigma xy - N(\bar{X}_1 - A_1)(\bar{X}_2 - A_2)}{N\sigma_1\sigma_2}$$

$$= \frac{2176 - 8(74.5 - 69)(125.5 - 112)}{8 \times 13.07 \times 15.85}$$

$$= \frac{1582}{1657.27} = .95$$

उत्तर मे यह प्रकट है कि सह सम्बन्ध लगभग सम्पूर्ण तथा धनात्मक है ।

यद्यपि कार्ल पियर्सन द्वारा प्रतिपादित लघु रीति द्वारा सह-सम्बन्ध ज्ञात करने का सूत्र बहुत प्रसिद्ध है। किन्तु वह अधिक समय लेता है व आकलन भी जटिल है । इसी सूत्र को सरल करके निम्न प्रकार मे लिखा जा सकता है —

$$r = \frac{\Sigma xy \; N - (\Sigma x \; \Sigma y)}{\sqrt{\Sigma x^2 . N - (\Sigma x)^2} \sqrt{\Sigma y^2 \; N - (\Sigma y)^2}}$$

इस सूत्र की यह विशेषता है कि इसमे न असली समान्तर मध्यक निकालनी पडती है और न ही प्रमाप विचलन ज्ञात करने की आवश्यकता रहती है। अत इसका प्रयोग अधिक प्रचलित है।

ऊपर दिये हुए उदाहरण 11 2 मे इस सूत्र को हम निम्न प्रकार से लागू करते हैं।

$\Sigma xy = 2176$

$\Sigma x = 44$

$\Sigma y = 108$

$\Sigma x^2 = 1610$

$\Sigma y^2 = 3468$

$$r = \frac{2176 \times 8 - (44 \times 108)}{\sqrt{1610 \times 8 - 44^2} \sqrt{3468 \times 8 - 108^2}}$$

$$= \frac{1582}{\sqrt{1368 \times 2010}}$$

$= \text{A. L.} [\log. 1582 - \frac{1}{2} (\log \; 1368 + \log \; 2010)]$

$= \text{A L} [3\;1593 - \frac{1}{2} (3\;1360 + 3\;3020)]$

$= \text{A L} [3\;1993 - \frac{1}{2} (6\;4380)]$

$= \text{A. L} (3\;1993 - 3\;2190)$

$= \text{A. L} \; \bar{1}\;9803$

$= .9557$

इसका परिणाम भी वही है जो पहले सूत्र से प्राप्त हुआ था । आगे हम इसी सूत्र का प्रयोग करेंगे ।

कालिक परिवर्तनो मे सहसम्बन्ध—ऊपर के दोनो उदाहरणो मे मूल्यो मे एक निश्चित समय में होने वाले सहसम्बन्ध का अध्ययन किया गया है परन्तु लम्बी अवधि में फैले हुए तथ्याको के पारस्परिक सम्बन्ध का भी अध्ययन करने की आवश्यकता पडती है। काल श्रेणी के अक दो प्रकार के हो सकते हैं। (1) दीर्घावधि परिवर्तनो सम्बन्धी, तथा (2) अल्पावधि परिवर्तनो सम्बन्धी। दीर्घावधि परिवर्तनो अथवा अको मे सहसम्बन्ध पिछले उदाहरणो मे दी गई रीतियो से ही ज्ञात किया जाता है परन्तु अल्पावधि से सम्बन्धित अको में सह सम्बन्ध ज्ञात करने की रीति में कुछ परिवर्तन करना आवश्यक है।

यह सर्वथा सम्भव है कि कभी कभी दो चलों में दीर्घकालीन परिवर्तन तो एक ही दिशा में हो परन्तु अल्पकालीन परिवर्तन विपरीत दिशा में होते हो तो हमें पिछले उदाहरणों में दी हुई रीतियों का प्रयोग करने से अल्पकालिक परिवर्तनों सम्बन्धी परिणाम अशुद्ध मिलेंगे क्योंकि इन उदाहरणों में दी गई रीतियों से तो धनात्मक सहसम्बन्ध ही दिखाई देगा जबकि अल्पकाल में वास्तव में सहसम्बन्ध ऋणात्मक है। अतः वास्तविक तथ्यों से सहसम्बन्ध ज्ञात करना भ्रामक होगा। इस दोष से मुक्त करने के लिये आवश्यक है कि हम परिवर्तनों का झुकाव या उपनति (Trend) ज्ञात करलें और मूल अंको का इससे विचलन निकाल कर सह-सम्बन्ध ज्ञात करें। इस प्रकार निकाले गए परिणाम अधिक शुद्ध होंगे।

नीचे भारत के आयात तथा निर्यात के परिमाण देशनांक दिये गये हैं। इनमें सह-सम्बन्ध ज्ञात कीजिये।

उदाहरण 11 3

परिमाण देशनांक

1952 – 53 = 100

अवधि	आयात X	निर्यात Y
नवम्बर 1955	28	105
दिसम्बर ,,	28	112
जनवरी 1955	48	122
फरवरी ,,	53	107
मार्च ,,	38	135
अप्रेल ,,	23	78
मई ,,	21	91
जून ,,	24	101
जुलाई ,,	17	101
अगस्त ,,	34	127
सितम्बर ,,	26	139
अक्तूबर ,,	28	130
नवम्बर ,,	24	125
दिसम्बर ,,	29	121

सह-सम्बन्ध आकलन

अवधि	आयात				निर्यात				
	पैमानांक X	पंच मासिक चल माध्य	चल माध्य से विचलन x	विचलनों के वर्ग x^2	पैमानांक Y	पंच मासिक चल माध्य	चल माध्य से विचलन y	विचलनों के वर्ग y^2	आयात विच-लन × निर्यात विचलन xy
नवम्बर 1955	25				105				
दिसम्बर ,,	28				112				
जनवरी 1956	48	30	9	81	122	116	6	36	54
फरवरी ,,	53	38	15	225	107	111	−4	16	−60
मार्च ,,	38	37	1	1	135	107	28	784	28
अप्रैल ,,	23	32	−9	81	78	102	−24	576	216
मई ,,	21	25	−4	16	91	101	−10	100	40
जून ,,	24	24	0	0	101	100	1	1	0
जुलाई ,,	17	24	−7	49	101	112	−11	121	77
अगस्त ,,	34	26	8	64	127	120	7	49	56
सितम्बर ,,	26	26	0	0	139	124	15	225	0
अक्तूबर ,,	28	28	0	0	130	128	2	4	0
नवम्बर ,,	24				125				
दिसम्बर ,,	29				121				
				517 Σx^2				1912 Σy^2	Σxy 411

(पंचमासिक चल माध्य निकालने में दशमलव अंशों को छोड़ कर पूरी संख्यायें ही ली गई हैं)

इसमें N या मदों की संख्या 10 ही मानी जायगी क्योंकि गुणक निकालने में जनवरी से अक्तूबर तक के अंक ही काम में लिए जा सकते हैं।

$$r = \frac{\Sigma xy}{\sqrt{\Sigma x^2 \times \Sigma y^2}}$$

$$= \frac{411}{\sqrt{517 \times 1912}}$$

$= \text{A L} \; [\log 411 - \frac{1}{2}(\log 517 + \log 1912)]$

$= \text{A L} \; [2\ 6138 - \frac{1}{2}(2\ 7135 + 3\ 2814)]$

$= \text{A. L} \; [2\ 6138 - 2\ 9974]$

$= \text{A. L} \; \bar{1}\ 6164$

$= 4134$

आयात तथा निर्यात में साधारण धनात्मक सह-सम्बन्ध है।

Y on X = यदि X = 10	20	30	40	50
तो Y = 10 4	17 7	25	32 3	39 6

यद्यपि चल माध्य प्रयोग द्वारा अल्पकालीन परिवर्तनों का सह-सम्बन्ध ज्ञात कर लेते हैं परन्तु उत्तम यही होगा कि सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए ऐसी श्रेणियों का प्रयोग किया जाय जिनमे से उन्नति तथा सामयिक परिवर्तन हटा लिए गए हो, क्योंकि अल्पकालीन परिवर्तनों का वास्तविक जीवन मे विशेष महत्व नहीं होता। व्यापार, आर्थिक क्षेत्र अथवा अन्य सभी क्षेत्रों मे स्थायी तत्वों को महत्व दिया जाता है। अत: अल्पकालीन परिवर्तन सह-सम्बन्ध व्यवहार मे विशेष उपयोगी नहीं है। इतना अवश्य है कि उनसे सह-सम्बन्ध की नियमितता अथवा अनियमितता का पता लग जाता है।

वर्गित श्रेणियों मे सह सम्बन्ध गुणक निकालना [Co efficient of correlation in grouped Series] बहुधा ऐसी श्रेणियां सह-सम्बन्ध निकालने के लिए दी जाती हैं जो द्विगुण होती हैं अर्थात् एक ही सारणी मे दो वर्ग होते हैं जिनके वर्गान्तर तथा आवृत्तियां पृथक् होते हुए भी परस्पर सम्बन्ध रखती हैं। ऐसी श्रेणियों को सह-सम्बन्ध [Correlation Table] सारणी भी कहते हैं। ऐसी श्रेणियों का भी सह-सम्बन्ध ज्ञात करने के लिए हम पीछे दिए गए सूत्र का ही प्रयोग करेंगे, जो इस प्रकार है —

$$r = \frac{\Sigma fxy \ N (\Sigma fx \ \Sigma fy)}{\sqrt{\Sigma f x^2 N - (\Sigma fx)^2} \sqrt{\Sigma fy^2 . N - (\Sigma fy)^2}}$$

इस सूत्र में f इसलिए जोड़ा गया है कि सतत श्रेणी में आवृत्ति होती है और वर्गों को उनसे गुणा करना पड़ता है। कार्ल पियर्सन का मूल सूत्र प्रयोग करने मे सारणियां बना कर अलग २ प्रमाप विचलन करने पड़ते हैं तथा फिर सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात करना होता है। प्रस्तुत सूत्र सर्वत्र लागू होता है और एक सारणी द्वारा ही गुणक निकालने मे सहायता देता है। नीचे उदाहरण द्वारा यह स्पष्ट होगा।

उदाहरण 11.4

200 व्यक्तियों के भार तथा लम्बाई

लम्बाई (इंचों में)	भार पौंडों मे					योग
	80 – 90	90 – 100	100 -110	110–120	120–130	
50–55	2	6	12	10	5	35
55–60	4	7	20	13	8	52
60–65	2	11	25	20	13	71
65–70	—	6	17	14	5	42
योग	8	30	74	57	31	200

प्रस्तुत द्विगुण सारणी को अलग अलग सारणियों में इस प्रकार रख सकते हैं और उनका अलग अलग प्रमाप विचलन निकाल सकते हैं।

सारिणी 1

लम्बाई इंचों में	संख्या
50 -- 55	35
55 -- 60	52
60 -- 65	71
65 -- 70	42
	200

सारणी 2

भार पौंडो में	संख्या
80 - 90	8
90 - 100	30
100 - 110	74
110 - 120	57
120 - 130	31
	200

अलग अलग सारणियों से प्रमाप विचलन तो प्राप्त हो जायेंगे परन्तु Σxy निकालने के लिए उन्हें एक सम्मिलित सारणी में पुनः रखना होगा। हम एक ही सारणी द्वारा गुणक निकालेंगे और ऊपर बतलाया हुआ सूत्र प्रयोग में लेंगे।

Y on X = यदि X = 10 20 30 40 50

तो Y = 10 4 17 7 25 32 3 39 6

भार (पौंडा में) → लम्बाई (इंचों में) ↓		80 – 90	90 – 100	100–110	110–120	120–130				
y	x	–2	–1	0	1	2	f	– fy	fy^2	fxy
50–55	–2	**8** 2	**12** 6	**0** 12	**–20** 10	**–20** 5	35	–70	140	–20
55–60	–1	**8** 4	**7** 7	**0** 20	**–13** 13	**–16** 8	52	–52	52	–14
60–65	0	**0** 2	**0** 11	**0** 25	**0** 20	**0** 13	71	0	0	0
65–70	1	**–** –	**–6** 6	**0** 17	**14** 14	**10** 5	42	42	42	18
	f	8	30	74	57	31	200 N	–80 Σfy	234 Σfy^2	–16 Σfxy
	fx	–16	–30	0	57	62	73 Σfx			
	fx^2	32	30	0	57	124	243 Σfx^2			

$$r = \frac{\Sigma fxy.\ N - (\Sigma fx\ \ \Sigma fy)}{\sqrt{[\Sigma fx^2\ \ N - (\Sigma fx)^2] \times [\Sigma fy^2\ \ N - (\Sigma fy)^2]}}$$

$$= \frac{-16 \times 200 - (73) \times -80)}{\sqrt{[243 \times 200 - (73)^2][234 \times 200 - (-80)^2]}}$$

$$= \frac{-3200 - (-5840)}{\sqrt{(48600 - 5329)\ (46800 - 6400)}}$$

$$= \frac{2640}{\sqrt{43271 \times 40400}}$$

$= A\ L\ [\log\ 2640 - \frac{1}{2}(\log\ 43271 + \log.\ 40400)]$

$= A\ L\ [3.4216 - \frac{1}{2}(4.6362 + 4.6054)]$

$= A\ L\ [3.4216 - \frac{1}{2}(9.2426)]$

$= A.L\ (3.4216 - 4.6213)$

$= A\ L\ (2+1.4215 - 4.6213)$

$= A\ L\ (\bar{2}.8003)$

$= .06314$

स्पष्ट है कि लम्बाई तथा भार मे सह सम्बन्ध लगभग शून्य है।

प्रस्तुत प्रश्न मे भिन्न भिन्न अ क इस प्रकार प्राप्त किए गए है।

f आवृत्ति है तथा प्रश्न मे दी हुई है।

x और y भार व लम्बाई के पद विचलन है। इस प्रकार के प्रश्न मे जब वर्गान्तर समान हो तो पद-विचलन रीति से विचलन निकालना सरल रहता है। यदि वर्गान्तर समान न हो तो हमे दोनो ओर मध्य-बिन्दु का एक-एक खाना और बनाना पड़ेगा और दोनो ओर कल्पित मध्यक से विचलन लेने होंगे।

y स्तम्भ मे लिखे विचलनो को इसके ठीक सामने आवृत्ति के खानो में जो आवृत्तिया लिखी हुई हैं उनमे गुणा किया गया है इसी लिए fy के नीचे क्रमशः $35 \times -2 = -70$, $52 \times -1 = -52$, $0 \times 0 = 0$, तथा $42 \times 1 = 42$ रखे गये हैं। नीचे fy का योग लगा दिया गया जो स्पष्ट ही -80 आता है।

fy^2 —fy स्तम्भ मे जो सख्यायें आई हैं उन्हे एक बार पुन y के विचलनों से गुणा करने से fy^2 के अ क प्राप्त होते हैं। प्रस्तुत प्रश्न मे 35 को पुन. -2 से, -52 को पुन. -1 से तथा 42 को पुन 1 से गुणा किया है।

fxy —हमने प्रत्येक आवृत्ति के ऊपर एक एक सख्या मोटे अ को मे दिखाई है। यह सख्याए आवृत्ति तथा भार (पौंडो मे) के विचलनो और लम्बाई के विचलनो से गुणा कर प्राप्त की गई हैं। भार के विचलन 105 से लिए गये हैं और सक्षिप्त करने के लिये सबको 10 मे विभक्त कर दिया गया है। इस प्रकार भार और लम्बाई के विचलनो को आवृत्ति से (तीनो का एक साथ) गुणा कर प्राप्त किए गए अ क क्रमश उन आवृत्तियो के ऊपर ही रख दिए गए हैं जिन्हे विचलनो से गुणा कर वह अ क प्राप्त किए

गए हैं। fxy स्तम्भ में इन अंकों को पंक्ति के अनुसार जोड़ कर रखा गया है और नीचे ही नीचे उनका योग कर दिया गया है।

fx —fy की तरह ही भार के मूल्यों के विचलनों को उनके ठीक सामने लिखी आवृत्ति से गुणा किया गया है।

fx^2 अब fx खड़ी रेखा के समानान्तर लिखी हुई संख्याओं को क्रमश उनके ठीक ऊपर लिखे हुए x के विचलनों में गुणा देने से जो संख्याएं प्राप्त होती हैं वह x^2 है।

इस प्रकार सूत्र के लिए आवश्यक प्रत्येक अंश का आकलन करने के पश्चात् गणित द्वारा सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात कर लिया गया है। यदि प्रत्येक वर्गान्तर का विस्तार समान हो तो पद विचलन रीति का प्रयोग कर मध्य-बिन्दु का खाना भी हटाया जा सकता है। यदि मूल्य अवरोही क्रम में दिये गये हो तो विचलन भी उल्टे हो जाते हैं अर्थात् + के चिन्ह 0 से ऊपर व (−) के चिन्ह 0 से नीचे लगाने चाहिए। यह ध्यान रहे कि सह सम्बन्ध का जो उत्तर आवे उसे हम (i) से गुणा न कर दें। इस सूत्र में उत्तर को (i) से गुणा करने की कोई आवश्यकता नहीं है।

मान्यताएं —कार्ल पियर्सन का सह-सम्बन्ध गुणक दो मान्यताओं पर आधारित है, प्रथम तो यह कि दोनों श्रेणियां, जिनमें सह सम्बन्ध ज्ञात करना है असंख्य तत्वों द्वारा प्रभावित होती है जिससे कि ग्रन्थ में स्थिति सामान्य होने की सम्भावना रहती है। हम जानते हैं कि इस प्रकार की सम्भावनाएं मुद्रा उछालने में, वस्तुओं के देशान्तरों में तथा लम्बाई अथवा भार आदि ज्ञात करने में प्राय रहती है। दूसरे, परिवर्तनों को प्रभावित करने वाली शक्तियां बहुधा एक दूसरे पर निर्भर रहती हैं। उनके परिवर्तनों में स्वतन्त्र अस्तित्व नहीं होता। उदाहरणस्वरूप आय का जीवनस्तर अथवा उपभोग पर, आयु का भार तथा लम्बाई पर तथा मांग का मूल्य पर प्रभाव पड़ने से ही उनमें परिवर्तन लक्षित होते हैं।

सह सम्बन्ध गुणक में सम्भावित भूल (Probable Error in coefficient of correlation)

सांख्यिकीय तथ्य बहुत कुछ अनुमानों एवं सम्भावनाओं पर आधारित होते हैं अत उनमें भूल की सम्भावना रहती है। अध्याय 5 में सम्भावित भूल के सम्बन्ध में विस्तार से बतलाया जा चुका है। यहां हम केवल गुणक में भूल कहां तक रह सकती हैं, इसके बारे में बतलायेंगे।

सम्भावित भूल वह अङ्क है जो यदि सह सम्बन्ध गुणक में से घटा दिया जाय या उसमें जोड़ दिया जाय, तो हमें दो ऐसी संख्याएं प्राप्त हो जाती हैं जिनके बीच में ही उसी वर्ग के दैव निदर्शन रीति से चुने गये अङ्कों का शुद्ध सह-सम्बन्ध गुणक प्रत्येक परिस्थिति में होगा। अर्थात् सह सम्बन्ध गुणक उन दोनों सीमाओं के बीच में कहीं भी हो सकता है।

सम्भावित भूल के लिये निम्न सूत्र दिया जाता है।

$$P.E\ (स\ भू) = 0\ 6745\ \sqrt{\frac{1-r^2}{N}}$$

यहां r से तात्पर्य सह सम्बन्ध गुणक से है तथा N मदों की संख्या को प्रकट करता है। उदाहरण 11.2 में सह-सम्बन्ध गुणक ·95 आया है इसकी सम्भावित भूल इस प्रकार ज्ञात होगी

सह सम्बन्ध गुणक = ·95

मद संख्या = ८

$$\text{सम्भावित भूल} = \cdot 6745 \frac{1-(\cdot 95)^2}{\sqrt{8}}$$

$$= \cdot 023$$

अब इन अङ्कों का सह सम्बन्ध गुणक इस प्रकार लिखना चाहिये

$$r = \cdot 95 \pm \cdot 023$$

अर्थात् गुणक की सीमाएं ·927 तथा ·973 हैं। इसका तात्पर्य यही है कि इन्हीं वर्गों के ८–८ और मद दैव-निदर्शन द्वारा चुन कर लिए जाय तो साधारणतया इनका सह सम्बन्ध गुणक भी ·927 तथा ·973 की सीमाओं के अन्तर्गत ही होगा।

सह सम्बन्ध गुणक महत्त्वपूर्ण है या नहीं यह जानने के लिए स्मरण रखना चाहिये कि साधारणतया ·5 अथवा इससे अधिक गुणक को महत्वपूर्ण अथवा अर्थपूर्ण (Significant) मानते हैं वैसे इसके लिए तीन परीक्षण माप दंड हैं जिनके प्रयोग से इसकी महत्ता (significance) तय कर लेनी चाहिये

(1) यदि गुणक सम्भावित भूल से कम है तो वह महत्वपूर्ण नहीं है।

(2) यदि सह सम्बन्ध गुणक सम्भावित भूल के 6 गुने से भी अधिक है तो यह निश्चित ही महत्वपूर्ण है।

(3) यदि सम्भावित भूल नगण्य है तो ·5 अथवा अधिक को महत्वपूर्ण सह सम्बन्ध मानना चाहिये।

प्रस्तुत उदाहरण में सह-सम्बन्ध गुणक सम्भावित भूल का लगभग 35 गुना है अत यह बहुत महत्वपूर्ण है। इसके अतिरिक्त यह 1 के बिलकुल निकट है। इसका तात्पर्य यह है कि X तथा Y श्रेणियों में बहुत अधिक घनिष्ट सह-सम्बन्ध है। दोनों श्रेणियों में परिवर्तन लगभग समानान्तर होते है। यहां हमें यह भी स्मरण रखना चाहिये कि बहुत थोड़े मद होने पर सम्भावित भूल भ्रामक भी हो सकती है। अतः अधिक मद होने पर ही सम्भावित भूल पर निर्भर रहना चाहिये। दूसरे, सह-सम्बन्ध पूरी श्रेणियों का सामूहिक सम्बन्ध बतलाता है किन्हीं दो इकाइयों का सम्बन्ध नहीं।

क्रमान्तर रीति द्वारा सहसम्बन्ध गुणक की गणना

(Calculation of coefficient of correlation by Rank differences)

इस पद्धति के अन्तर्गत दिए हुए मूल्यों को एक निश्चित क्रम में रख कर उनके क्रम-स्थान निर्धारित कर देते हैं। ऐसा करने के पश्चात् दोनों समूहों के क्रम स्थानों का अन्तर ले लेते हैं और उनके वर्ग निकाल लेते हैं। तत्पश्चात् निम्नलिखित सूत्र का प्रयोग करते हैं।

$$r_r = 1 - \frac{6\Sigma d^2}{N(N^2-1)}$$
$$= 1 - \frac{6\Sigma d^2}{(N^3 - N)}$$

r_r का तात्पर्य सह-सम्बन्ध गुणक

d ,, दोनो समूहो के क्रम स्थानो के अन्तर

N ,, ,, मद संख्या से है।

उदाहरण 11 5

निम्नलिखित श्रेणियो मे क्रमान्तर रीति से सह-सम्बन्ध गुणक ज्ञात कीजिये।

अ	25	32	16	48	38	29	27	45	65	58
ब	108	128	87	95	88	-4	78	116	130	106

क्रमान्तर से सहसम्बन्ध गुणक निकालना

अ	क्रम-स्थान Rank	ब	क्रम-स्थान Rank	क्रमान्तर (d)	d^2
25	9	108	4	5	25
32	6	128	2	4	16
16	10	87	8	2	4
48	3	95	6	−3	9
38	5	88	7	−2	4
29	7	74	10	−3	9
27	8	78	9	−1	1
45	4	116	3	1	1
65	1	130	1	0	0
58	2	106	5	−3	9
स॰=10				Σd=0	78 Σd^2

$$r_r = 1 - \frac{6(78)}{10(10^2-1)} = 1 - \frac{468}{990}$$
$$= 1 - 47$$
$$= \cdot 53$$

प्रस्तुत उदाहरण में सहसम्बन्ध सामान्य है।

उपरोक्त सूत्र मे यह मान्यता है कि श्रेणी मे कोई भी मूल्य दो य अधिक बार न आए लेकिन कभी कभी समूह मे कोई मूल्य दो या इससे अधिक बा आ जाता है तो दोनो या जितनी बार उस मूल्य की पुनरावृत्ति होती है उतनी बार उ एक ही क्रम नही दिया जाता बल्कि उस अक को माध्य क्रम स्थान दिया जाता है। यां किसी समूह में 12 दो बार आ जाय और उसका क्रम स्थान 5 हो तो दोनो बार उस अ॰ को $\frac{5+6}{2}$ अर्थात् 5 5 क्रम दिया जायगा न कि 5 व 6 और अगले मूल्य का स्थान

होगा। परन्तु यदि एक मूल्य तीन बार आ जाय और क्रम स्थान 4,5 व 6 हो तो क्रम $\frac{4+5+6}{3}$ अर्थात् 5 हो तीनो बार मिलेगा न कि 4,5 और 6।

जब इस प्रकार एक क्रम स्थान एक से अधिक बार देना पड़े तो गुणक निकालने के सूत्र में भी कुछ परिवर्तन करना पड़ता है। इसमे इस प्रकार सशोधन किया जायगा कि वर्ग मे जितनी बार समान अक आए उतनी ही बार Σd^2 में $\frac{1}{12}(m^3-m)$ जोड़ना पड़ेगा। m से तात्पर्य मूल्य की आवृत्ति-सख्या से है।

उदाहरण 116

क्रम-स्थान निर्धारण रीति द्वारा निम्नलिखित श्रेणियों में सहसम्बन्ध निकालिए।

अ	35	21	20	25	18	16	25	25	13	15
ब	78	73	70	80	70	65	82	79	64	58

क्रम-स्थान रीति से सह-सम्बन्ध गुणक निकालना

अ	क्रम-स्थान	ब	क्रम-स्थान	क्रमान्तर (d)	d^2
35	10	78	7	3 0	9 00
21	6	73	6	0 0	0 00
20	5	70 ✓	4.5	0.5	0 25
25	8	80	9	−1.0	1 00
18	4	70 ✓	4.5	−0 5	0 25
16	3	65	3	0	0.00
25	8	82	10	−2 0	4 00
25	8	79	8	0 0	0 00
13	1	64	2	−1 0	1 00
15	2	58	1	1 0	1.00
स०=10				Σd=0	16 50 (Σd²

प्रस्तुत प्रश्न मे 25 तीन बार आया है तथा 70 दो बार अत: सूत्र इस प्रकार लागू होगा।

$$r_r = 1 - \frac{6\left[(\Sigma d^2)+\frac{1}{12}(m^3-m)\right]}{N(N^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{6\left[(16.50)+\frac{1}{12}(3^3-3)+\frac{1}{12}(2^3-2)\right]}{10\,(10^2-1)}$$

$$= 1 - \frac{101\ 5}{990} = 1 - .10$$

$$= 0\ 90$$

अत सहसम्बन्ध अत्यधिक घनिष्ट एवं धनात्मक है।

विद्यार्थियों को दोनो प्रश्नों मे एक बात ...

पहले प्रश्न मे तो सबसे बडी सख्या से क्रम आरम्भ किया गया है और दूसरे में सबसे छोटी सख्या को 1, उससे बडी सख्या को 2 आदि क्रम दिये गये हैं । व्यवहार मे इसमे कोई अन्तर नही पडता । क्रम किसी भी ढग से दिये जा सकते हैं परन्तु दोनो समूहो में एक ही सिद्धान्त काम में लाना चाहिए ।

दूसरी महत्वपूर्ण बात यह है कि Σd का योग सदा शून्य आना चाहिए । शून्य न आने की दशा मे अन्तरो अथवा क्रमो को फिर देखना आवश्यक है अन्यथा उत्तर अशुद्ध होगा ।

क्रम स्थान निर्धारण प्रणाली का उपयोग —यह बात तो स्पष्ट है कि क्रम स्थान प्रणाली द्वारा सहस बन्ध गुणक निकालना बहुत सरल है। परन्तु क्रमान्तर रीति का प्रयोग करने का एक महत्वपूर्ण कारण यह भी है कि बहुधा यह निर्धारित करना कठिन हो जाता है कि किसी वस्तु को कितना परिमाण दिया जाय जब कि पारस्परिक तुलना मे क्रम दिया जा सकता है । कौन विद्यार्थी कितना स्वस्थ है यह कहना कठिन है परन्तु स्वास्थ्य की दृष्टि से उन्हें क्रम अवश्य दिये जा सकते हैं । अत जहा किसी वर्ग का निश्चित परिमाण निर्धारित नही किया जा सके वहा क्रम-निर्धारण रीति का प्रयोग आवश्यक है और इसके द्वारा सहसम्बन्ध निर्धारित करने से परिणाम भी साधारणतया शुद्ध ही प्राप्त होते है । गणितीय सूत्र द्वारा (कार्ल पियर्सन आदि द्वारा) लम्बे जोड गुणा करने के पश्चात् भी परिणाम लगभग शुद्ध हैं या नही यह नही कह सकते परन्तु क्रमान्तर रीति द्वारा थोडी ही देर मे गणना कर यह ज्ञात किया जा सकता है । इसके द्वारा प्राप्त परिणामो तथा पियरसन के सूत्र द्वारा ज्ञात परिणामो मे बहुत अन्तर नही हो सकता ।

सगामी विचलन गुणक (Coefficient of concurrent deviations)

अब तक हमने जो सह-सम्बन्ध गुणक निकाले उनमे यथेष्ट परिश्रम तथा गणना आदि करनी पडती है । कभी कभी हमे केवल यह जानना होता है कि दो अक श्रेणियो मे सह सम्बन्ध किस दिशा में है अर्थात् सम्बन्ध धनात्मक है अथवा ऋणात्मक है । इस प्रकार की साधारण सी बात जानने के लिए लम्बे चौडे गणितीय सूत्रो द्वारा गणना करना आवश्यक नही है ।

सह-सम्बन्ध की दिशा हम दो रीतियो से ज्ञात कर सकते है (1) रेखा चित्र पर अकन कित करने से तथा (2) साधारण गणितीय सूत्र से । रेखाचित्र पर सख्याओ को अकित करने से दो वक्र बनेंगे यदि वह समान्तर हैं तो परिवर्तन सर्वथा संगामी हैं और यदि जगह-जगह एक दूसरे को काटते हुए विपरीत दिशाओ में बनते है तो दोनो समूह प्रतिगामी अत विपरीत दिशा मे चलने का सकेत देते है ।

सगामी विचलन गुणक निकालने मे विशेष शुद्धता और सुलभ्यता की आवश्यकता नही है । इसके लिए जिस सूत्र का प्रयोग किया जाता है उसके अनुसार कोई माध्य नही लिया जाता, विचलन भी अको मे नही लिखे जाते बल्कि विचलनो को + अथवा — मे लिखते है । नीचे वाले मूल्य मे से ऊपर वाला मूल्य घटता जाता है । यदि विचलन धनात्मक है तो + और ऋणात्मक है तो — (ऋण) का चिन्ह अकित किया

जाता है। सगामी विचलन गुणक भी भी अधिक से अधिक 1 हो सकता है। इसे निकालने का सूत्र इस प्रकार है।

$$r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

यहां r से तात्पर्य सगामी विचलन गुणक है।

c से तात्पर्य सगामी विचलनों की युग्म संख्या है।

n से तात्पर्य मदों की संख्या है।

उदाहरण न० 11.7

निम्नलिखित तालिका में संयुक्त राज्य अमेरिका की जन्म तथा मृत्यु दरें दी गई है। इनमे सह-सम्बन्ध की दिशा ज्ञात कीजिए।

वर्ष	जन्म दर	मृत्यु दर
1931	18 0	11 1
1932	17 4	10 9
1933	16.6	10.7
1934	17.2	11.1
1935	16 9	10 9
1936	16 7	11.6
1937	17.1	11.3
1938	17.6	10 6
1939	17 3	10 5
1940	17.9	10.7
1941	18 9	10.5
1942	20 9	10.4
1943	21 5	10.9
1944	20 2	10.6
1945	19 6	10 5

संगामी विचलन गुणक ज्ञात करना

वर्ष	जन्म दर	गत वर्ष से विचलन (x)	मृत्यु दर	गत वर्ष से विचलन (y)	विचलनों का गुणनफल xy
1931	18 0		11.1		
1932	17 4	–	10.9	–	+
1933	16.6	–	10 7	–	+
1934	17 2	+	11 1	+	+
1935	16 9	–	10 9	–	+
1936	16.7	–	11 6	+	–
1937	17.1	+	11 3	–	–
1938	17 6	+	10 6	–	–
1939	17.3	–	10 5	–	+
1940	17 9	+	10 7	+	+
1941	18 9	+	10.5	–	–
1942	20 9	+	10.4	–	–
1943	21 5	+	10 9	+	+
1944	20 2	–	10 6	–	+
1945	19 6	–	10 5	–	+
n = 14					

$$r = \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$$

तालिका से प्रकट है कि 6 युग्म तो ऋणात्मक है जो दोनो समूहो में समानान्तर हैं और 3 युग्म धनात्मक है जो दोनों समूहो मे समानान्तर हैं। अर्थात् 9 युग्म (जोडे) ऐसे हैं कि जिनके + या – चिन्ह बिल्कुल एक से हैं। अत $c = 9$

अब $c = 9$

$n = 14$ (क्योकि 14 ही वर्षों की सख्याओ का उपयोग किया जा सकता है)

$$r = \pm\sqrt{\pm\frac{2c-n}{n}}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\left(\frac{2\times 9-14}{14}\right)}$$

$$= \pm\sqrt{\pm\left(\frac{18-14}{14}\right)}$$

$$= +\sqrt{+\frac{4}{14}}$$

$$= \sqrt{.2857}$$

$$= .53$$

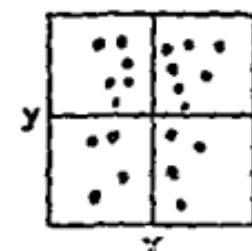
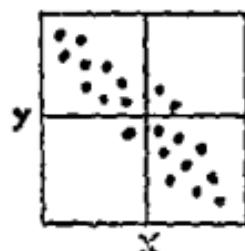
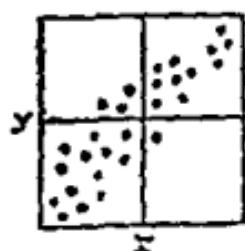
ऊपर के सूत्र में $\pm\sqrt{\pm\left(\frac{2c-n}{n}\right)}$ मे + या – का चिन्ह लगाने में

चित्र से यह प्रकट है कि वर तथा वधु की आयु सामान्यतया समानान्तर चलती है और एक ही दिशा में बढ़ती-घटती हैं परन्तु सह-सम्बन्ध अधिक घनिष्ट नहीं है क्योंकि कुछ युगल ऐसे हैं जिनकी आयु मे कम अन्तर है। अत यह कहा जायगा कि वर-वधु की आयु मे सामान्य धनात्मक सह-सम्बन्ध है। ऐसे चित्र खींचते समय यह ध्यान रखना चाहिए कि दोनो श्रेणियो के माध्य एक ही बिन्दु पर हो।

विलम्बना (Lag) —बहुधा ऐसा होता है कि दो वर्ग-समूह एक दूसरे के समानान्तर अथवा विपरीत दिशा में एक नियमित क्रम मे चलते हुए दिखलाई देते हैं और उनमें उच्चतम सह-सम्बन्ध होता है परन्तु ऐसा होना प्राय कठिन होता है कि ज्योंही एक तत्व के मूल्य मे परिवर्तन हो तत्काल ही दूसरे के मूल्य मे भी परिवर्तन हो जाय। उदाहरण स्वरूप मूल्य वृद्धि लीजिये। प्राय मूल्य वृद्धि होने से वस्तु की माग मे कुछ कमी आती है परन्तु यह सर्वथा सम्भव है कि यह कमी कुछ समय पश्चात् आए। अधिकाश व्यक्तियो को वह वस्तु खरीदने की आदत पड़ी हुई है अत. उन्हे आदत बदलने मे तथा उसके स्थान पर नई समान वस्तु ढूढने मे कुछ समय लग सकता है। परिणाम यह होगा कि मूल्य बढने से माग में कमी तो होगी परन्तु वह एक या दो मास अथवा न्यूनाधिक अवधि के बाद होगी। इसे विलम्बना कहते हैं। एक वस्तु के मूल्य मे परिवर्तन के कारण दूसरी वस्तु के मूल्य मे परिवर्तन कुछ समय पश्चात् अथवा कुछ विलम्ब से होता है। इस प्रकार कारण (cause) और प्रभाव (effect) मे समय का जो अन्तर होता है वह समय विलम्बना (Time-lag) कहलाता है। ग्राफ पर हम कभी-कभी ऐसे दो वक्र खींचते हैं जो सर्वथा समानान्तर हैं परन्तु एक वक्र के एक दिशा में मुड़ने के कुछ दूर जाकर दूसरा वक्र उसी दिशा मे मुड़ता है यही विलम्बना का द्योतक है। व्यापार तथा विशेष कर उत्पादन और बैंकिंग क्षेत्र मे विलम्बना के अध्ययन का बहुत महत्व है।

बिखरा चित्र (Scatter Diagram) · सह-सम्बन्ध की जानकारी बिखरे चित्रों से भी हो सकती है ऐसे चित्रो मे दोनो समूहो में से एक को पटी रेखा पर अ कित कर देते हैं तथा उसे आधार मानकर दूसरे समूह के बिन्दुओ में झुकाव एक ही दिशा मे दिखलाई दे और ऐसा जान पड़े कि वह किसी विशेष ओर सकेत करते हैं तो उनमें सह सम्बन्ध होगा। यदि बिन्दु बाई ओर से दाई ओर ऊपर की तरफ जाते हैं तो धनात्मक सहसम्बन्ध, यदि बाई ओर से दाई ओर नीचे की तरफ आते प्रकट होते हैं तो सहसम्बन्ध ऋणात्मक होता है। यदि बिन्दुओ का कोई दिशा संकेत हो ही नही और वह इधर-उधर असम्बद्ध से बिखरे हुए हो तो सहसम्बन्ध का अभाव रहेगा या सहसम्बन्ध होगा ही नही।

नीचे बिखरे चित्रो का उदाहरण दिया गया है ।

उदाहरण न० 11.9

ऊपर जो चित्र दिये हैं वह बिखरे बिन्दु चित्र हैं तथा इस बात की ओर सकेत करते हैं कि किन परिस्थितियों मे सह-सम्बन्ध उपस्थित रहता है तथा किन परिस्थितियो में उनका अभाव रहता है। इन बिन्दुओ के बीच मे सर्वाधिक उपयुक्त रेखा (Line of best fit) निकाली जा सकती है जिसका वर्णन काल-श्रेणी के अध्याय १६ मे किया गया है ।

गाल्टन का ग्राफ (Galton's Graph)

सह-सम्बन्ध के अध्ययन से हम यह ज्ञात करते हैं कि दो चरो (Variables) में सम्बन्ध कम है या अधिक, नगण्य है या महत्वपूर्ण। लेकिन इस बात का पता नही चल पाता कि दोनो चलो मे औसत रूप से किस अनुपात मे विचरण होता है ।

यह बात सर्व विदित है कि दो परस्पर निर्भर तत्व भी सदा एक ही अनुपात मे परिवर्तित नही होते। भाग के दुगुना होने पर वस्तु का मूल्य बिल्कुल दुगना नही होता, पूर्ति के बढ जाने पर मूल्य में पूर्ति की वृद्धि के अनुपात मे ही कमी होना आवश्यक नही है। अत यह जानना भी आवश्यक हो जाता है कि दोनो चलो मे परिवर्तन या विचरण का अनुपात (Ratio of Variation) क्या है। यह विचरण अनुपात हम गाल्टन के ग्राफ से ज्ञात करते हैं ।

विद्यार्थी, रेखा-चित्रो के अध्याय १४ मे गाल्टन की मध्यका ज्ञात करने की बिन्दु रेखा के बारे मे पढेंगे। यह ग्राफ उस बिन्दु-रेखा से सर्वथा भिन्न है यह स्मरण रखना चाहिये ।

गाल्टन ग्राफ तैयार करने मे दोनो अक समूहो को पहले उनके समान्तर मध्यक को आधार मान कर देशनाको मे परिवर्तित कर लेना पडता है। फिर देशनाको मे से एक को आधार मानकर (जिसमे विचरण कम हो) दूसरे को उस पर अकित कर देते हैं और इस प्रकार जो बिन्दु अकित होते हैं उनके यथा-सम्भव बीच से एक ऐसी रेखा खींचते हैं जो लगभग समान सख्या के बिन्दुओ को दोनो ओर छोड दे। यह रेखा दोनो आधारो से 100,100 देशनाक को काटने वाले बिन्दु मे होकर निकाली

तो Y = 10 4   17 7   25   32 3   39 6

जाती है। यह रेखा प्रतीप गमन रेखा (Regression Line) कहलाती है अब खड़े आधार पर किसी भी जगह से (B से) एक रेखा आधार रेखा के समान्तर खैंचते हैं जो प्रतीप गमन रेखा को O पर काटती है। B से ही खड़ी आधार रेखा पर उस विन्दु (A) तक की दूरी नापी जाती है जहां पर प्रतीप गमन रेखा खड़े आधार को काटती है। यह रेखा BA हुई। BO में BA का भाग देने पर विचरणानुपात ज्ञात होता है। यदि इस विचरणानुपात को 1 में से घटा दिया जाय तो प्राप्त सख्या प्रतीप गमन अनुपात (Ratio of Regression) कहलाता है।

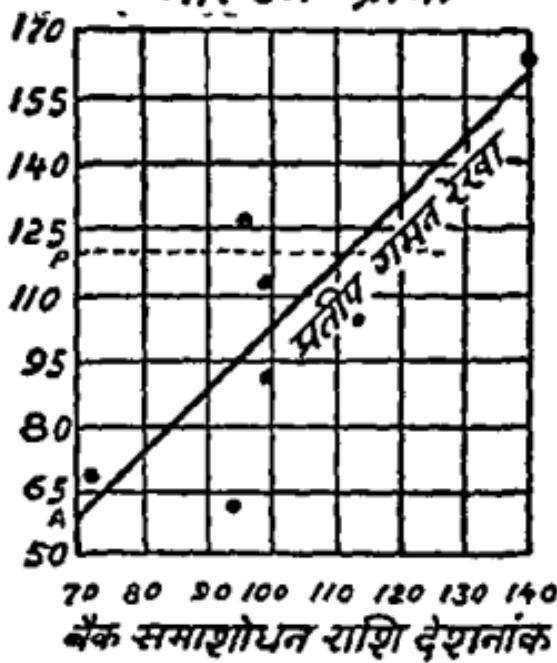
उदाहरण 11.10

निम्नलिखित सारणी से गाल्टन का ग्राफ अंकित कीजिये तथा आठ वर्ष में वैको द्वारा किये गये समाशोधनो और शरणार्थियो की सख्या में विचरण अनुपात निकालिये।

वर्ष	शरणार्थी सख्या (सहस्रो में)	बैंक समाशोधन (दस लाख पौंडों में)
1	79	49
2	52	40
3	33	25
4	55	35
5	46	35
6	62	34
7	31	34
8	34	28
	स. मध्यक = 49	35

अब स० मध्यक को आधार मान कर निम्नलिखित देशनाक उपलब्ध होते हैं।

वर्ष	शरणार्थी देशनाक (49 = 100)	समाशोधन देशनाक (35 = 100)
1	161	140
2	106	114
3	67	71
4	112	100
5	94	100
6	126	97
7	63	97
8	69	80

इन देशनाको को ग्राफ कागज पर अ कित किया गया है।

प्रस्तुत चित्र मे बैंक समाशोघन राशि देशनाको को आधार मान कर उस पर शरणार्थी देशनाक बिन्दु अ कित किये हैं। बिन्दुओ के चिन्ह ग्राफ पर (●) बने हुए है। इन आठो बिन्दुओ के बीच मे से इस प्रकार प्रतीप गमन रेखा खैंची गई है कि यथा सम्भव आधे-आधे बिन्दु रेखा के दोनो ओर रह जाय। अब कोई एक रेखा, आधार के समान्तर खैंची जो खडी रेखा को P तथा प्रतीप गमन रेखा को O पर काटती है। OP तथा PA को नाप लिया। OP = 42 तथा PA = 60

अत विचरण अनुपात $= \frac{42}{60} = \frac{7}{10}$

अर्थात् शरणार्थियो मे एक प्रतिशत परिवर्तन के साथ बैंक समाशोधनो में 0. 7 प्रतिशत परिवर्तन होता है।

इस राशि को 1 0 मे से घटाने से प्रतीपगमन अनुपात (Ratio of Regression) प्राप्त हो जायगा। अत प्रस्तुत उदाहरण मे विचरण अनुपात 1 07 तथा प्रतीप गमन अनुपात 1 · 0 3 का हुआ।

गाल्टन ग्राफ को पढना — गाल्टन ग्राफ से निष्कर्ष निकालने मे निम्नलिखित बातो का ध्यान रखना चाहिये।

(1) यदि सब बिन्दु एक सीधी रेखा मे अ कित हुए हैं तो इसका तात्पर्य यह है कि दोनो समूहो मे पूर्ण धनात्मक अथवा ऋणात्मक सह-सम्बन्ध है। यदि बिन्दु इस प्रकार अकित हुए हो कि उन्हे मिलाने मे एक वक्र स्पष्ट बनता हो तो भी उनमे पूर्ण सह-सम्बन्ध समझना चाहिए। परन्तु कुछ काल विलम्बना (time lag) होगी।

तो Y = 10 4 17 7 25 32 3 39 6

उदाहरण 11.12

निम्न तथ्यों के आधार पर दोनों प्रतीपगमन समीकरण बनाइये —

	औसत	प्रमाप विचलन
कलकत्ता	65	2.5
बम्बई	67	3 5

सह-सम्बन्ध = 0 8

हल —कलकत्ता को X और बम्बई को Y मानने पर—

Regression of X on Y

$$(X-\bar{X}) = r\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y-\bar{Y})$$

$$\text{or } (X-65) = \frac{0.8 \times 2\ 5}{3\ 5}(Y-67)$$

$$\text{or } (X-65) = .57\ (Y-67)$$

$$\text{or } X = 57Y - 38.19 + 65$$

$$\text{or } X = .57Y + 26\ 81$$

Regression of Y on X

$$(Y-\bar{Y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X-\bar{X})$$

$$\text{or } (Y-67) = \frac{0\ 8 \times 3\ 5}{2\ 5}(X-65)$$

$$\text{or } (Y-67) = 1\ 12\ (X-65)$$

$$\text{or } (Y-67) = 1\ 12\ X - 72\ 80$$

$$\text{or } Y = 1\ 12\ X - 72\ 80 + 67$$

$$\text{or } Y = 1\ 12\ X - 5{\cdot}80$$

प्रतीपगमन गुणक (Coefficient of regression) :—

उपरोक्त समीकरणो में दो चल X और Y के दो ही प्रतीपगमन गुणक (Regression Coefficients) भी होते है।

Regression Coefficient of Y on X को b_{yx} और Regression Coefficient of X on b_{xy} कहते हैं।

$$b_{xy} \text{ का मूल्य} = r.\frac{\sigma_x}{\sigma_y} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}*$$

$$b_{yx} \text{ का मूल्य} = r.\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}*$$

* वास्तविक स० म० से विचलन लेने पर

यदि कल्पित समान्तर मध्यक से विचलन लिए गए हों तो—

$$b_{xy} = \frac{\Sigma xy\ N - (\Sigma x\ \Sigma y)}{\Sigma y^2 . N - (\Sigma y)^2} \text{ और}$$

$$b_{yx} = \frac{\Sigma xy\ N - (\Sigma x\ \Sigma y)}{\Sigma x^2 . N - (\Sigma x)^2}$$

यदि दोनो गुणको का गुणोत्तर मध्यक (geometric mean) निकाल लिया जाय या दोनो को गुणा करके, गुणनफल का वर्गमूल निकाल लिया जाय तो प्राप्त सख्या सह-सम्बन्ध होती है।

$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$

उदाहरण 11 11 मे b_{xy} = 88 है और b_{xy} = 73, इसलिए

$r = \sqrt{88 \times 73} = \sqrt{6424} = 80$

उदाहरण 11'12 में b_{xy} = 57 है और b_{yx} = 1 12, इसलिए

$r = \sqrt{57 \times 1\ 12} = \sqrt{6384} = 79$ or 8

उदाहरण 11 13

उदाहरण 11 11 से दिए गए तथ्यों के आधार पर दोनो प्रतीपगमन समीकरण बनाइए, और उन्हे ग्राफ-पत्र पर अ कित करके सह-सम्बन्ध बतलाइए।

Regression of X on Y

$$(X - \overline{X}) \quad r = \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(Y - \overline{Y})$$

$$\text{or } (X - 30) = \frac{0\ 8 \times 4\ 05}{3\ 7}(Y - 25)$$

$$= {}^{\cdot}88\ (Y - 25)$$

$$\text{or} \quad X = 88\ Y - 22 + 30 \qquad (i)$$

$$= {}^{\cdot}88\ Y + 8$$

Regression of Y on X

$$(Y - \overline{Y}) = r\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(X - \overline{X})$$

$$\text{or } (Y - 25) = \frac{0\ 8 \times 3{}^{\cdot}7}{4\ 05}(X - 30)$$

$$= {}^{\cdot}73\ (X - 30)$$

$$\text{or} \quad Y = {}^{\cdot}73\ X - 21\ 90 + 25$$

$$= 73\ X + 3{}^{\cdot}10 \qquad (ii)$$

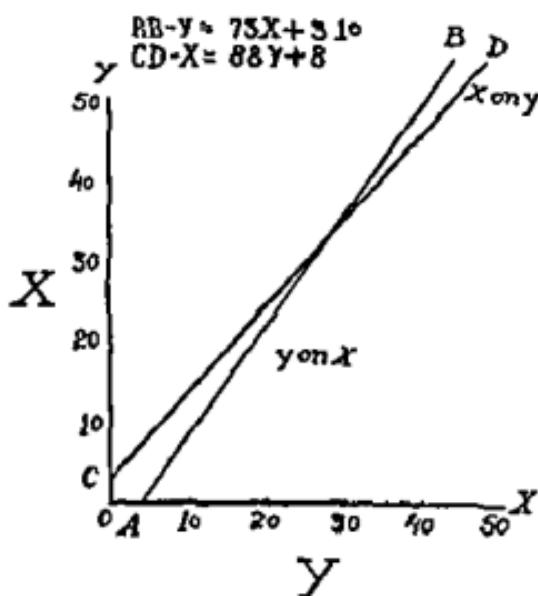
प्रथम समीकरण में Y के विभिन्न मूल्य मानने पर X के निम्न मूल्य प्राप्त होंगे—

X on Y = यदि Y = 10	20	30	40	50
तो X = 16 8	25'6	34'4	43'2	52

इसी प्रकार दूसरी समीकरण में भी X के विभिन्न मूल्य मानने पर Y के निम्न मूल्य प्राप्त होंगे —

Y on X = यदि X = 10	20	30	40	50
तो Y = 10 4	17 7	25	32 3	39 6

अब उपरोक्त मूल्यों को ग्राफ-पत्र पर अंकित कर दीजिये। स्वतन्त्र चल को (X) खड़ी आधार रेखा (OY) पर और निर्भर चल (Y) को पड़ी आधार रेखा (OX) पर खींचना चाहिए। ग्राफ पत्र पर दो रेखाए खिच गई है एक तो X पर Y है और दूसरी Y पर X है। इन रेखाओ के द्वारा भी X का मूल्य, यदि Y का मूल्य दिया हो तो (X पर Y की रेखा से) और Y का मूल्य यदि X का मूल्य दिया हो तो (Y पर X की रेखा से) लम्ब डाल कर ज्ञात किया जा सकता है।

यदि दोनो समीकरण रेखाएं एक दूसरे के ऊपर आजाए तो सह सम्बन्ध सम्पूर्ण 1 होता है। यदि ये रेखाए एक-दूसरी को काट कर कोई कोण बनाती हो तो सह-सम्बन्ध थोडा ही है, और यदि ये रेखाए एक दूसरे को 90 डिग्री के कोण से काटें तो इनमे सह-सम्बन्ध बिल्कुल भी नहीं होगा। प्रस्तुत रेखाचित्र में दोनो रेखाएं एक दूसरे को काटते हुए बहुत छोटा सा कोण बनाती हैं अत सह-सम्बन्ध महत्वपूर्ण है। ये रेखाएं नीचे से ऊपर बाए से दाए ओर बढती हैं अत सम्बन्ध धनात्मक है। यदि ये रेखाएं दाए से बाए ओर बढती तो सम्बन्ध ऋणात्मक होता।

उदाहरण 11·14

निम्न दो चलो के मूल्यो से दोनो प्रतीपगमन समीकरण बनाइए, दोनों प्रतीपगमन-गुणक निकालिए और उनमें सह-सम्बन्ध भी ज्ञात कीजिए।

X—23, 27, 28, 28, 29, 30, 31, 33, 35, 36.

Y—18, 20, 22, 27, 21, 29, 27, 29, 28, 29.

हल—

1 X	2 कल्पित स म =30 से विचलन x (X−A)	3 x^2	4 Y	5 क स म (A)=25 से विचलन y	6 y^2	7 xy
23	−7	49	18	−7	49	49
27	−3	9	20	−5	25	15
28	−2	4	22	−3	9	6
28	−2	4	27	2	4	−4
29	−1	1	21	−4	16	4
30	0	0	29	4	16	0
31	1	1	27	2	4	2
33	3	9	29	4	16	12
35	5	25	28	3	9	15
36	6	36	29	4	16	24
10 N	0 Σx	138 Σx^2		0 Σy	164 Σy^2	123 Σxy

$$\overline{X} = A + \frac{\Sigma x}{N} = 30 + \frac{0}{10} = 30$$

$$\overline{Y} = A + \frac{\Sigma y}{N} = 25 + \frac{0}{10} = 25$$

Regression coefficient of X on Y—

$$= \frac{\Sigma xy\ N - \Sigma x\ \Sigma y}{\Sigma y^2 . N - (\Sigma y)^2}$$

$$= \frac{123 \times 10 - (0 \times 0)}{164 \times 10 - (0)^2}$$

$$= \frac{1230}{1640} = 75$$

$$= \frac{\Sigma xy\ N - \Sigma x\ \Sigma y}{\Sigma x^2 . N - (\Sigma x)^2}$$

$$= \frac{123 \times 10 - (0 \times 0)}{138 \times 10 - (0)^2}$$

$$= \frac{1230}{1380} = 89$$

$$r = \sqrt{b_{xy} \times b_{yx}}$$

$$\sqrt{\cdot 75 \times \cdot 89}$$

$$= \cdot 817$$

Regression equation of X on Y

$(X - \bar{X}) = b_{xy} (Y - \bar{Y})$

$(X - 30) = 75 (Y - 25)$

$= 75Y - 18.75$

or $X = 75Y - 18.75 + 30$

$= 75Y + 11.25$

Regression equation of Y on x

$(Y - \bar{Y}) = b_{yx} (X - \bar{X})$

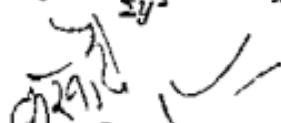
or $(Y - 25) = 89 (X - 30)$

$= 89X - 26.7$

or $Y = 89X - 26.7 + 25$

$= 89X - 1.70$

उपरोक्त प्रश्न में कल्पित समान्तर मध्यक ही वास्तविक समान्तर मध्यक है अत

$b_{xy} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma y^2}$ और $b_{xy} = \frac{\Sigma xy}{\Sigma x^2}$ से भी निकाल सकते हैं।

कुछ अभ्यास प्रश्न

उदाहरण 11.16

निम्न सारणी मे सम्पूर्ण जनसख्या तथा उसमें अन्धो की सख्या दी गई है। बतलाइए, क्या आयु और अन्धेपन में कोई सह-सम्बन्ध है ?

आयु	व्यक्तियो की सख्या (सहस्रों मे)	अन्धे
0-10	100	55
10-20	60	40
20-30	40	40
30-40	36	40
40-50	24	36
50-60	11	22
60-70	6	18
70-80	3	15

प्रस्तुत प्रश्न मे व्यक्तियों की संख्या तथा अन्धों की सख्या दी गई है परन्तु सख्याए तुलना योग्य नही है। अत. एक निश्चित सख्या मानकर उसके अनुपात में अन्धो की सख्या लेने से तुलना ठीक हो सकेगी। सुविधा के लिए यह सख्या एक एक लाख मान ली गई है और इसी हिसाब से नीचे जो तालिका दी गई है उसमे अन्धों की सख्या को प्रति लाख के हिसाब से ही लिखा गया है ताकि उनमें तुलना हो सके।

हल —

आयु एवं अन्धेपन में सह-सम्बन्ध आकलन

आयु X	मध्य बिन्दु	45 से विचलन (x) (दस में)	x^2	अंधों की संख्या (प्रतिलाख) Y	150 से विचलन (y)	y^2	xy
0–10	5	−4	16	55	−95	9,025	380
10–20	15	−3	9	67	−83	6,889	249
20–30	25	−2	4	100	−50	2,500	100
30–40	35	−1	1	111	−39	1,521	39
40–50	45	0	0	150	0	0	0
50–60	55	1	1	200	50	2,500	50
60–70	65	2	4	300	150	22,500	300
70–80	75	3	9	500	350	1,22,500	1050
	N=8	−4 Σx	44 Σx^2		283 Σy	1,67,435 Σy^2	2168 Σxy

$$r = \frac{\Sigma xy \cdot N - (\Sigma x \cdot \Sigma y)}{\sqrt{\Sigma x^2 . N - (\Sigma x)^2}\sqrt{\Sigma y^2 \cdot N - (\Sigma y)^2}}$$

$$= \frac{2168 \times 8 - (-4 \times 283)}{\sqrt{44 \times 8 - (-4)^2}\sqrt{1,67,435 \times 8 - (283)^2}}$$

$$= \frac{17344 + 1132}{\sqrt{(352 - 16)}\sqrt{(1339480 - 80089)}}$$

$$= \frac{18476}{\sqrt{336 \times 1259391}}$$

$$= \text{A L} \left[\log 18476 - \tfrac{1}{2}(\log 336 + \log 1259391)\right]$$

$$= \text{A. L.} \left[4.2664 - \tfrac{1}{2}(2.5263 + 6.1000)\right]$$

$$= \text{A L} \left[4.2664 - \tfrac{1}{2}(8.6263)\right]$$

$$= \text{A L} (4.2664 - 4.3131)$$

$$= \text{A. L. } \bar{1}.9533$$

$$= .8980$$

अर्थात् आयु तथा अन्धेपन में बहुत उच्च धनात्मक सहसम्बन्ध है।

इस प्रश्न में सम्पूर्ण जन संख्या का केवल इतना उपयोग है कि उनमें अंधों का अनुपात निकाल सकें। अतः अनुपात निकालने के पश्चात् सम्पूर्ण जनसंख्या का कोई महत्व नहीं रह जाता क्योंकि सहसम्बन्ध आयु तथा अन्धेपन में ज्ञात करना है। दूसरी महत्वपूर्ण बात यह है कि इसमें आयु के वर्ग विस्तार के मध्य बिन्दु लेकर उसे इस प्रकार समझा जायगा जैसे कि यह व्यक्तिगत माला का प्रश्न हो, इसीलिये पद संख्या 8 ली गई है।

उदाहरण 11·16

निम्नलिखित तालिका में 67 विद्यार्थियो द्वारा एक बौद्धिक परीक्षण में प्राप्त अंक आयु वर्गान्तर दिये गये हैं।

	आयु वर्षों मे				
प्राप्तांक	18	19	20	21	योग
200–250	4	4	2	1	11
250–300	3	5	4	2	14
300–350	2	6	8	5	21
350–400	1	4	6	10	21
योग	10	19	20	18	67

क्या आयु तथा बुद्धि मे कोई सम्बन्ध है ?

आयु एवं प्राप्तांको मे सह-सम्बन्ध

प्राप्तांक (आयु →)	y \ x	18 (-2)	19 (-1)	20 (0)	21 (1)	f	fy	fy^2	fxy
200–250	-2	**16** / 4	**8** / 4	**0** / 2	**−2** / 1	11	−22	44	22
250–300	-1	**6** / 3	**5** / 5	**0** / 4	**−2** / 2	14	−14	14	9
300–350	0	**0** / 2	**0** / 6	**0** / 8	**0** / 2	21	0	0	0
350–400	1	**−2** / 1	**−4** / 4	**0** / 6	**10** / 10	21	21	21	4
	f	10	19	20	18	67 N	−15 Σfy	79 Σfy^2	35 Σfxy
	fx	−20	−19	0	18	−21 Σfx			
	fx^2	40	19	0	17	77 Σfx^2			

$$r = \frac{\Sigma fxy \; N - (\Sigma fx \; \Sigma fy)}{\sqrt{\Sigma fx^2 \; N - (\Sigma fx)^2} \; \sqrt{\Sigma fy^2 \; N - (\Sigma fy)^2}}$$

$$= \frac{35 \times 67 - (-21 \times -15)}{\sqrt{77 \times 67 - (-21)^2} \sqrt{79 \times 67 - (-15)^2}}$$

$$= \frac{2345 - 315}{\sqrt{5159 - 441} \; \sqrt{5293 - 225}}$$

$$= \frac{2030}{\sqrt{4718 \times 5068}}$$

$= \text{A L} \; [\log 2030 - \frac{1}{2} (\log. 4718 + \log 5068)]$

$= \text{A L} \; [3\,3075 - \frac{1}{2} (3\,6737 + 3\,7049)]$

$= \text{A L} \; [3\,3075 - \frac{1}{2} (7\,3786)]$

$= \text{A L} \; (3.3075 - 3\,6893)$

$= \text{A L} \; \bar{1}\,6182$

$= \cdot 4152$

आयु वृद्धि मे बहुत साधारण सह-सम्बन्ध है।

Exercise IX

1 Explain the meaning and significance of Correlation What are the different methods of establishing a correlation between two series of data ?

2 What is meant by Correlation ? Does it signify the existence of cause and effect relationship between two variables ?

(M Com Raj 1952)

3 What is Correlation ? Explain how will you use the following methods in determining correlation

(i) Graph, (ii) Correlation Table, (iii) Karl Pearson's coefficient of correlation.

(B Com Agra 1940)

4 Explain the meaning and significance of the concept of correlation ? How will you calculate it from a statistical point of view ?

(M Com Agra 1945, 50)

5. Show the importance of short time correlation. How will you calculate it by statistical methods

6. When two series are given, explain the whole process of finding out the degree of correlation between them

7 What are the different methods of finding out correlation ? Discuss briefly their merits and demerits (B Com, Agra, 1962)

12 *The following table gives the number of students having the different heights and weights ,*

Height in inches	Weights in pounds					
	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130	Total
50 to 55	2	6	12	10	5	35
55 to 60	4	7	20	13	8	52
60 to 65	2	11	25	20	13	71
65 to 70	0	6	17	14	5	42
Total	8	30	74	57	31	200

Do you find any relation between height and weight ?

(B Com Allahabad, 1952)

(Ans 06314)

13 Calculate the coefficient of correlation between the size of holding and the number of fragments from the following data

Size of holding	Number of fragments						Total
	1	2	3	4	5	6	
0- 1	3	1	.	...	.	...	4
1- 2	5	5	...	...	...		10
2- 3	6	4	.	..	.	...	10
3- 4	6	3	2	2	...		13
4- 5	7	5	1	.		...	13
5- 6	10	5	6	1	...		22
6- 7	8	6	1		..	1	16
7- 8	2	6	2	3	...	.	13
8- 9	1	2	.	1	1	...	5
9-10	2	4	.	.	..	.	6
Total	49	41	12	8	1	1	112

(B Com Agra 1953)

(Ans $r =$ 2995)

14 The following table gives class frequency distribution of 45 clerks in a business office according to age and pay Find the correlation, if any, between age and pay

Age	Pay				
	60-	70-	80-	90-	100-
20 - 30	4	3	1	.	.
30 40	2	5	2	1	.
40 - 50	1	2	3	2	1
50 - 60	.	1	3	5	2
60 - 70	.	..	1	1	5

(M Com Agra 1954)

(Ans. ·7456)

15 The following table gives the value of export of raw cotton from India and the value of the imports of manufactured cotton-goods into India during the years 1913-14 to 1931-32

In Crores of Rupees

Year	Exports of raw cotton	Imports of manufactured goods
1913-14	42	56
1917-18	44	49
1919-20	58	53
1921-22	55	58
1923-24	[illegible]	65
1929-30	98	76
1931-32	66	58

Calculate the coefficient of correlation between the value of the exports of raw cotton and the value of the imports of cotton manufactured goods

(B. Com Nagpur 1944)

(Ans $r = 91$)

16 Calculate the coefficient of correlation between cotton cloth manufactures and *woollen manufactures from the following data for* July 1951 to June 1952

Index of Industrial Production (Base = 100)

Months	cotton manufactures	woollen manufactures
1951-22		
July	105	64
August	108	63
September	106	66
October	100	62
November	104	69
December	105	61
January	104	57
February	111	55
March	104	47
April	114	45
May	118	45
June	117	50

(B. Com All 1953)

(Ans -6742)

17 The following table gives the birth rates and death rates of a few countries of the world during the year 1931

Country	Birth Rate	Death Rate
Egypt	44	27
Canada	24	11
U S A	19	12
India	33	24
Japan	32	19
Germany	16	11
France	18	16
Irish Free state	20	14
U K	16	12
Soviet Russia	40	18
Australia	20	9
Newzealand	18	8
Palestine	53	23
Sweden	15	12
Norway	17	11

Find r between the birth rate and the death rate figures

(B Com. Luck. 1938)

(Ans. 84)

18 The following table gives the Index numbers of wholesale prices in India and the Bombay Cost of living Index Numbers

	Index Number of wholesale prices	Bombay cost of living index number
April 1953	385	342
May	398	346
June	406	353
July	408	355
August	410	358
September	404	353
October	394	350
November	391	344
December	390	342
Jan. 1954	399	346
February	395	331
March	394	332

Calculate the coefficient of correlation between the changes in wholesale prices and cost of living in Bombay

(M A , Agra 1955)

(Ans 7065)

19. What is meant by Correlation ? Give the general rules for interpreting its coefficient.

Calculate the coefficient of correlation between the ages of 100 husbands and wives from the following data

Ages of Husband in years	Ages of wives in years					
	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	Total
15-25	6	3	.			9
25-35	3	16	10			29
35-45	..	10	15	7		32
45-55			7	10	4	21
55-65				4	5	9
Total	9	29	32	21	9	100

(M Com Alld 1944
(„ „ Agra 1952)

(Ans 0 8021)

20 Calculate the coefficient of correlation from the following table and interpret it

Year 1925 1926 1927 1928 1929 1930 1931
1932 1933 1934

Average daily No
of labourers 368 384 385 391 347 384 395 403 400 385

Lakhs of bales
consumed by Mills 22 22 24 20 22 26 26 29 28 27

(B. Com , Agra, 1945)

(Ans. 0 5848)

21 The following table gives the marks obtained in an examination in English and French by 20 pupils Find out if there is any correlation between the knowledge of English and French.

Percentage Marks obtained by 20 pupils

English 87 77 70 68 63 58 55 54 53 52 51 50 48
48 47 46 46 43 40 24

French 68 55 58 62 50 48 53 50 38 43 53 45 43
45 40 35 33 38 32 31

(Ans 0 8837)

22 The number and value of castings produced during 10 years is given below Find out if there is any correlation between both the series

Number and value of castings produced

Year	Number (000's)	value (£000's)
1	11	21
2	9	17
3	11	20
4	17	38
5	18	38
6	19	40
7	19	42
8	18	46
9	16	40
10	12	38
Total	150	340

Ans r = 0 878

23 The index number of prices of all commodities in Bombay and in Calcutta were as under.

Month	Index number of commodity prices in Calcutta	Index number of commodity prices at Bombay
May 1942	163	204
June	182	222
July	182	225
August	192	228
September	198	229
October	209	233
November	227	249
December	237	266
January 1943	250	255
February	253	255

Do you think prices in Bombay and in Calcutta are correlated ?

(B Com, Agra, 1944)

(Ans 0 95)

24 Calculate the coefficient of correlation between the monthly index number of prices of raw materials and manufactured articles in 1914 :

Months	Index No of raw materials	Index Number of manufactured articles
January	193	251
February	195	251
March	197	252
April	199	261
May	204	208
June	204	259
July	204	261
August	202	262
September	203	259
October	206	256
November	210	256
December	200	257

(M A, Agra, 1946)
(Ans r is - 02157)

25 The expansion of currency and the increase of prices of industrial shares in certain countries were as follows

Country	Expansion of currency (%) since July 1939	Increase in prices of industrial shares (%)
France	360	423
Mexico	225	350
Hungary	1034	293
Belgium	339	255
India	498	143
Netherlands	390	110
Portugal	261	102
U K	160	42
Denmark	290	41
Venezuela	79	41
Peru	253	40
Paraguay	34	38
Newzealand	164	30
Sweden	143	26
Ireland	136	23
Australia	322	15
U S A	259	15

Is there significant correlation between currency expansion and increase in prices of industrial shares ? (M. A Agra 1947)
(Ans r is 5024)

26 Calculate the coefficient of correlation between the population of Agra and Kanpur from the following data

(The figures are in thousands)

Year	Agra	Kanpur
1881	160	185
1891	169	194
1901	188	203
1911	154	179
1921	164	216
1931	205	243
1941	284	487

(M A Agra 1948)

(Ans r is 0.966)

27 Calculate the coefficient of correlation between the income and the general level of prices from the following data

Year	income (Rs)	General index No of prices
1939	360	100
1940	420	104
1941	500	115
1942	550	160
1943	600	280
1944	640	290
1945	680	300
1946	720	320
1947	750	330

(M A Agra 1949)

(Ans. r is 0 9471)

28 Calculate the coefficient of correlation for the following ages of husband and wife :

Age of Husband	Age of wife
23	18
27	20
28	22
28	27
29	21
30	29
31	27
33	29
35	28
36	29

(M. A Agra 1962 , M Com Nagpur 1962)

(Ans r is ·8175)

29. Ten students got the following percentage of marks in Principles of Economics and Statistics

Student	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Marks in Economics	78	36	98	25	75	82	90	62	65	39
Marks in Statistics	84	51	91	60	68	62	86	58	53	47

Find the Coefficient of correlation and ranking correlation of the above

(M. A. Agra 1951)

(Ans r is 0.78, Rank Correlation is 0.818)

30. Calculate the coefficient of correlation for the following ages of husband and wife

Husband's age	23	27	28	28	29	30	31	33	35	36
Wife's age	18	20	22	27	21	29	27	29	28	29

(M. A. Agra, 1962, M. Com. Nagpur 1962)

(Ans r = + .85)

31. From the ages given below of husband and wife at the time of marriage find if there is any correlation between them. Whose age is more variable?

Age of husband	25	22	28	36	35	20	22	40	20	18	19	25
Age of wife	18	15	20	17	22	14	16	21	15	14	15	17

(B. Com. Raj. 1948)

(Ans r is 0.8387, Husband's age is more variable)

32. The following table gives sales and expenses of the Belapur Co. Ltd. for six consecutive years. Find out if there is Correlation between sales and expenses and also show if it it is significant.

Years	Sales	Expenses
1940	3,806	594
1941	2,967	700
1942	3,067	571
1943	4,153	666
1944	4,453	675
19[illegible]5	5,[illegible]21	712

(B. Com. Raj. 1949)

(Ans r is 0.5, r is not significant)

33. The following table gives the number of students having different heights and weights,

Height in inches	weights in pounds			
	90–100	100–110	110–120	120–130
50–55	4	7	5	2
55–60	6	10	7	4
60–65	6	12	10	7
65–70	3	8	6	3

Do you find any relation between height and weight? How do you consider the conclusion to be significant?

(B Com. Raj 1950)

(Ans r is 0 078, r is insignificant)

34. Calculate the coefficient of correlation from the following data, and also find out the most probable age of wife if the husband's age is 32 years

Age of Husband ·	50	48	40	35	33	28	25	24	23	22
Age of wife	45	44	37	32	30	26	23	20	19	18

(B Com Raj 1951)

(Ans r is 0 99, wife's age is 29 6 years)

35 Calculate the coefficient of correlation between the ages of husbands and wives from the following table ·

Ages of wive	Ages of Husbands 20–30	30–40	40–50	50–60	60–70	Total
15-25	5	9	3		...	17
25-35	...	10	25	2	..	37
35-45		1	12	2	...	15
45-55	.	.	4	16	5	25
55-65		...	.	4	2	6
Total	5	20	44	24	7	100

(B Com, Raj 1952)

(Ans r is 0 795)

36 What is meant by correlation coefficient? From the following table calculate the correlation coefficient between income and expenditure on food ·

Income of family (in Rupees)	Expenditure on food (In rupees)
20	10 2
25	12 3
35	15 9
45	19 6
55	22 6
65	26 8
75	29 4
85	32 0
100	42 5
105	43 0

(B Com Raj 1953)

Ans r=0 993

37. What is meant by correlation ? Calculate the coefficient of correlation between the following series

X	17	18	19	19	20	20	21	21	22	23
Y	12	16	14	11	15	19	22	16	15	20

(B Com. Raj 1954)

(Ans r is 0 62)

38 Ten students got the following percentage of marks in Statistics and Law,

Serial No.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Statistics	80	60	51	69	58	62	64	72	56	58
Law ...	45	71	60	57	62	68	48	50	62	60

Find the coefficient correlation between the marks in the two subjects.

(B Com Raj 1955)

(Ans r is − 0 67)

39 The following data represent the ages of husband (X) and wives (Y). Find Karl Pearson's coefficient of correlation between X and Y

Ages in years

X	22	24	26	26	27	27	28	28	29	30	30	30	31	32	33	34	35	35	36	37
Y	18	20	20	24	22	24	27	24	21	25	29	32	27	27	30	27	30	31	30	32

(B Com Raj 1956)

(Ans r is 0 85)

40 Find out Rank Correlation between the following two series

X · 28 25 47 38 49 23 37 54 63 43

Y : 72 84 93 82 39 76 56 46 46 87

Ans.— $r = 0{\cdot}42$

41. Calculate the coefficient of correlation for the following data, giving prices of two commodities A and B in the different markets —

A. 35 36 40 38 37 39 41 40 36 38

B 65 72 78 77 76 77 80 79 76 75

Test the significance of the coefficient

(M Com , Agra 1958)

Ans r = 8266

42. The correlation table given below shows the ages of husband band wife for 53 married couples living together on the census night of 1 951 Calculate the coefficient of correlation between the ages of hus-J and that of his wife.

Age of husband (in years)	Age of wife (in years) 15-25	25-35	35-45	45-55	55-65	65-75	Total
15—25	1	1					2
25—35	2	12	1				15
35—45		4	10	1			15
45—55			3	6	1		10
55—65				2	4	2	8
65—75					1	2	3
	3	17	14	9	6	4	53

(M. A Agra, 1958)

(Ans + 907)

43 Calculate the coefficient of correlation between X and Y in the following table —

Y \ X	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37
13	1	—	—	—	1	—	—	—	—	—
12	—	—	1	1	2	2	—	—	—	—
11	—	—	1	2	3	3	2	—	—	—
10	—	1	3	4	5	6	3	2	1	—
9	—	—	1	3	3	4	2	1	—	1
8	—	—	—	2	2	3	4	—	1	—
7	—	—	—	—	1	1	3	2	1	—

(R A S 1961)

Ans $r = -\cdot3968$

44 The following table shows the total number of marks obtained out of 300 by 81 students of a certain class in First Terminal and Second Terminal Examinations Find out whether there is any relationship between the marks obtained in these two examinations

Second Terminal Marks / First Terminal Marks	120 – 160	160 – 200	200 240	240 – 280	Total
80 – 120	3	5	2	2	12
120 – 160	5	6	3	—	14
160 – 200	—	15	3	14	32
200 – 240	8	12	—	—	20
240 – 280	—	—	2	1	3
Total	16	38	10	17	81

Ans $r =$ 0017

(B Com Raj 1962)

44 A Find correlation-Coefficient between age and playing habit f the following students

Age	15	16	17	18	19	20
No of students	250	200	150	120	100	80
Regular players	200	150	90	48	30	12

Hint —Find the percentage of the regular player

Ans r = -9913

45 The following table gives, according to age groups, the frequency of marks obtained by 72 students in a test —

Marks	Age (Years)				Total
	15 - 17	17 - 19	19 - 21	21 - 23	
20 - 30	1	1	—	—	2
30 - 40	2	4	6	—	12
40 - 50	—	12	15	4	31
50 - 60	—	8	12	3	23
60 - 70	1	—	2	1	4
Total	4	25	35	8	72

Calculate the coefficient of correlation between age and marks obtained

(B Com, Raj, 1963)

Ans + 2385

46. The competitors in a beauty contest are ranked by two judges in the following order ,—

First Judge 1 6 5 10 3 2 4 9 7 8

Second Judge 2 8 4 1 6 9 5 3 7 10

Calculate the coefficient of rank correlation

(M Com, Raj, 1963)

Ans -0 13

47. Given -

No of pairs of observations of X and Y series = 15

X Series Arithmetic Average = 25 0

" Standard Deviation = 3 0

Y " Arithmetic Average = 18 0

Y " Standard Deviation = 3 03

Summation of products of corresponding deviations of X and Y series (Σxy) = + 122 0

Calculate the coefficient of correlation between X and Y series

(M A, Raj, 1963)

Ans + 89 (Approx)

48 Calculate Karl Pearson's coefficient of correlation between cost of living and wages from the following data —

Years	Index of cost of living	Index of wages	Years	Index of cost of living	Index of wages
1951 - 52	100	100	1956-57	96	121
1952 - 53	105	107	1957-58	107	125
1953 - 54	104	115	1958-59	112	128
1954 - 55	106	115	1959-60	118	133
1955 - 56	99	115	1960-61	123	135

(B Com., Lucknow, 1962)

Ans - r = + 75

49 Find Karl Pearson's coefficient of correlation between capital employed and profit obtained from the following data -

Capital Employed (Rs Thousands)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
Profit obtained	2	4	8	5	10	15	14	20	22	30

(B Com., Banaras, 1962)

Ans - r = + 96

50 Find out the coefficient of correlation between the following figures of a family's income and expenditure on travel during 1951-60

Year	Income Rs.	Expenditure Rs.
1951	12,000	500
1952	13,500	600
1953	18,000	800
1954	10,000	550
1955	12,000	650
1956	11,000	550
1957	15,000	700
1958	20,000	900
1959	14,000	800
1960	15,000	800

(M Com, Vikram, 1962)

51 The following data, based on 450 students, are given for marks in statistics and Economics at a certain examination —

Mean marks in Statistics	40
Mean marks in Economics	48
S D of marks in statistics	12
S D of marks in Economics	16
Sum of the products of deviations of marks from their respective means	42075

Give the equations to the two lines of regression, and explain why there are two regression lines.

Estimate the average marks in Economics of candidates who obtained 50 marks in statistics

(M Com Raj 1962)

Ans. X = 3675 Y + 22 36

Y = 653 X + 21 88

Average marks in Economics = 54 53

Hint-F nd $r = \frac{\Sigma xy}{n\sigma_x \sigma_y} = 49$

52 Find the most likely production corresponding to the rainfall 35" when the following data are given

	Rainfall	Production
Average	30"	45 mds.
S D.	4	10

Coefficient of Correlation = 8

(M Com. Raj 1959)

Ans. 57 mds

53. A study of wheat prices at Hapur and Amritsar Yields the following data

	Hapur Rs.	Amritsar Rs
Average Price	2.463	2.797
S D	325	·207
r between the two prices		·774

Estimate from the above data the most likely prices of wheat (a) at Hapur corresponding to the price of Rs. 2.344 at Amritsar, and (b) at Amritsar corresponding to price of Rs. 3·052 at Hapur.

(T. D C. II yr. Raj. 1961)

Ans -(a) Rs 1,899 (b) Rs. 3 086

48 (a) given-

	X series	Y series
mean	24	140
S D	16	48

r = 0·6

Find out the most probable value of Y if X is 50 and the most probable value of X if Y is 80

(b) What would be coefficient of Correlation if two regression Coefficients are 0 6 and 0 4 ?

(T. D C II yr. Raj 1960)

Ans.-(a) Y = 186·8 and X = 36

(b) r = ·49

54. Explain the concepts of regression and the ratios of variation and point out their utility in statistical analysis

(R Com Raj 1958)

55. Given $-X+2Y-5=0$

$2X+3Y-8=0$

$\sigma x^2=12$

Find (i) $\overline{X}$ and $\overline{Y}$

(ii) σy^2

(iii) r

(M. A Alld 1962)

Ans $-\overline{X} = 1$ and $\overline{Y} = 2$

(ii) $\sigma y^2 = 4\,04$

(iii) $r = \cdot 86$

56 Obtain the two regression equations from the following data.

Height (in inches) 27 27 27 28 28 29 29 29 30 31

Weight (in lbs) 18 18 19 20 21 21 22 23 24 25

Ans.—$X = 54Y - 17\,106$ and $Y = 1\,63X - 28{\cdot}205$

57 Obtain the regression equation of Y on X and X on Y from the following

X—65 66 67 67 68 69 71 73

Y—67 68 64 68 72 70 69 70

Ans —$X = 525Y + 32\,29$ and $Y = 424X + 39\,57$

58. Given—

	X	Y
Mean	20	25
S D	4	5

$r = 0\,8$

Calculate the regression of X and Y on X Also find the expected value of X if $Y = 10$ and of Y if $X = 15$

Ans :—$X = 64Y + 4$ and $Y = X + 5$

$X = 10\,4$ and $Y = 20$

59 In a partially destroyed laboratory having record of an analysis of correlation data the following results only are legible

Variance of $X = 9$

Regression equations

$8X - 10Y + 66 = 0$

$40X - 18Y = 214$

Find—(a) the mean values of X and Y

(b) the r between X and Y

(c) the S D of Y

(I A. S 1947)

Ans—(a) $\overline{X} = 13$ and $\overline{X} = 17$

(b) $r = \cdot 6$

(c) $\sigma y = 4$

60 Find graphically (with the help of Galton's graph) the ratios of variation between the following statistics of bank clearings and immigration.

Period	Subject Immigrants in Lakhs	Relative Bank Clearing in Crores of Rs
1	79	49
2	52	40
3	33	25
4	55	35
5	46	35
6	62	34
7	31	34
8	34	28

Ans - 74 app

61 Explain the meaning of—

Ratio of Regression, Line of Equal Proportional variation, Regression coefficients, Galton graph

62. For 50 students of a class the regression equation of marks in statistics (X) on marks in Accountancy (Y) is $3Y-5X+180=0$ The mean marks in Accountancy is 44 and the variance of marks in Statistics is 9/16 of the variance of marks in Accountancy Find the mean marks in Statistics and the coefficient of correlation between marks in the two subjects

Ans —$\overline{X} = 62{\cdot}4$ and $r = {\cdot}8$

63 Find the S. D of Y series if coefficient of correlation between two variables X and Y is 0 28 and their co-variance is 7.6 and the variance of $X=9$.

Ans 9 05

Hint-co-variance$=\frac{\Sigma xy}{N}$

64 Given- $r=0.56$

$\Sigma xy=60$

$\sigma y=4$

$\Sigma x^2=90$

Find the number of items.

Ans $N=8$ app

65 From the two series given below calculate two equations of regression, viz x on y and y on x ·

x	78	89	97	69	59	79	68	57
y	125	137	156	112	107	136	123	108

(II year T D C Raj, 1963)

Ans — $x = 7{\cdot}53y - 870.515$

$y = 1{\cdot}16x + 39{\cdot}03$

66. You are given the following data —

Mean value of X	= 50	Mean value of Y	= 100
S. D. of X	= 5	S D of Y	= 10

Coefficient of correlation between x and y = 0.5

Form two equations of regression and explain why there are two lines of regression.

Find from the appropriate line of regression the value of X when Y = 120

(M. Com., Raj., 1963)

Ans. $X = 25Y + 25$
$Y = X + 50$
when Y is 120 X = 55

अध्याय १२

देशनांक

(Index Number)

आधुनिक समय में वस्तुओं की कीमतों, मजदूरियों या अन्य मानदिनों के परिवर्तन को नापने या जानने के लिए अंक बनाए जाते हैं। साधारणतः यह तुलना सामान्य वस्तुओं की आसानी से की जा सकती है क्योंकि उनकी तुलना वास्तविक अंकों से हो सकती है परन्तु यदि सामग्री भिन्न प्रकार की हो तो वास्तविक अंकों या इकाइयों से परस्पर तुलना करना सम्भव नहीं है। ऐसी दशा में सापेक्ष परिवर्तन (relative change) नापे जाते हैं। उदाहरण के लिए मानलो, हमें वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले परिवर्तनों को देखना है। वैसे हम जानते हैं कि मूल्य में परिवर्तन होता है परन्तु कितना होता है यह हम साधारण तरीके से नहीं नाप सकते। उसके लिए हम सापेक्ष परिवर्तन देखते हैं और इसके लिए देशनांक बनाते हैं।

अतः देशनांक एक तरीका है जिसके द्वारा परिवर्तनशील क्रियाओं के सापेक्ष परिवर्तन नापे जाते हैं। यदि किसी व्यक्ति के सामने मूल्य सारणी या उत्पादन अंक रख दिये जाय और उससे पूछा जाय कि इन अङ्कों की सामान्य प्रवृत्ति क्या है ? कीमतें पिछले वर्ष में या पिछले पन्द्रह वर्षों में कितनी बढ़ गई हैं ? क्या उत्पादन सन्तोषजनक है ? राजनीतिज्ञ भी इसी प्रकार की राष्ट्रीय समस्याएं लिये हुए होते हैं साधारण व्यक्ति भी यह जानने की कोशिश करता है कि उसका रहने का खर्चा कितना बढ़ गया है और वह उसकी मजदूरी में वृद्धि के अनुसार है या अधिक है ?

इन सब प्रश्नों का उत्तर देशनांक ही दे सकते हैं। देशनांक वास्तव में दिये गये अंकों की प्रवृत्ति का द्योतक है और इसको प्रतिशत के रूप में प्रकट करता है। उदाहरण के लिए मानलो किसी वस्तु का मूल्य 1955 के मूल्यों पर औसतन 120 प्रतिशत बढ़ गया है। अतः 1955 के आधार पर कीमतों का देशनांक 220 होगा क्योंकि 1955 को 100 मानते हैं।

देशनांक किसी एक आशय को प्रकट नहीं करता बल्कि यह तो केवल सामान्य परिवर्तनों की प्रवृत्ति प्रकट करता है।

श्री सेक्रिस्ट (Secrist) के अनुसार "देशनांक एक अङ्कों की शृंखला है जिसके द्वारा किसी भी सामग्री के समय-समय के या स्थान स्थान के परिवर्तनों को नापा जाता है"। देशनांक आम तौर पर व्यापारियों, अर्थशास्त्रियों या सामाजिक कार्यकर्ताओं द्वारा वस्तुओं के मूल्य परिवर्तन, मजदूरी, विक्रय, उत्पादन या निर्वाह व्यय जानने के लिए प्रयोग में लाये जाते हैं। इसी कारण देशनांकों को आर्थिक दबाव मापक यन्त्र (economic barometers) भी कहते हैं।

सापेक्ष परिवर्तन जानने के लिए देशनांक बनाने आवश्यक हैं और यह बनाने के लिए एक साधारण हर का उपयोग किया जाता है। इस साधारण हर का प्रयोग कर लेने

अन्य राशियां एक प्रकार की इकाइयो के रूप मे भा जाती हैं और इनकी परस्पर तुलना करना सम्भव हो जाता है। इसको समझने के लिए एक उदाहरण ले लीजिये —

मानलो 1955 में गेहू का मूल्य 8 रुपये मन था और 1957 में इनका मूल्य 10 रुपये मन होगया। यदि हम 1955 के मूल्य को 100 मान लें तो 1957 का मूल्य 1955 के आधार पर 125 हो गया। यही संख्या देशनाक है और बनाता है कि गेहूँ, का मूल्य 1957 मे 1955 के मूल्य से 25% अधिक है। यदि आधार वर्ष 1955 के मूल्यो को P_0 माना जाय और चालू वर्ष (Current) 1957 के मूल्य को P_1 माना जाय तो देशनाक का एक साधारण सूत्र $\frac{P_1}{P_0} \times 100$ होगा। यह (unweighted) अभारित सूत्र है।

देशनाक के उद्देश्य —साधारणतया देशनाक बनाने के दो मुख्य उद्देश्य हैं

(1) मूल्य में साधारण परिवर्तन को नापना।

(2) परिवर्तनो का भिन्न भिन्न श्रेणी के लोगो पर प्रभाव बतलाना।

पहिले उद्देश्य को पूर्ति करने के लिए देशनाक चुनी हुई वस्तुओ से बनाए जाते हैं और दूसरे उद्देश्य की पूर्ति के लिये ऐसी वस्तुओ को लिया जाता है जिनके मूल्य परिवर्तन का प्रभाव विशेष जाति (class) के लोगो पर पडता हो।

देशनाक के प्रयोग या लाभ —

आधुनिक समय में देशनाक अत्यन्त आवश्यक होगये हैं। समाज का कोई भी ऐसा पहलू नहीं जिसके लिए इनका प्रयोग नहीं किया जाता हो। विशेष तौर पर इनका प्रयोग निम्नलिखित दिशाओ मे किया जाता है -

(1) मूल्य देशनाक अधिक बनाये जाते हैं क्योंकि इनके बनाने से वास्तविक मजदूरी का ज्ञान हो जाता है और जीवन निर्वाह व्यय का भी पता लग जाता है।

(2) इनके प्रयोग से मूल्य परिवर्तन का अध्ययन किया जा सकता है। इससे यह भी पता लग जाता है कि मूल्य परिवर्तन के क्या कारण हैं तथा इनका समाज पर क्या प्रभाव पडेगा?

(3) मूल्य देशनाक से मूल्य परिवर्तन का पता लगाने पर मूल्य पर नियन्त्रण भी किया जा सकता है। यदि मूल्य बहुत बढ रहा हो या तेजी मे घट रहा हो तो उस के रोकने के उपाय सोचे जा सकते हैं।

(4) भिन्न-भिन्न स्थानो के तथ्यो की तुलना के लिए प्रयोग में लाये जाते हैं।

(5) विभिन्न देशो के मूल्यो का स्थायित्व और उनकी क्रय शक्ति भी देशनाकों द्वारा जानी जाती है।

(6) औद्योगिक-उत्पादन देशनाको द्वारा देशो के औद्योगीकरण का अनुमान लगाया जा सकता है।

(7) देशनाको द्वारा किसी देश की आर्थिक अवस्था या व्यापार व्यवस्था और उस की आर्थिक प्रगति का अनुमान किया जा सकता है।

देशनाक मूल्य (price), राशि (quantity) और अर्हा (value) के बनाए जा सकते हैं, लेकिन इस अध्याय मे केवल मूल्य (price) देशनाक का ही वर्णन है। इसी आधार पर राशि और अर्हा देशनाक बनाए जा सकते हैं।

(1) मदो (items) का चुनाव उनकी सख्या तथा प्राप्ति के साधन।

(2) आधार वर्ष या आधार समय (period)

(3) किस माध्य का उपयोग किया जायेगा।

(4) भार (weight) तथा उनके देने का आधार या तरीका।

मदो का चुनाव

शुद्ध देशनाक तो तभी बन सकता है जब सब मदो का समावेश किया जाय परन्तु यह सम्भव नही है क्योकि ऐसा करने मे अधिक समय लगता है, खर्चा बहुत होता है, प्रत्येक वस्तु का मूल्य जानना दुष्कर है और व्यवहारिक भी नही है। अत मदो के चुनाव की आवश्यकता होती है। वस्तुओ या मदो का चुनाव करते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिये कि वे प्रतिनिधि हो अर्थात् समाज की रुचि, आदत, रीति-रिवाज और आवश्यकताओ का प्रतिनिधित्व करे एव वह- वस्तु श्रेणीकृत (graded) तथा प्रमाणित (standardised) हो

मदो के चुनाव मे दूसरा प्रश्न उठता है कि मदो की संख्या कितनी हो ? इसके सम्बन्ध में कोई विशेष नियम नही है। आवश्यकता अनुसार मदो की सख्या निर्धारित कर लेनी चाहिये। यदि कठिनाई न हो और शुद्धता अधिक रखनी हो तो अधिक सख्या रखनी चाहिये वरना कम सख्या मे भी काम चल जाता है जबकि वह प्रतिनिधित्व ठीक करती हो।

ऊपर बताई गई बातो के चुनाव मे निम्न बातो को भी ध्यान मे रखना चाहिये —

[१] मदो का गुण

देशनाक बनाने के लिए ऐसी वस्तुओं को चुनना चाहिये जो अधिक प्रचलित हो। यदि वस्तु के एक से अधिक प्रकार (Kinds) हो तो उन सब को ले लेना चाहिये। भारत में आर्थिक सलाहकार (Economic Advisor) के देशनांक में 555 उद्धरण (Quotations) लिये जाते हैं और वस्तुओ की संख्या केवल 112 ही है।

[२] वस्तुओ का वर्गीकरण

यदि वस्तुओ के मूल्य के परिवर्तनों का अलग अलग अनुमान लगाना हो तो उन का वर्गीकरण करना जरूरी है। ऐसा करने से प्रत्येक वर्ग के अलग देशनाक बना सकते हैं और ऐसा करने से सजातिता बढ़ जाती है और प्रत्येक वर्ग के विषय मे विशेष जानकारी प्राप्त हो सकेगी।

[३] प्रतिनिधि स्थानो का चुनाव

वस्तुओ सम्बन्धी तथ्यों को किन स्थानो से प्राप्त किया गया ? यह प्रश्न भी बडा टेढा है क्योकि सभी स्थानो से यह सामग्री इकट्ठी नही की जा सकती । अत कुछ स्थानो से ही तथ्यो या वस्तुओ के मूल्य के उपलब्ध करने की व्यवस्था की जाती है। अत ऐसे स्थानो को चुना जाता है जहा वस्तु का बडी मात्रा मे क्रय विक्रय हो तथा जहा के मूल्य का प्रभाव अन्य स्थानो के मूल्य पर भी पडता हो।

[४] मूल्यो का उद्धरण (Quotation of price)

मूल्य देशनाक बनाने [illegible] महत्वपूर्ण है और इनका आर्थिक नीति से सीधा सम्बन्ध है। अत मूल्यो का उद्धरण प्राप्त करने की बहुत अच्छी व्यवस्था होनी चाहिये । इसके लिए या तो अपने आदमी नियुक्त करने चाहिये, जो इस काम के लिये दक्ष हो या उन्ही स्थानो के व्यक्ति या सस्थाओ को यह कार्य दे देना चाहिये । किसी व्यक्ति या सस्था को यह कार्य देने से पहिले यह देख लेना चाहिये कि वह इस कार्य को बिना किसी पक्षपात के करें और तमाम सूचनाए प्रामाणिक और विश्वसनीय हो ।

मूल्य प्राप्त करने के सम्बन्ध मे दूसरी बात जिसको ध्यान मे रखना आवश्यक है वह है मूल्य देने का तरीका तथा मूल्य की परिभाषा । मूल्य बनाने की दो विधिया हैं। एक के अनुसार वस्तु का परिमाण प्रति द्रव्य की इकाई (quantity of commodity per unit of money) को उद्धृत करता है और दूसरी के अनुसार द्रव्य का परिमाण प्रति वस्तु (quantity of money per unit of commodity) की इकाई के रूप मे बनाया जाता है । इनमे दूसरा मूल्य कहलाता है और पहला विलोम मूल्य (inverse price), देशनाको मे दूसरी विधि द्वारा प्राप्त मूल्य का प्रयोग करना चाहिये ।

उदाहरण के लिए, (द्वितीय विधि के अनुसार) यदि 1950 में चावल का मूल्य 20 रुपए प्रतिमन और 1960 मे 40 रुपए प्रतिमन है, तो 1950 (आधार वर्ष) के मूल्य को p_o और 1960 (चालू वर्ष) के मूल्य को p_1 मानते हुए $\left(\frac{p_1}{p_o} \times 100\right)$ सूत्र के अनुसार 1960 का देशनाक 200 होगा अर्थात् 1960 मे चावल के मूल्य 1950 की तुलना मे दुगने थे। प्रथम विधि के अनुसार, 1950 मे चावल का मूल्य दो सेर प्रति रुपया और 1960 में एक सेर प्रति रुपया था। 1950 के मूल्य को p_o और 1960 के मूल्य को p_1 मानते हुए $\left(\frac{p_1}{p_o} \times 100\right)$ सूत्र के अनुसार 1960 का देशनाक ($\frac{1}{2}$×100)= 50 होगा । इस देशनाक के अनुसार 1960 मे भाव गिर कर आधे होगए जब कि वास्तविक स्थिति यह है कि 1960 मे चावल एक रुपए के दो सेर के बजाए एक ही सेर मिलने लगे हैं। विलोम मूल्य प्राप्त करने से हमारे निर्णय गलत हो सकते हैं। यदि विलोम मूल्यो का प्रयोग किया जाए तो ठीक देशनाक प्राप्त करने के लिए मूल्यानुपाती (relatives) का समान्तर मध्यक (Mean) निकालने के बजाए हरात्मक मध्यक

(Harmonic Mean) निकालना चाहिए। भारतवर्ष मे भी 1905 तक विलोम मूल्य ही प्राप्त किए जाते थे।

मूल्य दो प्रकार के होते है, फुटकर व थोक। मूल्य देशनाक बनाने के लिये थोक मूल्य ही लेना चाहिये क्योंकि यह मूल्य एक स्थान पर ही नही बल्कि अलग-अलग स्थानों पर भी समान ही रहता है केवल मामूली अन्तर रहता है। यह मूल्य अधिक सूक्ष्मग्राही होते हैं।

थोक मूल्य के सम्बन्ध मे भी अनेक शकाए रहती है जैसे थोक मूल्य से सम्बन्धित प्रासंगिक व्यय को इसमे जोडा जाय या नही, यह मूल्य किस समय के लिये जाय ? बाजार खुलते समय या अन्य किसी समय। यह सब बातें देशनाक बनाने के उद्देश्य को ध्यान में रखकर तय करनी चाहियें।

उपरोक्त बातो के अतिरिक्त मूल्य के सम्बन्ध मे यह भी जानना जरूरी है कि मूल्य उद्धरण कितने दिनो के लिए जाय। अत यह निश्चित कर लेना चाहिए कि किन किन दिनो के मूल्य इकट्ठे करने है और वह नियमित रूप से प्राप्त होते रहने चाहिए। जितने अधिक दिनो के मूल्य होगे देशनाको मे उतनी ही अधिक शुद्धता आयेगी।

II आधार का चुनाव —

देशनाक बनाने के लिए यह आवश्यक है कि तथ्य दो समय के हो, एक समय के तथ्य को प्रारम्भिक मानते हैं और उसके आधार पर दूसरे अक का देशनाक बनाया जाता है। प्रथम निश्चित तिथि या अवधि को आधार कहते हैं।

देशनाक बनाने के लिए आधार का चुनना बडा महत्वपूर्ण है। यह आधार एक निश्चित तिथि भी हो सकतीहै और अवधि भी, जैसे किसी एक निश्चित वर्ष को ही आधार माना जाय। यदि अवधि (period) को आधार माना जाये तो यह भी हो सकता है, उदाहरणार्थ—

(i) 1950 एक निश्चित वर्ष।

(ii) 1950–55 एक अवधि का माध्य।

आधार चुनने की दो रीतिया काम में लाई जाती हैं –

(1) स्थिर-आधार रीति (Fixed Base Method)

(2) शृंखला आधार रीति (Chain Base Method)

स्थिर-आधार रीति —

इस रीति के अनुसार किसी भी एक वर्ष को अपनी इच्छा से आधार वर्ष मान लिया जाता है या कई वर्षों को चुन लिया जाता है और उसके माध्य को आधार मान लिया जाता है। भविष्य में अनिश्चित समय तक इसी आधार पर देशनाक बनाते रहते हैं।

आधार वर्ष चुनते समय इस बात का ध्यान रखना चाहिए कि वह यथोचित सामान्य वर्ष हो। यदि आधार वर्ष असामान्य होगा तो उसके आधार पर बनाये गये देशनाक ठीक रूप से स्थिति के संकेतक नही होंगे। यदि सामान्य वर्ष नही मिले तो कई वर्षों के मूल्य के माध्य को आधार मान लिया जाता है।

यदि मूल्यों में स्थाई परिवर्तन होगया हो तो ऐसे परिवर्तन को उचित प्रयोग में लाने के लिए यह अच्छा रहता है कि नया आधार वर्ष मान लिया जावे।

उदाहरण 12.1

निम्नलिखित सारणी से स्थिर-आधार-रीति द्वारा जो 1950 के आधार वर्ष पर निर्धारित हो, मूल्य देशनाक बनाओ —

1950	70
1951	67
1952	58
1953	90
1954	65
1955	80

हल —

आधार वर्ष 1950=100

वर्ष	मूल्य	देशनाक
1950	70	100
1951	67	96
1952	58	83
1953	90	129
1954	65	93
1955	80	114

हल —

उदाहरण 12.2

नीचे सारणी में एक वस्तु के विभिन्न वर्षों के मूल्य प्रति मन दिये गये हैं। इनसे स्थिर-आधार-रीति द्वारा 1954 वर्ष के आधार पर मूल्य देशनाक बनाइये।

वर्ष	मूल्य	देशनाक
1945	7.25	100
1946	8.50	117
1947	9.00	124
1948	9.62	133
1949	9.94	137
1950	10.37	143
1951	11.12	153
1952	10.50	145
1953	9.50	131
1954	10.20	141
1955	10.60	146

शृंखला-आधार रीति

इस रीति के अनुसार जिस वर्ष के लिए सापेक्ष मूल्य मालूम करना हो उससे पहले वर्ष को आधार मान लिया जाता है और उसके आधार पर ही सापेक्ष मूल्यों की गणना की जाती है।

इस रीति के निम्न लक्षण है :

(1) आधार वर्ष बदलता रहता है।

(२) इसके द्वारा एक वर्ष और उसके अगले वर्ष की प्रत्यक्ष तुलना की जा सकती है।

(३) इस आधार पर बनाये गये देशनाकों में नये मदो का समावेशन (include) और पुराने मदो का अपनयन (delete) कर सकते हैं।

यदि मूल्यो की तुलना लम्बे समय के लिए करनी हो तो इस रीति का उपयोग नही कर सकते।

इस रीति से देशनाक बनाने के लिये निम्न काम करना चाहिये

(१) पहिले वर्ष के मूल्य को आधार मूल्य (P_0) मानलो और उसी के आधार पर अगले वर्ष के मूल्य को (P_1) मानकर $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$ से अगले वर्ष का देशनाक मालूम करो।

(२) फिर दूसरे वर्ष के मूल्य को आधार (P_0) मानो और तीसरे वर्ष के मूल्य का दूसरे वर्ष के मूल्य के आधार पर $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$ देशनांक निकालो।

(३) हर वर्ष के लिये न० २ मे बताई गई क्रिया करनी चाहिये।

उदाहरण 12 3

श्रृंखला-मूल्यानुपात मालूम करना (chain relatives)

वर्ष	मूल्य	श्रृंखला-मूल्यानुपात	
1944	7 37		100
1945	8.56	$\frac{8\ 56 \times 100}{7\ 37}$	116
1946	9.05	$\frac{9\ 05 \times 100}{8\ 56}$	106
1947	9 70	$\frac{9\ 70 \times 100}{9\ 05}$	107
1948	9 90	$\frac{9\ 90 \times 100}{9\ 70}$	102
1949	10 30	$\frac{10\ 30 \times 100}{9\ 90}$	104
1950	11.25	$\frac{11.25 \times 100}{10\ 30}$	109
1951	10.50	$\frac{10.50 \times 100}{11\ 25}$	93
1952	9 40	$\frac{9\ 40 \times 100}{10\ 50}$	90
1953	10 15	$\frac{10\ 15 \times 100}{9\ 40}$	108
1954	10.50	$\frac{10.50 \times 100}{10\ 15}$	103
1955	10 00	$\frac{10 \times 100}{10\ 50}$	95

ऊपर दी गई सारणी में श्रृंखला मूल्यानुपात बनाये गये हैं।

111 माध्य का चुनाव —

देशनांक कई प्रकार की वस्तुओं के मूल्यों में होने वाले परिवर्तन को सामान्य रूप में समझाने वाले अंक हैं। जब इन वस्तुओं के मूल्यानुपात (relatives) निकाल लिये जाते हैं तो बाद में इनका माध्य निकालना होता है। सांख्यिकी में किसी भी माध्य का उपयोग किया जा सकता है परन्तु व्यवहार में समान्तर मध्यक (Mean), गुणोत्तर मध्यक (geometric Mean) एवं मध्यका (Median) में से ही प्रयोग में लिए जाते हैं। व्यवहार में प्राय समान्तर मध्यक का प्रयोग किया जाता है क्यों कि यह सरल है परन्तु यह चरम मदों के मूल्यों से अधिक प्रभावित होता है और उन्हें अधिक भार देता है।

गुणोत्तर माध्य सब से अधिक उपयोगी है क्योंकि सापेक्ष परिवर्तनों (relative changes) के लिए यह ज्यादा उचित है। देशनांकों में सापेक्ष परिवर्तन की गणना की जाती है अतः इसका प्रयोग अधिक सही होगा क्योंकि इसके द्वारा बनाये गये देशनांक उत्क्राम्य (reversible) होते हैं।

उदाहरण न० 12 4

वस्तु	1950 मूल्य	1950 मूल्यानुपात	1955 मूल्य	1955 मूल्यानुपात	1960 मूल्य	1960 मूल्यानुपात
अ	6	100	12	200	9	150
ब	8	100	4	50	4	50
योग		200		250		250
देशनांक (समान्तर मध्यक)		100		125		125
देशनांक (गुणोत्तर मध्यक)		100		100		87

समान्तर मध्यक वास्तविक परिवर्तनों (Actual changes) को नापता है जबकि गुणोत्तर मध्यक सापेक्षिक (relative) परिवर्तनों को नापता है। उपरोक्त उदाहरण में स्थिर-आधार रीति द्वारा 1950 को आधार वर्ष मानकर मूल्यानुपात (relatives) निकाले गये हैं। 1955 को 1950 से तुलना करने पर ज्ञात होता है कि 'अ' के मूल्य तो ठीक दुगने हो गये हैं और 'ब' के भाव ठीक आधे। 'अ' के मूल्य में वृद्धि तथा ब के मूल्य में कमी प्रतिशत में बिल्कुल बराबर है अर्थात् 1950 और 1955 के प्रतिशत मूल्यों में कोई परिवर्तन नहीं हुआ। इस बात को गुणोत्तर मध्यक से बनाए गए देशनांक सिद्ध करते हैं जो 1950 में भी 100 थे और 1955 में भी 100। समान्तर मध्यक से बनाए गए देशनांकों के अनुसार 1955 में 1950 के मुकाबले में 25 प्रतिशत की वृद्धि हो गई जो सापेक्षिक परिवर्तनों के हिसाब से ठीक नहीं है।

इसी प्रकार 1960 के मूल्यो को 1950 के मूल्यो से तुलना करने पर ज्ञात होता है कि 'अ' के मूल्य तो केवल ड्योढे (6 से 9) ही हुए हैं जबकि 'ब' के मूल्य मे बराबर (8 से 4) कमी हो गई है। अर्थात् दोनो वस्तुओ के मूल्यो मे (एक साथ मिलाकर) 1960 में 1950 के मुकाबले मे प्रतिशत कमी हो गई है। यह बात गुणोत्तर मध्यक से बनाए गए देशनांक सिद्ध करते हैं जो 1950 मे 100 और 1960 मे 87 थे। समान्तर मध्यक से बनाए गए देशनाको के अनुसार तो 1950 और 1960 मे मूल्य (100-100) बराबर ही थे।

उदाहरण 12 8 सिद्ध करना है कि गुणोत्तर माध्य से बनाए गए देशनाक उत्क्राम्य (reversible) होते हैं और समान्तर मध्यक से बनाए गए देशनाको मे उत्क्राम्यता नही पाई जाती। उत्क्राम्यता (reversibility) एक अच्छे देशनाक का आवश्यक गुण है।

IV भारित करने की विधि —

यदि वस्तुओ का प्रयोग समान हो तो हम कह सकते हैं कि प्रत्येक वस्तु का भार बराबर है अर्थात् प्रत्येक वस्तु का भार 1 है। व्यवहार मे ऐसा नही होता। कोई वस्तु अधिक मात्रा मे ली जाती है और कोई कम मात्रा मे। अत सब वस्तुओ के भार बराबर नही होते। ठीक देशनाक बनाने के लिए यह आवश्यक है कि वस्तुओ को उचित रूप मे भारित करना चाहिए।

भारित करने की दो रीतिया काम मे आती हैं —

(1) एक रीति के अनुसार जिस वस्तु को अधिक महत्व देना होता है उसकी कई किस्मो के मूल्यो का समावेश अलग अलग कर लिया जाता है। जैसे किसी देशनाक में गेहूँ की 5 किस्मो का मूल्य अलग अलग लिया गया है और चीनी के दो प्रकार के मूल्य लिये गए हैं तो इस देशनाक मे गेहू व चीनी के भारो का अनुपात 5 2 होगा। इस प्रकार के भार देने को अप्रत्यक्ष भार (implicit weights) कहते हैं।

(2) दूसरी रीति के अनुसार भार प्रत्यक्ष (explicit) रूप से दिये जाते हैं। इस मे जिस वस्तु को जितने भार देने हो वह उनके साथ लिख दिये जाते हैं जैसे गेहू को 5, चावल को 3, चीनी को 2, इत्यादि।

उदाहरण 12·5

निम्नलिखित सारणी से दिये गये भारो के आधार पर निर्वाह व्यय देशनाक बनाइये —

वस्तु	देशनांक	भार
भोजन	352	48
ईंधन व रोशनी	220	10
कपडे	230	8
किराया	160	12
विविध	190	15

(आई० ए० एस० 1950)

वस्तु	देशनाक I	भार V	भारित सापेक्ष IV
भोजन	352	48	16896
ईन्धन व रोशनी	220	10	2200
कपडे	230	8	1840
किराया	160	12	1920
विविध	190	15	2850
योग		92 ΣV	25706 ΣIV

$$\text{निर्वाह देशनाक} = \frac{\Sigma IV}{\Sigma V} = \frac{25706}{93}$$

$$= 276\ 4$$

मूल्यानुपातो और श्रृंखलानुपातो का सम्बन्ध

कभी कभी मूल्यानुपातो को श्रृखलानुपातो में या श्रृखलानुपातो को मूल्यानुपातो मे बदलने की जरूरत पड जाती है। यह बडी आसानी से बदले जा सकते हैं।

उदाहरण न० 12 6

नीचे लिखे स्थिर-आधार देशनाको (Fixed Base Index Nos) से श्रृखलाधार देशनाक (Chain Base Index Nos) बनाइये।

1951	1952	1953	1954	1955	1956
275	291	308	280	292	300

वर्ष 1	स्थिर–आधार देशनाक 2	स्थिर-आधार देशनाको से श्रृखला आधार देशनाको में परिवर्तन 3	श्रृखला–आधार देशनाक 4
1951	275		100
1952	291	$\frac{291\times100}{275}$	106
1953	308	$\frac{308\times100}{291}$	106
1954	280	$\frac{280\times100}{308}$	91
1955	292	$\frac{292\times100}{280}$	104
1956	300	$\frac{300\times100}{292}$	103

कार्य विधि —प्रथम वर्ष के देशनाक को 100 के बराबर मानिए। इसके आगे वाले वर्ष के देशनाक को P_1 मानिए और उसके ठीक पीछे वाले देशनाक को P_0 फिर

$\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$ का सूत्र लगा कर देशनाक मालूम कीजिए। इसी विधि से प्रत्येक वर्ष के देशनाक को P_1 और उसके पीछे वाले देशनाक को आधार वर्ष (P_0) मानकर $\left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$ से देशनाक मालूम करते जाइये ।

यदि शृंखलाधार देशनाको मे स्थिर-आधार देशनाक बनाने हो तो वह भी आसानी से बनाए जा सकते हैं।

उदाहरण 12 7

नीचे सारणी में शृंखलाधार देशनाक (Chain Base index Nos) दिए जाते हैं। इनसे स्थिर-आधार देशनाक (Fixed Base Index Nos) बनाइये —

1951	1952	1953	1954	1955	1956
80	95	102	98	105	100

हल :

वर्ष	शृंखलाधार देशनाक	शृंखलाधार देशनाको को 1951 से शृंखलित करना	स्थिर-आधार देशनाक
1951	80		80
1952	95	$\frac{80}{100} \times 95$	76
1953	102	$\frac{80}{100} \times \frac{95}{100} \times 102$	78
1954	98	$\frac{80}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{102}{100} \times 98$	76
1955	105	$\frac{80}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{98}{100} \times 105$	80
1956	100	$\frac{80}{100} \times \frac{95}{100} \times \frac{102}{100} \times \frac{98}{100} \times \frac{105}{100} \times 100$	80

दूसरी विधि —

हम यह जानते हैं कि शृंखलाधार देशनाको (Chain Base Index Nos) में किसी भी वर्ष के देशनाक के ठीक पिछले वाले वर्ष का देशनाक 100 के बराबर माना जाता है। उपरोक्त उदाहरण में 1951 का देशनाक 80 तब है जबकि उससे ठीक पिछले वाले वर्ष का देशनाक 100 है और 1952 का देशनाक 95 तब है जबकि 1951 का देशनाक 100 माना गया है, इसी प्रकार 1955 का देशनाक 105 तब है जबकि 1954 का देशनाक 100 के बराबर माना गया हो। शृंखलाधार देशनाको को स्थिर-आधार देशनाको में बदलने के लिए उपरोक्त बात याद रखना आवश्यक है। स्थिर-आधार देशनाक एक जंजीर की भांति शुरू की कड़ी से जुड़े रहते हैं।

कार्य-विधि—1950 का देशनाक 100 मान लीजिए। इस आधार पर 1951 का देशनाक स्वतः ही 80 के बराबर होगा। अब 1951 के देशनाक को 100 मानिए।

जब 1951 का देशनाक 100 है तो 1952 का 95, अत जब 1951 का देशनांक 80 हो तो (जो मालूम कर लिया गया है) 1952 का देशनाक $\left(\frac{95}{100} \times 80\right) = 76$ होगा। अब 1952 का देशनाक 100 है तो 1953 का देशनाक 102 है अत 1952 का देशनाक 76 (जो हाल ही में मालूम किया है) हो तो 1953 का देशनाक $\left(\frac{102}{100} \times 76\right) = 78$ होगा। इसी प्रकार से सब वर्षों के देशनाक निकाल कर एक जजीर बना लीजिए जिसकी सब कडिया 1950 के देशनाक 100 से जुडी हुई हो। निम्न स्थिर-आधार देशनाक* तैयार होंगे।

1951	1952	1953	1954	1955	1956
80	76	78	76	80	80

उत्क्राम्यता परीक्षा [Reversibility Tests]

किसी देशनाक मे उत्क्राम्यता है या नही यह भी जानना आवश्यक है। उत्क्राम्यता दो प्रकार की होती है —

[1] समय उत्क्राम्यता [Time Reversibility]

[2] खण्ड-उत्क्राम्यता [Factor Reversibility]

समय उत्क्राम्यता

यदि किसी वर्ष का अन्य वर्ष को आधार मानकर बनाया गया देशनाक, पिछले वर्ष को आधार मानकर बनाये गये देशनाक का व्युत्क्रम [Reciprocal] हो, तो यह देशनाक समय उत्क्राम्यता का द्योतक है।

अच्छी तरह समझने के लिए एक उदाहरण लें। मानलो एक वस्तु 'क' है और वह साधारण मूल्य मे परिवर्तन उत्पन्न करती है जिसे हम नापना चाहते हैं। यदि वस्तु की कीमत और सख्या (p) व (q) द्वारा प्रकट की जाय तो—

$$\left(P_{01} = \frac{P_1}{P_0}\right)$$

'क' वस्तु का मूल्य देशनांक होगा। इसी तरह किसी दूसरे वर्ष, वर्ष 1 को आधार मानकर देशनाक बनायें तो—

$$\left(P_{10} = \frac{P_0}{P_1}\right)$$

अब हमारे पास दो अलग-अलग वर्षों को आधार मानकर मूल्य देशनाक बन गये, यदि इनको गुणा करने से 1 प्राप्त हो तो समझना चाहिये कि यह समय उत्क्राम्यता प्रकट करता है। ऊपर दिये गये उदाहरण में—

$$\left(P_{01} \times P_{10} = \frac{P_1}{P_0} \times \frac{P_0}{P_1} = 1\right)$$

इस सम्बन्ध में यह बात ध्यान मे रखनी चाहिए कि समय उत्क्राम्यता केवल

* निकटतम सिद्धांत के अनुसार

उन्ही देशनाको मे मिलेगी जो साधारण गुणोत्तर माध्य द्वारा बनाये गये हो। यदि अन्य माध्य प्रयोग मे लाये गये हो तो समय उत्क्राम्यता नही मिलेगी।

उदाहरण 128

यह देखना है कि समय उत्क्राम्यता है या नही।

वस्तु	वर्ष 0 मे मूल्य	वर्ष 1 मे मूल्य	मूल्यानुपात वर्ष 0 आधार	मूल्यानुपात वर्ष 1 आधार
क	12	15	1 25	0 80
ख	20	15	0 75	1 33
ग	30	45	1 50	0 67
समान्तर मध्यक			P_{01} =1.17	P_{10} = 93
गुणोत्तर मध्यक			P_{01} =1 12	P_{10} = 89

समान्तर मध्यक के अनुसार $P_{01} \times P_{10} = 1\,17 \times .93$

$= 1\,0881$

परिणाम एक से अधिक है अत यह समय उत्क्राम्यता पूरी नही कर पाता।

गुणोत्तर मध्यक के अनुसार $P_{01} \times P_{10} = 1\,12 \times .89$

$= 9968$

या $= 1$

[निकटतम सिद्धान्त के अनुसार]

खण्ड उत्क्राम्यता .

यदि मूल्य और राशि मे परस्पर परिवर्तन करें और परस्पर विरोधी परिणाम नही मिलें तो खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी होती है। सकेत रूप में इसे इस प्रकार समझना चाहिये —

यदि आधार वर्ष 0 और प्रचलित वर्ष 1 हो तो P_0 मूल्य मे होने वाले सापेक्षिक परिवर्तनो को नापेगा। इसका मूल्य—

$$\left(\frac{\Sigma p_1\, q_0}{\Sigma p_1\, q_0}\right)$$

यदि मूल्य और राशि मे परिवर्तन किया जाये तो नया देशनांक

$$q_{01} = \left(\frac{\Sigma q_1\, p_0}{\Sigma q_0\, p_0}\right)$$

इस परीक्षा के अनुसार P_{10} और q_{01} का गुणनफल कुल मान मे होने वाले परिवर्तन के बराबर होना चाहिये,

कुल मान मे होने वाले परिवर्तन $= \left(\frac{\Sigma p_1\, q_1}{\Sigma p_0\, q_0}\right)$

खण्ड उत्क्राम्यता को नापने के लिए अनेक प्रकार के सूत्रों को प्रयोग में लाया गया है परन्तु सब से श्रेष्ठ सूत्र प्रोफेसर इरविंग फिशर का है जो निम्न है —

$$P_{01} = 100 \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

प्रचलित वर्ष का मूल्य = (p_1)
आधार वर्ष का मूल्य = (p_0)
प्रचलित वर्ष की राशि = (q_1)
आधार वर्ष की राशि = (q_0)
योग या जोड = Σ

इस सूत्र को फिशर का आदर्श सूत्र कहते है। फिशर ने 134 सूत्रों का अध्ययन करके यह 135 वा सूत्र निकाला था। यह एक गुणोत्तर-वज्र-भारित (geometric-cross-weight) सूत्र है। इसे आदर्श (Ideal) सूत्र इसलिए कहते है कि यह समय एवं खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा में खरा उतरता है। साथ ही इस सूत्र मे सगत-बर्ताव (Consistent behaviour) है। यह न तो अधोमुख पक्षपात (Downward bias) और न उत्तमुख पक्षपात (Upward bias) दिखाता है। किन्तु इस सूत्र मे चालू वर्ष की राशि की जानकारी होना आवश्यक है जिसे प्राप्त करना कठिन होता है, अतः व्यवहारिक दृष्टि से इस सूत्र का अधिक प्रयोग नहीं है। इसके प्रयोग से दोनो प्रकार की परीक्षा पूरी हो जाती है। इसके लिए निम्न उदाहरण दिया जाता है —

उदाहरण 129

निम्नलिखित सामग्री से बतलाइए कि फिशर का आदर्श देशनाक किस प्रकार समय तथा खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षाओं को पूरा करता है —

	क		ख		ग	
वर्ष	मूल्य	राशि	मूल्य	राशि	मूल्य	राशि
1950	4 5	50	8	40	5	10
1954	4	20	5 5	30	4	8

हल—

फिशर का आदर्श देशनांक बनाना

वस्तु	आधार वर्ष 1950		प्रचलित वर्ष 1954		p_0q_0	p_1q_0	p_0q_1	p_1q_1
	1	2	3	4	(1×2)	(2×3)	(1×4)	(3×4)
	मूल्य p_0	राशि q_0	मूल्य p_1	राशि q_1				
क	4 5	50	4	20	225	200	90	80
ख	8	40	5 5	30	320	220	240	165
ग	5	10	4	8	50	40	40	32
					595 $\Sigma p_0 q_0$	460 $\Sigma p_1 q_0$	370 $\Sigma p_0 q_1$	277 $\Sigma p_1 q_1$

समय उत्क्राम्यता पूरी करने के लिए

($p_{01} \times p_{10} = 1$ होना चाहिए

$$p_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_1 q_0}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_1}}$$

$$p_{10} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_0}{\Sigma p_1 q_0} \times \frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_1 q_1}}$$

$$p_{01} \times p_{10} = \sqrt{\frac{460}{595} \times \frac{277}{370} \times \frac{595}{460} \times \frac{370}{277}} = 1$$

खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी करने के लिए

$$p_{01} \times q_{01} = \left(\frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}\right)$$

p_{01} ऊपर निकाला जा चुका है।

$$q_{01} = \sqrt{\frac{\Sigma p_0 q_1}{\Sigma p_0 q_0} \times \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_1 q_0}}$$

$$= \sqrt{\frac{370}{595} \times \frac{277}{460}}$$

$$p_{01} \times q_{01} = \sqrt{\frac{460}{595} \times \frac{277}{370} \times \frac{370}{595} \times \frac{277}{460}}$$

$$= \sqrt{\frac{277 \times 277}{595 \times 595}} = \frac{277}{595}$$

$$\therefore \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0} = \frac{277}{595}$$

$$\therefore p_{01} \times q_{01} = \frac{\Sigma p_1 q_1}{\Sigma p_0 q_0}$$

अत खण्ड उत्क्राम्यता परीक्षा पूरी हुई।

निर्वाह व्यय देशनाक —

वर्तमान समय में मूल्यो मे परिवर्तन केवल मूल्य स्तर को ही प्रकट नही करता बल्कि समाज के भिन्न भिन्न वर्ग के लोगो पर इसका अलग अलग प्रभाव पडता है। यह प्रभाव कितना, कैसे और किन लोगो पर पडता है, यह सब जानने के लिए निर्वाह व्यय देशनाक बनाये जाते हैं।

निर्वाह व्यय देशनाक बनाने मे कठिनाइयाँ ·

निर्वाह व्यय देशनाक बनाने बडे कठिन है क्योकि इनका सम्बन्ध समाज के लोगो के जीवन व्यय से सम्बन्धित है। सभी लोग एक प्रकार के नही होते, न सभी की आय समान है, न सभी एक प्रकार की वस्तुए प्रयोग मे लाते हैं। अत अनेक प्रकार की कठिनाइयो का सामना करना पडता है। मुख्य कठिनाइया निम्न हैं —

(1) प्रयोग मे आने वाली चीजें फुटकर मूल्य पर खरीदी जाती है परन्तु देशनाक बनाने के लिए थोक मूल्य प्रयोग में आते हैं।

(2) यदि फुटकर मूल्य के आधार पर देशनाक बनाये जायें तो वे दूसरे स्थानो पर काम नही आ सकते क्योकि फुटकर मूल्य एक ही शहर मे अलग अलग जगहों पर अलग अलग हुते हैं।

(3) प्रयोग मे लाई जाने वाली वस्तुओ की राशियो मे तथा उनके गुणो मे बहुत शीघ्रता से परिवर्तन होता रहता है।

(4) भिन्न भिन्न वर्गों के लोग वस्तुओ पर एक ही अनुपात मे व्यय नही करते अत यह देशनाक किसी एक वर्ग के बारे मे ही सूचना देते हैं।

इन कठिनाइयो को ध्यान मे रखते हुए निर्वाह व्यय देशनाक अलग अलग वर्ग के लोगो के बारे मे बनाये जाते हैं तथा अलग स्थानो के लिए अलग देशनाक बनाते है। वस्तुओ के परिवर्तनो का भी ध्यान रखा जाता है।

निर्वाह व्यय देशनाक बनाना

इन देशनाको को बनाने से पहिले यह देखना होगा कि यह किन लोगो के सम्बन्ध मे बनाये जाते हैं। उन लोगो के परिवार बजट के बारे में अनुसधान किया जाता है। परिवार बजट निदर्शन (Sample) द्वारा प्राप्त किये जाते है। जहा तक हो सके अधिक से अधिक परिवार बजट निदर्शन मे लेने चाहियें। इस प्रकार सूचना से यह पता लग जाता है कि लोग किस प्रकार की वस्तुओ का प्रयोग करते हैं, और उन वस्तुओं व सेवाओ पर कितना खर्च करते हैं। वस्तुओ और सेवाओ का वर्गीकरण किया जाता है, इनको फिर उपवर्गों में बाटा जाता है। देशनाको को अधिक विश्वसनीय बनाने के लिए केवल वही वस्तुए व सेवाए लेनी चाहिए जिनके गुणो व राशियो मे न्यूनतम परिवर्तन हो तथा जिनके मूल्य नियमित रूप से उपलब्ध हो। प्रत्येक वर्ग के लिए विभिन्न वस्तुओ के मूल्य में होने वाले परिवर्तनो का महत्व भिन्न होता है अत मूल्यो या उनके अनुपातो को यथोचित रूप से भारित भी किया जाता है।

भारित निर्वाह व्यय देशनाको की रचना दो रीतियो से की जाती है :—

(1) सामूहिक व्यय रीति (Aggregate Expenditure Method)

(2) परिवार बजट रीति (Family Budget Method)

इस रीति के अनुसार आधार वर्ष मे वस्तुओ की राशियो का पता लगा लिया जाता है और फिर इनको भार के रूप मे प्रयोग मे लाया जाता है। जिस वर्ष के लिए देशनांक बनाना हो उस वर्ष मे प्रत्येक वस्तु पर किये गये खर्च को आधार वर्ष के भार के अनुसार गुणा कर लिया जाता है। आधार वर्ष का कुल व्यय इसी प्रकार मालूम कर लिया जाता है। इस प्रकार दोनो वर्षों का सामूहिक व्यय मालूम हो जाता है। फिर देशनाक बनाने वाले वर्ष के कुल सामूहिक व्यय को आधार वर्ष के सामूहिक व्यय मे भाग देकर 100 से गुणा कर दिया जाता है और जो अक प्राप्त होता है वह उस वर्ष का निर्वाह व्यय देशनाक है।

* प्रचलित वर्ष का देशनाक = $\left(\frac{\Sigma IV}{\Sigma V}\right)$

$(V) = (P_0 q_0)$

$(I) = \left(\frac{P_1}{P_0} \times 100\right)$

आधुनिक समय मे प्राय देशनाक परिवार बजट रीति से ही बनाये जाते है क्योकि इस प्रकार बनाने से रहन सहन का सच्चा रूप प्रकट हो जाता है। इस प्रकार से देशनाक बनाने मे कई कठिनाइया है, जैसे वस्तुओ का छाटना, कीमतों का इकट्ठा करना तथा भिन्न भिन्न प्रकार के कुटुम्बों के खर्च का पता लगाना। इतना होते हुए भी आजकल इनका प्रयोग बढ़ रहा है और इनमे सुधार करने का उपाय किया जा रहा है।

उदाहरण १२.१० मे दिए गए प्रश्न को परिवार बजट रीति से अगले पृष्ठ पर हल किया गया है।

---

* याद रहे इस सूत्र का प्रयोग करने पर $\left(\frac{\Sigma IV}{V}\right)$ को 100 से गुणा करने की आवश्यकता नही है।

निर्वाह व्यय देशनाक बनाने मे परिवार बजट रीति को ही प्रयोग में लाया जाता है।

निर्वाह व्यय देशनाक बनाने मे अशुद्धियां (Errors)

जैसा कि पहिले बताया जा चुका है निर्वाह देशनाक बनाना बड़ा कठिन है, इनके बनाने में अशुद्धियां रह जाती है क्योंकि —

(1) मनुष्यो का वर्गीकरण बिल्कुल ठीक नही किया जा सकता। किस मनुष्य को किस वर्ग में लें यह बहुत कठिन है।

(2) वस्तुओ का चुनाव करने मे गलती रह सकती है।

(3) मूल्य वास्तव मे प्रतिनिधित्व करने मे असमर्थ हो सकता है।

(4) भार देन मे गलती हो सकती है।

(5) बहुत सी वस्तुए जो आधार वर्ष में प्रयोग मे आती थी अब प्रयोग मे नही आती हो क्योकि फैशन व अन्य कारणो से वस्तुओ के प्रयोग मे परिवर्तन होता रहता है।

(6) कुटुम्बो का कुल व्यय समान हो सकता है परन्तु उनका भिन्न भिन्न वस्तुओ पर व्यय का अनुपात वही हो यह आवश्यक नही है। अत निर्वाह देशनाक प्रत्येक व्यक्ति पर लागू नही हो सकता।

(7) हम इस मान्यता पर काम करते हैं कि वस्तुओं की संख्या या मूल्य, जो आधार वर्ष के हैं, उनमे कोई परिवर्तन नही हुआ है। वास्तव में ऐसा नहीं है इनमे परिवर्तन होता है। रहन सहन के स्तर मे, समय के बीतने से, या मूल्य परिवर्तन से या फैशन के परिवर्तन के साथ, परिवर्तन होता है इन बातो का कोई ध्यान नही रखा जाता।

उपरोक्त दोषो को दूर करने के लिए यह जरूरी है कि समय समय पर अनुसधान किए जाए, नये नये भार दिये जायें और वस्तुओ की संख्या एव गुण मे भी परिवर्तन किये जायें।

आधार वर्ष बदलना, शिरोवन्धन एव देशनाको की अपस्फीति करना (Base shifting, Splicing and Deflating)

१—आधार वर्ष बदलना (Base Shifting)

बहुधा आधार वर्ष में परिवर्तन करना आवश्यक हो जाता है। उदाहरणार्थ यदि किन्हीं वस्तुओ के देशनाकों की तुलना जो 1930 आधार वर्ष पर बने हो उन वस्तुओ के देशनाकों से करनी हो जो 1936 के आधार वर्ष पर बनाये गये हो तो यह आवश्यक है कि 1930 के देशनाकों को नये देशनाको मे परिवर्तित किया जाय जिनका आधार वर्ष भी 1936 हो अर्थात् पहिले देशनाको का आधार वर्ष बदल दिया जायेगा।

यदि देशनाक बनाने में गुणोत्तर मध्यक का प्रयोग किया गया है तो आधार वर्ष को बड़ी आसानी से बदला जा सकता है और किसी प्रकार की गलती नहीं होती। यदि अन्य मध्यक का प्रयोग किया गया है तो गलती अवश्य रहती है। इसका यह कारण है

है कि गुणोत्तर माध्य सापेक्षिक परिवर्तनों (relative changes) को मापती है जो सदा उत्क्राम्य (reversible) होते हैं जबकि अन्य माध्य निरपेक्ष परिवर्तनों (absolute changes) को मापती हैं जो उत्क्राम्य नहीं होते। अतः इस दोष को दूर करने के लिए एक दूसरी रीति को काम में लाते हैं। नये आधार पर सभी देशनाकों को फिर से बनाया जाता है। इसे अच्छी तरह समझने के लिए एक उदाहरण दिया जाता है।

उदाहरण 12.11

वर्ष	Base (1948)	Base (1950)
1948	100	133
1949	95	127
1950	75	100
1951	60	80
1952	45	60
1953	40	53
1954	45	60

नोट—नये आधार वर्ष के देशनाक से दूसरे वर्ष के देशनाकों को भाग देकर 100 से गुणा करना चाहिए।

२. सिरोबन्धन (Splicing)

कभी कभी ऐसा होता है कि एक आधार वर्ष पर बनाये गये देशनाक आगे बनाने बन्द कर दिये जाते हैं और अन्य प्रकार के देशनाक बनाये जाते हैं। इनका आधार वर्ष वही होता है जो पिछले देशनाकों के बन्द होने का वर्ष होता है। यदि हम यह चाहें कि पहिले देशनाकों के आधार वर्ष पर नये देशनाकों को जोड़ना है तो यह आसानी से हो सकता है। देशनाक बन्द होने वाले वर्ष के दोनों देशनाकों के अनुपात से बाद के वर्षों के देशनाकों को गुणा कर देना चाहिए। इसी को सिरोबन्धन कहते हैं।

उदाहरण 12.12

वर्ष	क	ख		
1940	100			
......	....			
1949	140			
1950	150	100	(× 150/100)	150
1951		85	(× 150/100)	127.5
1952		98	"	147
1953		95	"	142.5
1954		88	"	132
1955		75	"	112.5
1956		90	"	135

यदि 'क' को 150/100 से भाग दिया जाये तो 'क' 'ख' से सतत हो जायेगा।

३ देशनाकों की अपस्फीति करना (Deflating the Index Nos)

मूल्य में परिवर्तन होने के कारण देशनाकों में भी परिवर्तन होता है और इसे प्रकट करने को अपस्फीति कहते हैं। उदाहरण के लिए मान लीजिये हमारे पास मजदूरी की शृखला है। यदि इन मजदूरियों को निर्वाह व्यय देशनाक से भाग दे दें तो वास्तविक मजदूरी का पता लग जायेगा। इसी प्रकार राष्ट्रीय आय के परिवर्तन की वास्तविक स्थिति ज्ञात करने के लिए उसकी मूल्य देशनाकों के आधार पर अपस्फीति करनी पड़ती है। निम्न उदाहरण से यह स्पष्ट हो जायगा।

उदाहरण 12 13

प्रति व्यक्ति आय की अपस्फीति

वर्ष	प्रति व्यक्ति आय रुपये	निर्वाह व्यय देशनाक आधार 1950-51	वास्तविक आय प्रति व्यक्ति
1950-51	60	100	60
1951-52	72	105	68 6
1952-53	80	108	74 1
1953-54	85	112	76
1954-55	88	115	76 5
1955-56	102	120	85

ऊपर के उदाहरण में आय तथा मूल्य दोनों में वृद्धि स्पष्ट होती है परन्तु वास्तविक आय के अङ्क यह प्रकट करते हैं कि मूल्यों में वृद्धि कम हुई है।

EXERCISE XII

Theory

1 Define an Index Number Explain the role of weights in the construction of an Index Number of the general price level

(M A, Raj, 1950)

2 "Index Numbers are economic barometers" Explain this statement, and mention what precautions should be taken in making use of any published index numbers (B Com, Alld, 1952)

3 Distinguish between the Fixed Base and the Chain Base Methods of constructing index numbers and discuss their relative merits

4 What average, do you think is appropriate to use in averaging the price relatives to arrive at the final index number and why ?

5 What considerations would weigh with you in regard to ection of commodities and the base year while constructing a whole- e price index number ?

6. Discuss with illustrations the weighted index number of wholesale prices, and show its importance.

(B Com, Nagpur, 1942)

7 "Averages linked with percentages constitute the whole basis upon which is raised the superstructure of a simple device-that of index numbers-of comparing factors which are not directly comparable" Elucidate (B Com, Alld 1948)

8 Describe briefly the method you would adopt for the compilation of 'Cost of Living Index Number' for the working classes in an industrial area (B Com, Hons, Andhra 1944)

9 Explain Fisher's "Ideal" Method of weighting index numbers and state the difficulties that are to be faced in using it

10 What points would you take into consideration in choosing the base and determining the weights in the preparation of cost of Living index numbers (B Com, Agra, 1943)

11 What are the main sources of errors in Cost of Living index numbers ? How can these errors be avoided ? (B. Com Alld 1938)

12 Explain the uses of Index Numbers Describe the procedure followed in the preparation of general and cost of living index numbers

(B Com, Agra, 1942)

13 "Index numbers seek to set aside the irregularities of individual instances and replace it by the regularity of the big numbers" Comment (M Com, All, 1947, M A Pb Apr, 1952)

14 Discuss the problem of obtaining a perfect formula for an index number of prices Explain fully what is meant by the reversibility of an index number. (M A Patna, 1940)

15 Show with the help of an example, how would you convert the index number from one base period to another

(B Com Agra 1940)

16 Write short but explanatory notes on the following --

Implicit and Explicit Weighting, Unweighted Index Numbers, Factor and Time reversal tests, Splicing of index numbers, Qualities of a commodity for selection of an index number, Deflating, Fisher's Indeal Formula.

17 Explain clearly the limitations of the Index Numbers

18 What are factor and time reversal tests in the theory of index numbers ? Give any formula which satisfies both these tests

19 Explain the uses of Index Numbers Describe the procedure followed in the preparation of general and cost of living index numbers.
(II year T D C Raj 1962)

Practical

1 In the folowing table the wholesale prices of Jute in Calcutta from 1934 to 1950 is given Construct Index Number taking 1939 as a base year

Year	Rs	Year	Rs	Year	Rs.
1934	78	1941	94	1948	75
1935	54	1942	88	1949	71
1936	67	1943	78	1950	50
1937	56	1944	76		
1938	72	1945	112		
1939	102	1946	99		
1940	93	1947	76		

[B Com, Calcutta]

2 Find out the Index Number of each year from the following data —

Year	1945	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Price	78	88	70	78	94	99	102	112	99	75

3 Prepare index numbers of prices for three years with average price as base

	Rate Per rupee		
	Wheat	Cotton	Oil
I Year	10 Srs	4 Srs	3 Srs
II Year	9 ,,	$3\frac{1}{2}$,,	3 ,,
III Year	9 ,,	3 ,,	$2\frac{1}{2}$,,

[B Com. Agra 1941, 1958]
[II year T. D C Raj 1963]
[Ans 91 98; 110]

Hint 1 Find prices per maund.

2. Find the average of prices of each commodity to be used as p_c

4 The following table gives the average wholesale prices of the commodities A, B and C during the years 1944 to 1951.

Average wholesale prices in rupees

	1944	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951
A	50 6	61 6	66 8	71 0	70 6	72 0	72 0	75 6
B	6 8	6 4	5 6	6 2	6 4	7 8	6 0	6 8
C	29 6	25 8	25 4	28 6	23 6	30 2	28 0	34 6

Find out the Index Numbers

(i) by reference to 1944 as base year
(ii) by the chain base method

Ans —(i) 100, 101 0, 101 2, 109 4, 110 1, 119 7, 108 8, 122 1
(ii) 100, 101 0, 99 4, 108 4, 100 9, 109 8, 90 7, 113 0

5 From the fixed base index numbers given below, prepare chain base index numbers

1948	1949	1950	1951	1952	1953
376	392	408	380	392	400

(Ans 100, 104 3, 104 1, 93 1, 103 2, 102)

6 From the chain base index numbers given below, prepare fixed base index numbers

1948	1949	1950	1951	1952	1953
92	102	104	98	103	101

(Ans— 92, 93 8, 97 6, 95 6, 98 5, 99 5)

7 Calculate the price Index for 1956 with 1952 as base i e 100 from the following data using the unweighted arithmetic mean

Articles	Unit	Price (1952)	Price (1956)
Wheat	Per md	10 0	25 0
Ghee	„ Seer	4 0	6 0
Wood	„ md	2 0	2 0
Sugar	„ Seer	0 12	0 8
Cloth	„ Yard	2 8	1 0

Calculate also the index for 1952 with 1956 as 100 and comment upon the result

(Ans 120 47 for 1956 with base 1952 and 127 33 in 1952 with base 1956 This is a defect in arithmetic mean It does not satisfy the Time Reversal test)

8 Use the following data of industrial production in India to compare the annual fluctuations in the Indian industrial activity by the chain base method

Year	1919	-20	-21	-22	-23	-24	-25	-26	-27	-28	-29
Index		120	122	116	120	120	137	136	149	156	137

Year	-30	-31	-32	-33
Index	162	149	160	160

(M Com, Lucknow, 1943)

Hint—Convert the above Fixed Base Index Nos into chain Base Index Nos.

9 Which average would you use in computing the price index numbers from the following data for 1956 on the basis of 1950 Give your reasons.

	Commodity	Unit	Price in 1950	Price in 1956
1	Rice	Per maund	4 75	7.15
2	Wheat	,, ,,	3 62	4 53
3	Linseed	,, ,,	6 50	4 88
4	Gur	,, ,,	6 25	6 25
5	Cotton	,, ,,	17 25	12 94
6	Tobacco	,, ,,	15 00	11 25

Hint—(Reasons can be given in favour of geometric mean)

10. From the following data, prepare a weighted index numbe for the food group for 1949 with 1939 as the base period

Items in the food group	Weights	Price per seer in 1939	Price per seer in 1949
1 Wheat	40	8 nP.	47 nP.
2 Rice	20	12 ,,	62 ,,
3 Gram	15	6 ,,	34 ,,
4 Arhar Dal	5	14 ,,	56 ,,
5 Milk	6	15 ,,	62 ,,
6 Mustard Oil	10	31 ,,	250 ,,
7 Sugar	3	25 ,,	88 ,,
8 Salt	1	6 ,,	19 ,,

(Ans weighted Index Number is 567 6)

11 The following are the group index numbers and the grou weights of an average working class family's budget Construct the co of living Index numbers by assigning the given weights.

Groups	Index numbers	Weights.
Food	352	48
Fuel and lighting	220	10
Clothing	200	10
Rent	150	10
Miscellaneous	180	12

(Ans 275)

12 Find the cost of living index numbers from the followi indices, the weights being Food 60, Fuel and light 8, Clothing 12, Re 16 and Misc. 4

Year	Food	Rent	Clothing	Fuel and Light	Misce
1952	100	100	100	100	100
1953	102	100	103	100	97
1954	106	102	105	101	98
1955	104	103	106	102	99
1956	107	105	108	101	102

(Ans —101 44, 104 52, 103 72, 106 12)

13 From the following information prepare the index number for the miscellaneous group taken for the construction of the Kanpur working class cost of living index No

Miscellaneous group.

No	Articles	Unit of Quantity	Weights Assigned	Price in 1945 nP	Price in 1956 nP
1	Barber	Per Shave	13	9	36
2.	Soap	„ Bar	9	30	125
3	Medicine	„ bottle	3	50	250
4	Supari	„ lb	25	30	125
5	Bidi	„ bundle	22	6	25
6	Travelling Expenses		27	25	90
7.	Newspaper	„ Copy	1	10	16

Hint -Apply $\frac{\Sigma IV}{\Sigma V}$ Formula

(Ans 399.1)

14 Costruct the cost of living index number for 1950 on the basis of 1945 from the following data using the aggregate expenditure method

Articles	Quantity consumed in 1945.	Unit	Price in 1945. Rs.	Price in 1950 Rs.
Rice	6 Md.	Maund	6 00	6 50
Wheat	6 „	„	5 50	8.25
Gram	1 „	„	6 10	9 10
Arhar	6 „	„	10 00	12 50
Ghee	2 Seers	Seer	4 00	6 20
Sugar	1 5 Md.	Maund	30 00	32 50
Salt	10 Seer	„	2 00	2 50
Oil	15 „	„	10 00	15 00
Clothing	60 Yards	Yards	1.50	2 00
Fire wood	15 Mds.	Maunds	2 75	3.50
Kerosene	1 Tin	Tin	5 00	6 25
House Rent		House	15 00	25 00

(Ans. 129 1)

15. Following is the expenditure of Shri Ashant Sharma's Family for the different articles consumed in the family. Construct the cost of living index number for 1956 on the basis of 1955, using the family Budget method

Commodity	Quantity consumed in 1956.	Unit	Price in 1925	Price in 1956.
			Rs	Rs.
Bajra	8 Maunds	Per maund	12 00	16 00
Moth	5 "	"	8 00	10 00
Wheat	1 "	"	13 30	16.50
Jawar	3 "	"	10 00	12 50
Moong	3 "	"	8 00	12 00
Ghee	4 Seer	Per Seer	5 00	6.00
Gur	1 Maund	Maund	12 00	15 00
Salt	10 Seer	"	2 00	2,50
Chillies	15 "	"	60 00	80 00
Clothing	40 Yards	Yard	1.50	2 25
Fuel	10 Maunds	Maund	2 50	3 00
Electricity	25 Unit	Unit	·50	·50
House Rent		Per House	15 00	10 00

(Ans 129.4)

16 Compute the cost of living index number for 1955, on the basis of 1946 level of prices, from the following data, using the Family Budget Method —

Article	Quantity consumed in 1946	Unit	Price 1946	Price 1955
			Rs.	Rs.
Rice ..	5 mds.	per md.	12	16
Whea ...	1 md.	" "	10	20
Barley ...	5 mds	" "	8	10
Gram ...	1 md.	" "	6	12
Arhar	5 mds.	" "	8	12
Other pulses .	2 mds.	" "	6	8
Gur ...	2 mds.	" "	5	10
Salt ...	12.5 seers	" "	8	10
Oil ...	24 seers	" "	40	50
Ghee ..	4 seers	" seer	2 5	4
Cloth .	40 yards	" yard	5	1
Firewood ...	10 mds.	" md.	1	1 6
Kerosene ...	1 tin	" tin	4	7
House ..	1 unit	" unit	24	30

(B Com Raj 1957)

Ans :—146

17. From the data given below calculate the cost of living index number for the current year by the Aggregate Expenditure and the Family Budget methods separately,

Article	Quantity consumed in base year.	Unit	Price in base year Rs.	Price in current year. Rs
Rice	5 Mds	Maund	6	9
Millets	5 „	„	4	5
Wheat	1 „	„	5	10
Gram	1 „	„	3	6
Arhar	$\frac{1}{2}$ „	„	4	6
Other Pulses	2 „	„	3	4
Ghee	4 Seers	Seer	1 25	2
Gur	2 Mds.	Maund	2.50	5
Salt	$12\frac{1}{2}$ Seer	„	4	5
Oil	24 „	„	20	25
Clothing	40 Yards	Yard	0 25	0.5
Fire wood	10 Mds	Maund	0.50	0 8
Kerosene	1 Tin	Tin	4	6
House rent	.	House	12	15

(B Com, 1949, M. A Pub, 1951)

Ans 146 by both the methods.

18 Prepare cost of living index numbers from the following information for 1948 and 1949 taking the average price of 1947 as base

	Group	1947 Rs.	1948 Rs.	1949 Rs
(i)	Food per maund	20 00	24 00	21 00
(ii)	Cloth per yard	1 25	1.50	1 00
(iii)	Rent per room	5 00	8 00	8 00
(iv)	Miscellaneous	2 00	2 25	2 12

Give weights to the four groups as 4, 3, 2, 1, respectively.

(B Com. Agra 1951)

(Ans 1 N for 1948, 127.25; for 1949, 108 62)

19 An enquiry into the budgets of the middle class families in a city in India gave the following information —

Expenses on	Food	Rent	Clothing	Fuel	Misc.
	35%	15%	20%	10%	20%
Prices 1948 Rs	150	30	75	25	40
Prices 1949 Rs.	145	30	65	23	45

What changes in the cost of living figures of 1949 as compared to 1948 are seen ? (B. Com Luck)

(Ans —97 95. A fall of 2 05 is seen)

20. From the following data, construct the Ideal index number

	Rice		Wheat		Jawar	
Year	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
1947	9 3	100	6 4	11	5 1	5
1954	4 5	90	3.7	10	2.7	3

Price and quantities are given in arbitrary units (Index No is 49 1)

21 Prove using the following data that the factor Reversal Test is satisfied by the Fisher's Ideal Formula for index numbers

Commodity	Base year Price	Base year Quantity	Current year Price	Current year Quantity
A	6	50	10	56
B	2	100	2	120
C	4	60	6	60
D	10	30	12	24
E	8	40	12	36

(M Com Alld. 1945)

Ans. 139 5

22.

	Prices		Quantity	
Crops	Base year	1956.	Base year	1956
1	12	20	50	126
2	10	12	100	80
3	14	15	60	70
4	16	18	30	50
5	18	20	40	40
6	22	15	70	60
7	20	16	90	100
8	15	18	80	80

Find the index numbers for 1956 by (i) base year weighting, (ii) Current year weighting and (iii) Fisher's Ideal Formula.

Ans. (i) 102.3 (ii) 108 5 (iii) 105.3

23 Prepare Index Number for 1904 on the basis of 1902, where the following information is given :—

Year	Article I		Article II		Article III	
	Price	Quantity	Price	Quantity	Price	Quantity
1902	5	10	8	6	6	4
1904	5	12	7	7	5	3

(M. Com., Agra, 1947)

(Ans I, N 83 6)

24 Apply Fisher's Ideal Formula and Construct an index number from the data given below •

Commodity	Base Year Price	Base Year Quantity	Current Year Price	Current Year Quantity
A	8	50	12	60
B	3	20	4	40
C	10	24	15	30
D	5	100	4	200

What are the drawbacks of Fisher's Ideal Formula ?

(B Com Raj 1962)

Ans. 116

25 The following table gives the annual income of a teacher and the general Index number of Prices during the last nine years —

Year —	1939	1940	1941	1942	1943	1944	1945	1946	1947
Income in Rs	360	420	500	550	600	640	680	720	750
General Index Number	100	104	115	160	280	290	300	320	330

Prepare an index number to show the changes in the real income of the teacher and discuss the effects of a rise in the general level of prices on his real income.

(Ans.)—Real wage index No. 100, 112, 121, 95, 59, 61, 63, 62, 63 (Fall in the real wage index number and has an adverse effect.)

26. The annual income of an accountant and the general price index nos. are given below :—

Year	Income Rs.	General Index
1947	3600	100
1948	4200	104
1949	5000	115
1950	5500	160
1951	6000	280
1952	6400	290
1953	6800	300
1954	7200	320
1955	7500	330

Prepare index No. to show the changes in the real income of the accountant.

Hint :— first find the real income, and then prepare the required index nos.

27 The following are the index numbers of prices based on 1945 Shift the base from 1945 to 1950

Year :—	1945	1946	1947	1948	1949	1950	1951	1952	1953	1954	1955	1956
Index Numbers.	100	110	120	200	320	400	410	400	380	370	350	360

(Ans. I N. based on 1950—25, 27.5, 30, 50, 80, 100, 102.5, 100 95, 92.5, 87.5, 90)

28. Index Number A was started in 1914 and discontinued in 1939 in which year another index number B was started which continues upto date From the following data splice index number B to index number A so that a continuous series of index numbers from 1914 upto date may be available

Year	Index A	Index B
1914	100	
...		
...		
1938	180	
1939	200	100
1940		150
1941		160
1942		180
1943		200

29 In 1920 a Statistical Bureau started an index of production based on 1914 with the following results—

Year	1914 (Base)	1920	1929
Index	100	120	200

In 1930 the Bureau reconstructed the Index on yet another plan with base 1929 —

Year	1929 (base)	1935
Index	100	150

In 1939 the Bureau again reconstructed the Index on yet another plan with base 1935 —

Year	1935 (Base)	1939
Index	100	120

It is required to splice these three series together so as to give a continuous series with base 1935 Draw up a working table in parallel columns and show the results for 1914, 1920, 1929, 1935 and 1939.

(Ans. 33, 40, 67, 100, 120)

30 The following table gives the wages by taking into account the rise in the cost of living

Year	Wages	Cost of living Index Numbers based on 1939
1939	65	100
1940	70	110
1941	75	120
1942	80	130
1943	90	150
1944	100	200
1945	120	250
1946	150	350

Find the real wages.

(Ans Deflated wages 65, 63.6, 62 5, 61.5, 60, 50, 48, 42 9)

31 On the basis of the figures given in the following table, find the consumer Price Index—Miscellaneous Group—for July 1961.

Article	Weight	Base Price	Average price for July 1961
Barber	21	0 052	0 130
Washerman	23	0 036	0·180
Soap	12	0 281	1·124
Betelnut	21	0·495	4·950
Bins	23	0 031	0 155

(M Com Raj 1961)
Ans. 540·5

32. What is cost of Living Index Number ? Is this index an average ? If so what kind of average is it ?

The constituent parts of the cost of Living Index of working class at a particular period were Food Index—360, Cloth Index—440, Fuel Index—400, Rent Index—120, and Miscellaneous Index—150 The weights are 56, 8, 4, 8 and 24 respectively It is proposed to fix the D A. to workers in such a way as to compensate fully the rise in prices of food What should be the D A expressed as a percentage of the wage ?

(R. A S. 1958)
Ans. 145 6 percent

33 In a working class budget enquiry in towns A and B it was found in 1939 that an average working class family's expenditure on 'food' and 'other items' was as follows :—

	Town A	Town B
'Food'	64%	50%
'Other items'	36%	50%

In 1947 the working class cost of living index stood at 279 for town A and 265 for town B (Base Year 1939 = 100) It was known that the rise in the prices of all articles consumed by the working classes was the same for A and B What was the 1947 index for (a) Food and (b) other items ?

(R. A. S. 1958)
Ans. (a) 315, (b) 215

34 In 1962 the average price of a commodity was 20% more than in 1961, 20% less than in 1960 and 50% more than in 1963. Compute price relatives

(a) Using 1961 as base
(b) With 1962 as base
(c) With 1960–61 as base (average)

Ans. (a) 150, 100, 120 and 80
(b) 125, 83.3, 100 and 66.7
(c) 120, 80, 96 and 64

35 (a) What is meant by 'Time Reversal Test'? What index numbers satisfy this test?

(b) Calculate index number for 1960 taking 1955 as base from the following data —

Commodity	Unit	Price per unit in 1955 R nP	Quantity Consumed in 1955	Price per unit in 1960 Rs nP.
A	Per md.	16 00	10 mds	18 00
B	„ „	12 00	2 „	13 50
C	„ „	8 00	20 seer	9 00
D	„ „	2 00	60 yards	2 50
E	„ „	6 00	30 Seers	8 00

(B Com, Raj, 1963)

Ans 123 26

36 Calculate the index number of prices for 1962 on the basis of 1961 from the data given below —

Commoditiss	Weights	Price per Unit in 1961 Rs	Price per Unit in 1962 Rs.
Rice	40	16 00	20 00
Wheat	25	40 00	60 00
Linseed	5	0.50	00 50
Gur	20	5 125	6 25
Tobacco	10	2 00	1 50

(II Year T D C. Raj, 1963)

Ans —Index No 138 39

37 The following table gives group index numbers and their weights relating to family budgets of an average Indian labourer. Prepare the cost of living index number.

Group	Index No	Weights
1 Food	352	48
2 Lighting and Fuel	220	10
3 Clothing	230	8
4. Rent	160	12
5 Miscellaneous	190	15

(B. Com Agra, 1957, Banaras, 1947, Lucknow, 1957)

Ans—Index No. 276 4

38. Prepare Index number of prices for three years with average price as base—

Year	Wheat	Cotton	Oil
First Year	4	2	2
Second Year	3	1 5	1 25
Third Year	2.5	1	75

(B. Com, Saugar, 1958)

Ans—Index Nos. 67 1, 108.37, 124 67.

39 From the following data of commodity prices in 1951 and 1955 compute the index number for 1955 with 1951 as base

Commodity	Unit	Prices	
		1951 Rs	1955 Rs
A	Per maund	100	100
B	,, ,,	10	9
C	,, Seer	5	4
D	,, ,,	4	2
E	,, chhatak	1	1
F	,, Yard	2	2 5
G	,, Gallon	3	3 25

(B Com , Jabalpur, 1962)

Ans Index No 93 3

40 An average family of Industrial workers in a certain town consumed during August 1960, 1 5 maunds of foodgrains, 10 yards of cloth, 2 maunds fuel, one tin of Kerosene oil and paid Rs 25 as house rent Foodgrains then sold at an average price of Rs 10 per maund, cloth at Rs 75 per yard and fuel at Rs 3 per maund while a tin of Kerosene at Rs, 8 By August 1963, the average price of foodgrains and cloth had risen to two times, fuel rose to Rs 5 per maund and house rent to Rs 30 The solitary exception was Kerosene whose price fell by Rs 50 per tin

Express in quantitative terms the rise that took place in the cost of living of industrial workers in the given town in August, 1963, as compared with August, 1960 making clear your method of approach

(Ans—Index No 158 54)

अध्याय १३

METHODS OF DISPLAYING DATA

अ. सामग्री को चित्रों द्वारा प्रस्तुत करना

A-(Diagrammatic Representation of data)

गत अध्यायों में सामग्री के संकलन, सारणीयन तथा पारस्परिक तुलना करने की रीतियों पर प्रकाश डाला गया है। तुलना कार्य मौखिक रूप में तो अंकों द्वारा किया ही जाता है परन्तु व्यावहारिक रूप में अंकों द्वारा तुलना उतनी स्पष्ट एवं बोधगम्य नहीं होती जितनी कि चित्रों द्वारा हो सकती है। आँखों के माध्यम से मस्तिष्क किसी भी तथ्य को शीघ्र ग्रहण करता है, चित्र आँखों को अधिक प्रिय लगते हैं तथा बुद्धि पर कम भार डालते हैं। संख्याओं की लम्बी तालिकाएं मस्तिष्क के लिये भार-स्वरूप होती हैं परन्तु चित्र, तथ्यों को शीघ्र-ग्राह्य एवं मनोरंजक बनाकर दृष्टिमात्र से ही पूरी सामग्री का महत्व समझने में सहायक होते हैं। चित्रों का महत्व नीचे दिया जा रहा है।

चित्रों द्वारा सामग्री प्रस्तुत करने का महत्व

[1] आकर्षक एवं प्रभावोत्पादक . चित्रों में यह विशेषता होती है कि वह प्रत्येक व्यक्ति का ध्यान अपनी ओर आकर्षित कर लेते हैं। संख्याओं के दो चार पृष्ठ पढ़ना तथा उनमें से बहुत सी संख्याएं याद रखने का कार्य बहुत थका देने वाला होता है परन्तु चित्रों के द्वारा बहुधा अनेकों बातें मानस पटल पर स्थाई रूप से अंकित हो जाती हैं। किन्हीं पांच देशों की किसी वस्तु की उत्पत्ति के अङ्कों को समय पाकर भूला जा सकता है परन्तु बहुत समय बीतने पर भी किस देश की उत्पत्ति का चित्र सबसे बड़ा या छोटा था, याद रहता है।

[2] अधिक बोधगम्य ' चित्रों द्वारा प्रस्तुत की गई सामग्री अधिक सरल एवं बोधगम्य हो जाती है। किसी सामान्य बुद्धि के व्यक्ति को यह बतलाया जाय कि अ नगर पालिका की वार्षिक आय 25,000 रु० तथा ब नगरपालिका की वार्षिक आय 1 लाख रु० है तो वह दोनों की आय के अन्तर सरलता से नहीं समझ सकेगा, परन्तु दोनों के दो चित्र बना दिए जाएं तो वह चित्र देखकर समझ जायगा कि ब नगरपालिका से व की आय चार गुनी है।

[3] तुलना अधिक सरल बहुत से अंकों की तुलना करनी हो तो उनके चित्र बनाकर प्रस्तुत करने से पाठक को यह तत्काल ज्ञात हो जाता है कि कौन से मद अधिक महत्वपूर्ण हैं तथा कौन से कम। अंकों से उन यह जानकारी इतनी शीघ्र नहीं मिल सकती।

[4] समय की बचत चित्रों द्वारा सामग्री के विभिन्न तथ्यों का महत्व देखते स्पष्ट हो जाता है और परिणाम निकालने के लिए विशेष अध्ययन अथवा आवश्यकता नहीं पड़ती है।

[5] सर्वोपयोगी चित्रों द्वारा सभी शास्त्रों मे विभिन्न सिद्धान्तो का प्रतिपादन किया जा सकता है तथा उन जटिल सिद्धान्तो को समझने मे सहायता मिलती है। अर्थशास्त्र मे पारिवारिक आय-व्ययक, उपभोक्ता की बचत आदि, भूगोल अथवा कृषिशास्त्र मे उत्पत्ति की मात्रा आदि चित्रो के द्वारा दिखलाने से सहज ही समझ मे आ जाते हैं। भौतिक तथा रसायन विज्ञानो मे भी चित्रो का सहारा प्राय- प्रत्येक सिद्धान्त के प्रतिपादन मे लेना पड़ता है।

उपरोक्त उपयोगिताओ के कारण ही चित्रों का प्रयोग प्राय सभी अध्ययन क्षेत्रो मे किया जाता है। परन्तु यह स्मरण रखना चाहिए कि चित्रो का प्रयोग वहीं करना उचित है जहा सामग्री सामान्य जनता के लिए प्रस्तुत की जानी हो क्योकि चित्रो मे सामग्री का केवल तुलनात्मक एव अनुमानित रूप ही प्रस्तुत किया जाता है। किसी गहन अध्ययन कर्त्ता अथवा शोध कार्यकर्त्ता के लिए चित्र का महत्व नगण्य है क्योकि उसे सम्पूर्ण शुद्ध तथा वास्तविक अङ्क चाहिए। इसके अतिरिक्त यह भी ध्यान रखना चाहिये कि एक या दो तथ्यो के लिए चित्रो का प्रयोग अधिक उपयोगी नही है। केवल एक चित्र किसी भी बात को प्रकट नही कर सकता अत अङ्को की सख्या अधिक होने पर ही चित्रों का प्रयोग करना चाहिए।

चित्र बनाने सम्बन्धी नियम

चित्रो द्वारा सामग्री प्रस्तुत करने का उद्देश्य अङ्कों मे किसी गुण की वृद्धि करना नहीं होता बल्कि अको को अधिक सरल एव सुन्दर ढग से प्रस्तुत करना होता है। चित्र कोई बात सिद्ध नही करते बल्कि वह तो लक्ष्य प्राप्ति के माध्यम हैं जबकि लक्ष्य तुलनात्मक हो।

चित्र बनाने के लिए कुछ विशेष बातो का ध्यान रखना चाहिये ताकि कार्य का वास्तविक उद्देश्य सिद्ध हो सके। सर्व प्रथम जिस कागज पर चित्र खैंचना है उसका आकार देखना चाहिए और उसके अनुसार ही चित्र का माप (Scale) निर्धारित करना चाहिए ताकि चित्र बनाने के बाद भी इतना स्थान बच जाय कि उसके चारो ओर सीमा रेखा खैंची जा सके यदि एक ही चित्र मे कई आकार (Figures) बनाने हैं तो वह सब एक ही माप पर आधारित होने चाहियें ताकि उनकी पारस्परिक तुलना की जा सके अन्यथा चित्र बनाने का कोई लाभ नही।

चित्र बनाते समय यह विशेष ध्यान रखना चाहिये कि चित्र बहुत सुन्दर एव स्पष्ट हो। अधिक महत्वपूर्ण भागो को गहरी स्याही से अङ्कित करना चाहिए और भिन्न तथ्यो के लिए भिन्न भिन्न रगो की स्याही का प्रयोग करना चाहिये या भिन्न प्रकार के चिन्ह बनाने चाहिए।

चित्र का स्वय-स्पष्ट शीर्षक (Heading) भी देना आवश्यक है जो चित्र के ऊपर सुन्दर मोटे अक्षरो मे लिखना चाहिए। इसके अतिरिक्त चित्र से सम्बन्धित अङ्को को भी चित्र के नीचे, बाई ओर अथवा चित्र के अन्दर जहा भी वह सुन्दरता से इस भाति अङ्कित किये जा सकें कि चित्र भद्दा न लगे, लिख देना चाहिये।
सक्षेप में चित्र स्वय-स्पष्ट, सुन्दर एव आकर्षक तथा उद्देश्य-पूरक होना चाहिए

उपरोक्त सब बातों को ध्यान में रखते हुए एक अच्छे चित्र में निम्न विशेषताएं होनी चाहिए।

अच्छे चित्र की विशेषताएं —

(1) चित्र कागज के आकार के अनुकूल होना चाहिए ताकि सारा विवरण उसमें बिना किसी कठिनाई के आ जाय। अधिक बड़ा चित्र भद्दा तथा अधिक छोटा चित्र अनुपयुक्त लगता है।

(2) चित्र का शीर्षक उपयुक्त तथा यथासम्भव छोटा परन्तु स्वयं स्पष्ट हो। यदि शीर्षक अस्पष्ट एवं अधूरा होगा तो अङ्कों को समझने में कठिनाई होगी और चित्र बनाने का उद्देश्य सिद्ध नहीं होगा।

(3) चित्र में अधिक महत्वपूर्ण बातों को गहरा तथा उभार कर दिखलाना चाहिये।

(4) चित्र में प्रयुक्त किया माप उपयुक्त एवं सब आकारों के लिए समान होना चाहिए अन्यथा तुलना करना असम्भव होगा।

(5) चित्र में सम्बन्धित अङ्कों को यथास्थान दिखला देना चाहिए और आवश्यक टिप्पणियां भी दे देनी चाहिए ताकि कोई बात उलझी हुई न रहे।

(6) चित्र में भरे रंग उज्ज्वल, स्पष्ट एवं विभिन्न तथ्यों को अलग अलग दिखलाने वाले हों। इन रंगों का विश्लेषण चित्र के नीचे सदर्भ (Reference) में दे देना चाहिए।

(7) चित्र में सब तथ्यों का समावेश होना चाहिए ताकि तुलना में किसी प्रकार की कमी न रह सके।

(8) चित्र स्वच्छ एवं सुन्दर होने चाहियें।

चित्रों के प्रकार —

साधारणतया एक ही तथ्य-समूह को कई प्रकार से दिखलाया जा सकता है परन्तु सदा इस बात का ध्यान रखने की आवश्यकता है कि सामग्री के सब भागों को सुन्दरतम ढंग से प्रस्तुत कर सकें। तथ्यों को निम्न प्रकार के चित्रों द्वारा दिखलाया जा सकता है।

(1) विमा चित्र (Dimensional Diagrams)

(2) रेखा चित्र (Graphs)

यहां हम केवल विमा चित्रों का ही वर्णन करेंगे, रेखा चित्रों का वर्णन अगले अध्याय में किया जायगा।

विमा चित्र कई प्रकार के हो सकते हैं —

(1) एक विमा चित्र (One Dimensional Diagrams)-जिसमें साधारण रेखाएं तथा दंड चित्र सम्मिलित हैं। इनकी लम्बाई अंकों के अनुपात में होती है।

(2) द्वि विमा चित्र (Two Dimensional Diagrams)-आयात, वृत्त ... वर्ग चित्र इस श्रेणी में आते हैं तथा इनका क्षेत्रफल अंकों के अनुपात में होता है।

(3) त्रिविमा चित्र (Three Dimensional Diagrams)-इन ... प्रथवा घनत्व अंकों के अनुपात में होता है। ब्लाक (Blocks) या ... है।

(4) चित्रलेख (Pictograms)—यह विभिन्न प्रकार के आकार के होते हैं जिनकी संख्या अंकों के अनुपात में होती है।

सरल दण्ड चित्र—(Simple Bar Diagrams)

दण्ड चित्र में अंकों के अनुपात में प्रत्येक अंक के लिये एक खड़ी या पड़ी रेखा खैंची जाती है। साधारणतया अङ्कों को बढ़ते या उतरते हुए क्रम में रख कर फिर दण्ड खैंचते हैं ताकि चित्र देखने में सुन्दर लगे। दण्ड चित्रों में चौड़ाई को कोई महत्व नहीं दिया जाता, प्रत्येक अंक के लिए एक दण्ड खेंचा जाता है जिसकी लम्बाई उस अंक का प्रतिनिधित्व करती है।

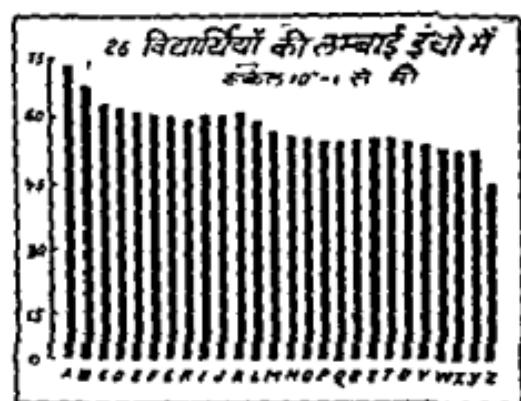
दण्ड खैंचने के लिए सबसे बड़े दण्ड की लम्बाई कागज के आकार के अनुसार निश्चित कर लेनी चाहिये और फिर उसी अनुपात में शेष सब अङ्कों से सम्बन्धित दण्डों की लम्बाई निश्चित की जायगी। यदि अङ्कों की संख्या बहुत अधिक है तब तो दण्ड केवल लम्बी रेखाओं के रूप में ही होंगे परन्तु यदि अङ्कों की संख्या कम है तो दण्डों को कुछ मोटाई भी दे देनी चाहिये। यह मोटाई सब अङ्कों के लिये समान होगी। ऐसा करने से दण्ड अधिक सुन्दर लगेंगे।

उपरोक्त बातों के अतिरिक्त दण्डों का उद्गम एक सरल रेखा पर होना चाहिये। अर्थात् वह एक आधार पर समानान्तर खड़े या पड़े रहने चाहियें नहीं तो तुलना का सारा ढाँचा ही नष्ट हो जायगा। प्रत्येक दण्ड के बीच में साधारणतया कुछ अन्तर दे दिया जाता है परन्तु ऐसा करना आवश्यक नहीं है, केवल सुविधा और सुन्दरता के लिए ही ऐसा किया जाता है क्योंकि यदि सब दण्ड एक दूसरे से मिले हुए रहेंगे तो केवल उनके शीर्ष ही दिखलाई देंगे और उनमें आकर्षण का अभाव रहेगा।

दण्ड चित्रों का प्रयोग साधारणतया सतत श्रेणियों (Continuous) में तथ्य-प्रदर्शन में नहीं किया जाता, यद्यपि कुछ विशेष परिस्थितियों में वैसा कर सकते हैं।

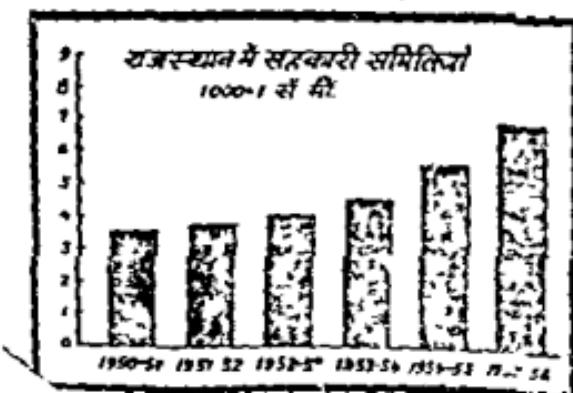
उदाहरण 13·1

नीचे 26 विद्यार्थियों की लम्बाई क्रम से दी गई है। चित्र द्वारा दिखलाइये —

विद्यार्थी	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
लम्बाई (इंचों में)	74	72	72	71	70	70	70	69	69	69	69	68	67
विद्यार्थी	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
लम्बाई (इंचों में)	67	67	66	66	66	66	66	66	65	65	64	64	61

उपरोक्त उदाहरण में दंडों की मोटाई इसलिए नहीं दी गई है कि उनकी संख्या अधिक है। सामान्य संख्या होने पर उनको उचित मोटाई दी जा सकती है।

राजस्थान में सहकारी समितियों के विकास सम्बन्धी अङ्क नीचे दिए गए हैं इन्हें चित्र द्वारा प्रदर्शित कीजिए।

वर्ष	सहकारी समितियां
1950-51	3,590
1951-52	3,884
1952-53	4,107
1953-54	4,506
1954-55	5,561
1955-56	6,916

राजस्थान में सहकारी समितियां
1000=1 सें मी

ऊपर दिये हुए उदाहरण मे 1000 सहकारी समितियों के लिए एक सेंटीमीटर की लम्बाई ली गई है। इस प्रकार दडो की लम्बाई क्रमश निम्नलिखित हुई

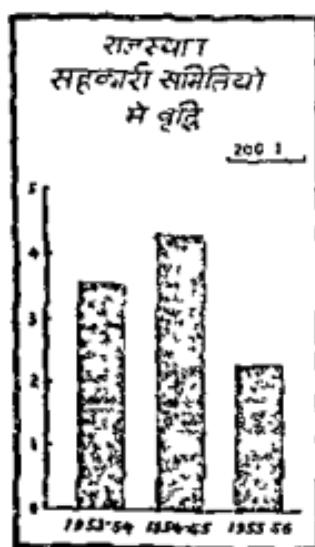
वर्ष	सहकारी समितिया	दड की लम्बाई
1950-51	3,590	3 6 सें मी
1951-52	3,894	3 9 ,, ,,
1952-53	4,109	4 1 ,, ,,
1953-54	4,506	4 5 ,, ,,
1954-55	5,561	5 6 ,, ,,
1955-56	6,916	6 9 ,, ,,

यह स्मरण रखना चाहिए कि चित्रों मे सदा अनुमानित अथवा निकटतम आकलन (calculation) का ही प्रयोग करना उचित है अन्यथा समय लगता है और चित्र मे विशेष अन्तर भी नही आता।

उदाहरण 13 3

राजस्थान मे तीन वर्षो मे सहकारी समितियो मे निम्न प्रकार वृद्धि हुई। चित्र द्वारा दिखलाइये।

वर्ष	समितियो मे वृद्धि
1953-54	712
1954-55	857
1955-56	429

इस प्रश्न में समानान्तर दडो का प्रयोग किया गया है।

द्विगुणीय दंड —

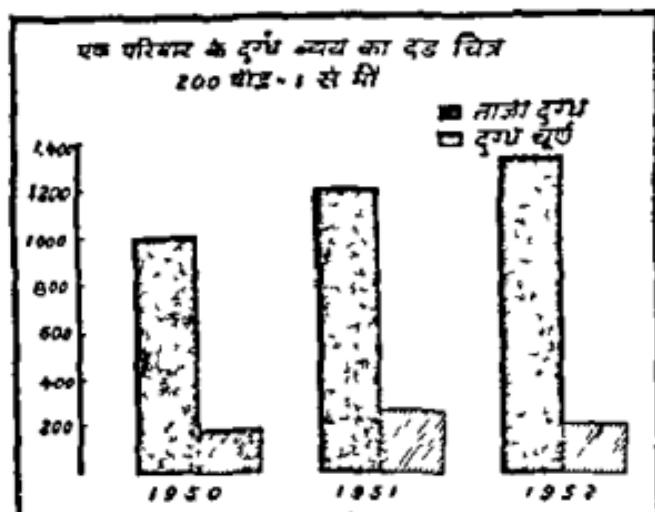
कभी कभी एक समय अथवा पक्ष से सम्बन्धित दो तथ्यो का प्रदर्शन चित्र द्वारा करना होता है।। ऐसी स्थिति मे साथ साथ दो दड खेंच दिये जाते हैं।

उदाहरण 13 4

निम्नलिखित सामग्री को चित्र द्वारा प्रस्तुत कीजिए —

एक परिवार का वार्षिक दुग्ध-व्यय

वर्ष	ताजा दूध (पौंडो मे)	दुग्ध चूर्ण (पौंडो मे)
1950	1,045	150
1951	1,250	220
1952	1,305	190

इसे द्विगुणीय अथवा दोहरे दंडो द्वारा प्रदर्शित किया जायगा ।

ऊपर दिये गये चित्र मे 200 पौंड दूध के लिए एक सेंटीमीटर की लम्बाई रखी गई है अत क्रमश 5 2, 6 25, 6 5 तथा 75, 1 1 एव .95 सेंटीमीटर है ।

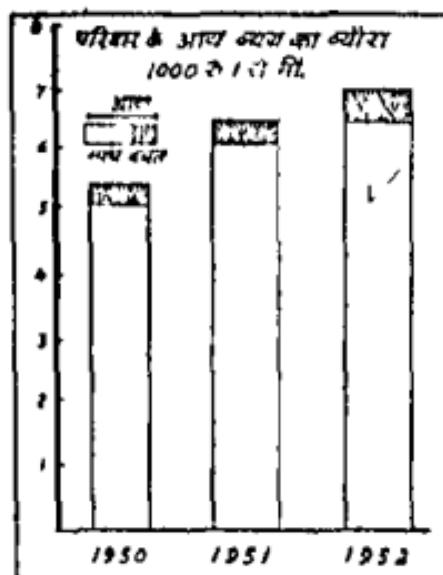
उपविभाजित दंड चित्र (Subdivided Bar diagrams)

यदि ऐसी सामग्री को चित्र रूप मे प्रस्तुत करना है जो विभिन्न मदो का योग है और विभिन्न मद भी दिये हुए है तो उपविभाजित दंड चित्रो का प्रयोग किया जाता है । इनके अन्तर्गत सम्पूर्ण योग का एक दंड बना कर उसमे से विभिन्न भाग काट लिए जाते है तथा उनमे अलग अलग रग भर दिये जाते हैं । नीचे अलग रगो का ब्योरा दे दिया जाता है जिसमे कौनसा रग कौनसी मद का प्रतिनिधित्व करता है यह ज्ञात हो जाता है ।

उदाहरण 13 5

एक परिवार के आय-व्यय का ब्योरा निम्नलिखित है

वर्ष	आय (रु० मे)	व्यय (रु० मे)	बचत (रु० मे)
1950	5,432	5,000	432
1951	6,500	6,100	400
1952	7,000	6,500	500

विभाजित दण्ड चित्र द्वारा दिखलाइये ।—

इस चित्र में 1000 रु. के लिए एक सेंटीमीटर लम्बाई दी गई है तथा आय के दंड खींचकर उसमें से व्यय काटे गये हैं। शेष बचत रह गई है।

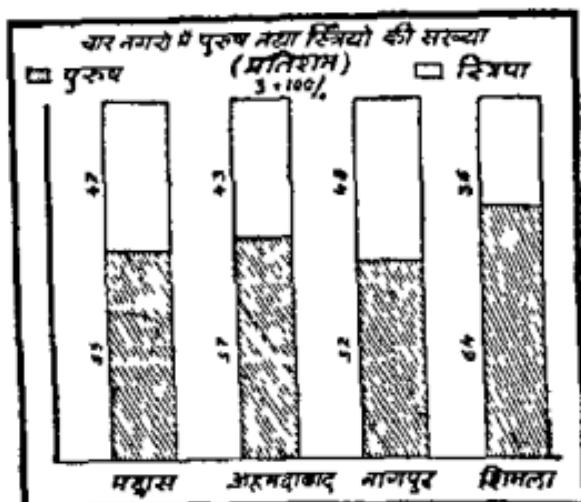
उपविभाजित दण्ड चित्रों में प्रतिशत का प्रयोग भी किया जाता है। जब किसी सामग्री के एक तत्व की दूसरी सामग्री के उसी तत्व से तुलना करनी हो और दोनों अङ्क-समूहों में बहुत अन्तर हो तो साधारण दण्ड चित्रों द्वारा तुलना करना सम्भव नहीं है।

उदाहरण 18.6

निम्न अङ्कों को चित्रांकित कीजिए तथा पुरुषों और स्त्रियों का तुलनात्मक अनुपात दिखलाइये।

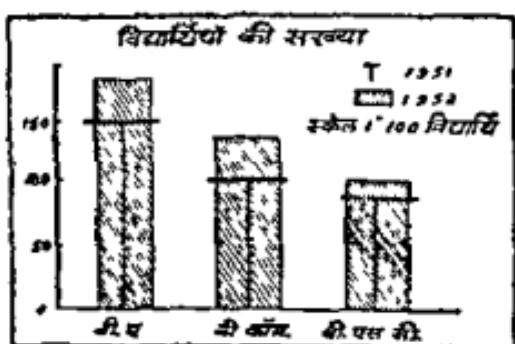
नगर	पुरुष	स्त्री	योग
मद्रास	7,37,013	6,79,043	14,16,056
अहमदाबाद	4,46,222	3,47,711	7,88,333
नागपुर	2,34,043	2,15,056	4,49,099
शिमला	29,735	16,415	46,150

उपरोक्त प्रश्न में पुरुषों और स्त्रियों की पारस्परिक तुलना दोनों समूहों में करनी है और चारों नगरों की जन संख्या बहुत भिन्न है। ऐसी स्थिति में एक ही लम्बाई के दण्ड बना कर उनमें पुरुषों तथा स्त्रियों की प्रतिशत दिखलानी उचित है। नीचे की तालिका में प्रतिशत निकाल कर दिखलाई गई है।

नगर	जनसंख्या	पुरुष		स्त्री	
		कुल संख्या	प्रतिशत	कुल संख्या	प्रतिशत
मद्रास	14,16,056	7,37,013	53	6,79,043	47
अहमदाबाद	7,88,333	4,46,222	57	3,47,711	43
नागपुर	4,49,099	2,34,043	52	2,15,056	48
शिमला	46,150	29,735	64	16,415	36

रेखा दड . कभी कभी दो अवधियो की सामग्री का दिग्दर्शन करना होता है जिसमे दूसरी अवधि मे प्रत्येक दिशा मे उन्नति अथवा वृद्धि हुई हो । ऐसी स्थिति मे दो बातें दिखलानी आवश्यक होती हैं, एक तो दोनो अवधियो की वास्तविक स्थिति दूसरे, दूसरी अवधि में पहली से कितनी उन्नति या वृद्धि हुई है। इसके लिए रेखा दड का प्रयोग किया जाता है जिसमे पहली अवधि के अको की सीमा दड के बीच में रेखा खेंच कर दिखलाई जाती है।

उदाहरण 13 7

एक कालेज मे विद्यार्थियो की सख्या निम्न थी।

कक्षा	1951	1952
बी० ए०	150	170
बी० काम०	100	125
बी० एस० सी०	80	100

कभी कभी एक ही चित्र में दो परिस्थितियो का दिग्दर्शन करना पडता है जैसे किसी कारखाने में एक वर्ष लाभ होता है तो दूसरे वर्ष हानि, तो ऐसी स्थिति में हानि को लाभ की विपरीत दिशा में अकित कर देते है।

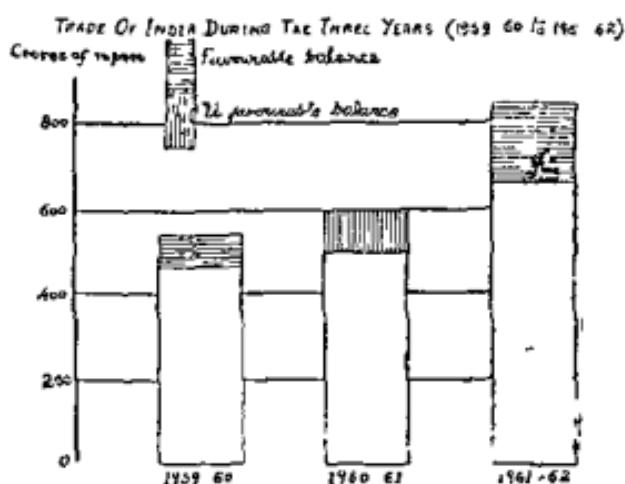
उदाहरण 13 8

Draw a suitable diagram from the following data —

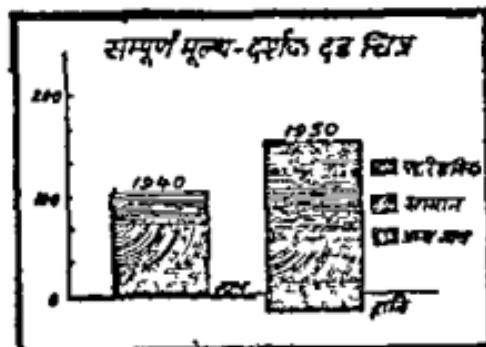
(in crores of rupees)

Year	Imports	Exports	Balance of Trade
1959–60	460	550	+ 90
1960–61	600	500	– 100
1961–62	650	850	+ 200

हल —

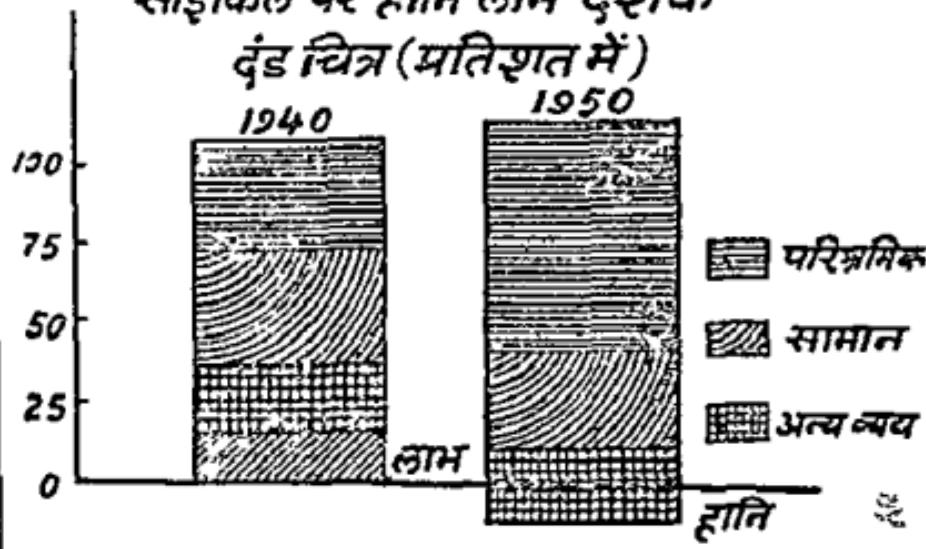
उपरोक्त आकडे उपविभाजित द ड चित्र (Sub-divided Bar Diagram) के द्वारा ठीक रूप से प्रदर्शित किए जा सकते हैं।

उदाहरण 13.9

साइकिल के एक कारखाने का आय व्यय व्यौरा (प्रति साइकिल)

विवरण	1940		1950	
	सम्पूर्ण राशि	प्रतिशत	सम्पूर्ण राशि	प्रतिशत
1. प्रति साइकिल विक्रय मूल्य	रु० 100	100	रु० 150	100
2. प्रति साइकिल लागत				
पारिश्रमिक	30	30	90	60 0
सामान	40	40	40	26 7
अन्य व्यय	20	20	30	20 0
योग	90	90	160	106 7
लाभ (+) हानि (–)	+ 10	+ 10	– 10	– 6.7

ऊपर दिये चित्र मे साइकिल की लागत के शुद्ध अङ्क दिखलाये गये हैं तथा विक्रय मूल्य की सम्पूर्ण राशि के दंड खींचे गये हैं। कभी कभी यह दंड प्रतिशत लागत का ही प्रदर्शन करते हैं। ऐसी स्थिति मे दोनो दंड, रेखा से ऊपर समान लम्बाई के होंगे। नीचे इसी उदाहरण को प्रतिशत के रूप मे दिया गया है।

उदाहरण 13 10

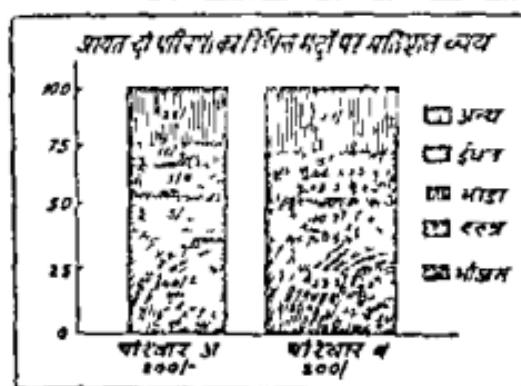
साइकिल पर हानि लाभ दर्शक
दंड चित्र (प्रतिशत में)

1940
1950
100
75
50
25
0
परिश्रमिक
सामान
अन्य व्यय
लाभ
हानि

द्विविमा चित्र या क्षेत्रफलीय चित्र हम ने दंड चित्रो की चौड़ाई अथवा मोटाई की ओर कोई ध्यान नहीं दिया था परन्तु अब चौड़ाई को भी महत्व देंगे। क्षेत्रफलीय चित्रो मे सबसे सरल आयत चित्र होते हैं। आयत के दो दिशाएं लम्बाई तथा चौड़ाई होती हैं और विभिन्न तथ्यो सम्बन्धी आयत बनाने मे उनके क्षेत्रफल का ध्यान रखना पड़ता है। प्रत्येक आयत एक विशेष सामग्री के क्षेत्रफल का प्रतिनिधित्व करता है। आयतों का प्रयोग वहीं उपयुक्त है जहाँ दो अथवा अधिक संख्याओं की तुलना करनी हो और प्रत्येक संख्या कई विभागो में बटी हुई हो।

सुविधा की दृष्टि से आयत की लम्बाई या चौडाई सब चित्रो मे एक सी रख लेते है ताकि उन मे तुलना भी सरलता से की जा सके। साधारणतया लम्बाई एक सी रखी जाती है और चौडाई अ को के महत्वानुसार रखी जाती है।

उदाहरण 13 11

निम्न तालिका में दिये हुए दो परिवारो के आय-व्यय को चित्र द्वारा दिखलाइये—

मद	परिवार अ		परिवार ब	
	व्यय	प्रतिशत	व्यय	प्रतिशत
	रु०		रु०	
1 भोजन	80	40	100	33 3
2 वस्त्र	30	15	50	16 7
3 भाडा	30	15	40	13 3
4 ईधन	10	5	15	5 0
5 अन्य	50	25	95	31 7
योग	200	100	300	100

प्रस्तुत चित्र मे आयतो की ऊचाई समान रखी गई है और चौडाई सम्पूर्ण व्यय के अनुपात मे। पहले आयत की चौडाई एक इच तथा दूसरे की $1\frac{1}{2}$ इच है क्योकि दोनो परिवारो के व्यय का अनुपात भी 1 $1\frac{1}{2}$ है। लम्बाई समान होने के कारण दोनो के क्षेत्रफल मे भी आवश्यक अनुपात ही रहेगा।

उदाहरण 13 12

Illustrate the following by a Suitable diagram —

		A	B
I–	Price per unit of a commodity	Rs 10	Rs 12
II–	Quantity sold	20	24
III–	Value of raw materials used	Rs 100	Rs 120
	Other expenses	Rs 60	Rs 96
	Profit	Rs 40	Rs 72

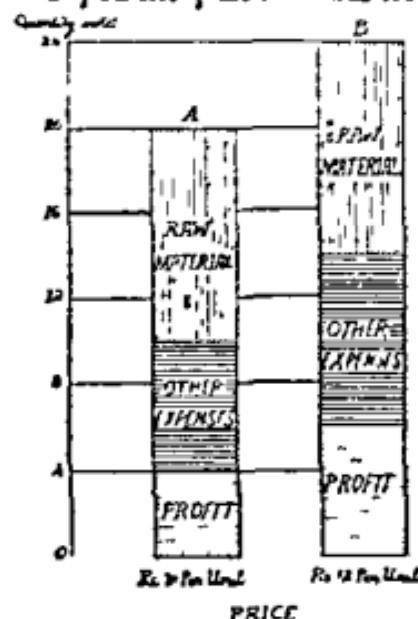
हल.—

उपरोक्त चित्र एक द्विविमा या क्षेत्रफलीय (area) चित्र बनेगा। दो आयत खींचिए जिनकी लम्बाई बेची हुई इकाइयों (20 24) के अनुपात में और चौड़ाई प्रत्येक इकाई के मूल्य (10 12) के अनुपात में रखिए। दोनों आयतों का क्षेत्रफल कुल इकाइयों के मूल्य (200 288) के अनुपात में होगा। उपरोक्त चित्र निरपेक्ष (absolute) रूप में बनाना ही उचित रहेगा क्योंकि सापेक्षिक (relative) रूप में चित्र बनाने में उपरोक्त तीन पहलू एक ही चित्र में नहीं बताए जा सकते।

Details of the cost of two commodities A and B

Quantity sold

	A	B
	RAW MATERIAL	RAW MATERIAL
	OTHER EXPENSES	OTHER EXPENSES
	PROFIT	PROFIT
	Rs 10 Per Unit	Rs 12 Per Unit

PRICE

उदाहरण 13 13

Draw a suitable diagram to represent the following information —

Factory	Wages Rs	Material Rs.	Other Costs Rs.	Profit Rs	Units produced
A	2,000	1,500	1,000	500	500
B	1,200	900	700	400	400

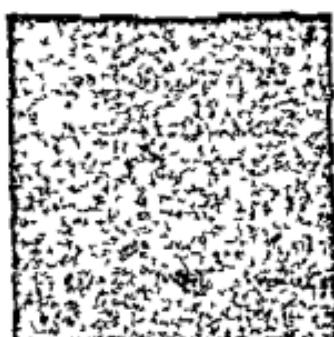
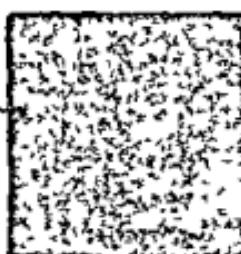
show also the cost and profit per unit.

हल.—

A फैक्टरी में प्रति इकाई लागत 9 रुपया है व लाभ 1 रुपया तथा B फैक्टरी में लागत 7 रुपया तथा लाभ 1 रुपया है। दो उप-विभाजित आयत खींचे गए हैं जिनकी लम्बाई प्रति इकाई के मूल्य (10 : 8) के अनुपात में है व चौड़ाई कुल निर्मित

उपरोक्त जनसंख्याओं में पहले अनुपात निकालना उचित रहेगा और फिर उनका वर्गमूल निकाल कर प्रत्येक वर्ग की भुजा ज्ञात करली जायगी। चूरू को $\frac{1}{4}$ मान कर अनुपात इस प्रकार आता है।

नगर	अनुपात	वर्गमूल
कलकत्ता	15 91	3 9
दिल्ली	7·44	2 7
जयपुर	1 81	1 4
चूरू	0 25	5

अब हम देखते है कि वर्गों की भुजाएं क्रमश 3.9, 2 7, 1 4 तथा 4 हैं। सेंटीमीटर के माप से अब चित्र इस प्रकार होंगे।

चार नगरों की जनसंख्या पैमाना 1 वर्ग सें मी = 1,60,188

उपरोक्त प्रश्न में भिन्न भिन्न मदों के लिए अलग अलग वर्ग ही दिए गए हैं परन्तु यदि सब मद एक ही सामग्री के भाग हों तो उन सबको एक वर्ग में ही दिखलाया जा सकता है। इसके लिए पहले सारे योग के लिए एक पैमाना निर्धारित कर लेते हैं फिर सब मदों की लम्बाई का अनुपात उस पैमाने से निकाल लेते हैं और अलग अलग वर्ग में से काट कर दिखला देते हैं। नीचे के उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी।

प्रकार वर्ग बनाने में संख्याओं का वर्गमूल लेकर भुजा ज्ञात की जाती है उसी प्रकार वृत्त बनाने में भी संख्याओं का वर्गमूल निकाला जाता है और वही वृत्त का अर्द्ध व्यास (Radius) होता है। वृत्त की विशेषता यह है कि यह खींचा बड़ी सरलता से जा सकता है और देखने में भी वर्ग से अधिक प्रभावशाली एवं सुन्दर होता है। नीचे के उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 13 16

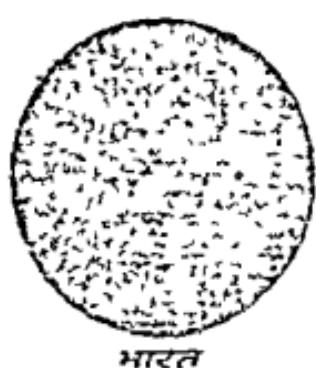
1952 में गेहूं के अन्तर्गत भूमि

देश	क्षेत्र (हैक्टरों में)
1 भारत	9,403
2 ईरान	2,642
3 जापान	721
4. लेबनान	68

इस प्रश्न में पहले क्षेत्र के वर्गमूल निकाले जायेंगे तथा बाद में वृत्तों के अर्ध व्यास निर्धारित किए जायेंगे।

वृत्तों के अर्द्ध व्यासों का आकलन

देश	क्षेत्र (हैक्टरों में)	वर्गमूल	अर्द्धव्यास (से. मी.)
1 भारत	9,403	96 6	2 42
2 ईरान	2,642	51 4	1 28
3 जापान	721	26.8	0 67
4 लेबनान	68	8 5	0 21

पैमाना— 1 वर्ग से० 515 (लगभग) हेक्टर

ऊपर के प्रश्न में क्षेत्र के वर्गमूल निकाल कर सब संख्याओं को 40 से भाग दे दिया गया है जिससे प्रत्येक वर्ग की आनुपातिक भुजाएं ज्ञात हो गई हैं, जो अन्तिम कालम में लिखी गई हैं। इनको आधार मानकर वृत्त खींचे गए हैं जो अलग अलग अंकों का प्रतिनिधित्व करते हैं। वृत्त चित्रों को पाई (Pie) चित्र भी कहते हैं।

... ... एक ही श्रेणी के मदों को जिनका योग भी दिया हो और मद

पृथक् पृथक् भी दिये हों, वृत्त भी एक ही बनाया जाता है। एक वृत्त में अलग अलग मदों के अंश काट दिये जाते हैं और उनको पृथक् चिन्हों अथवा रंगों से भर दिया जाता है।

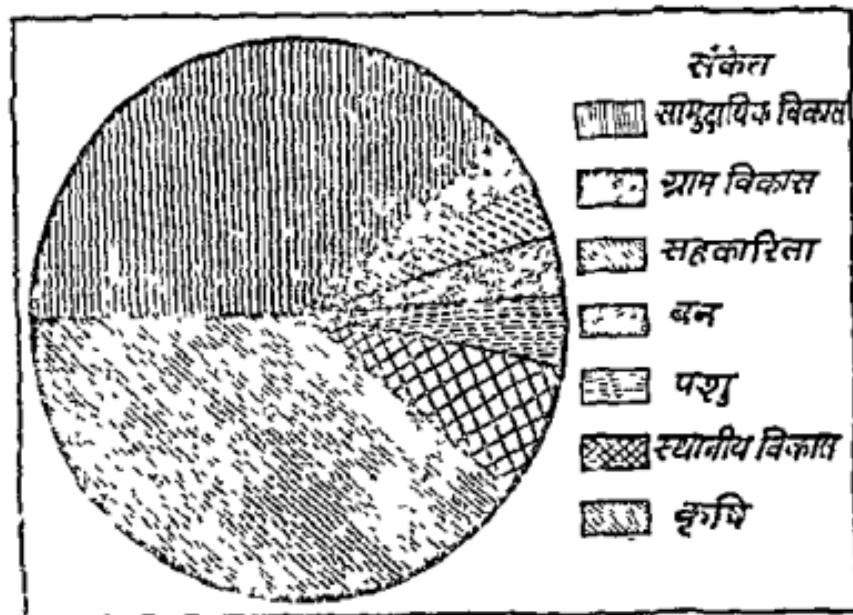
एक वृत्त में कुल 360 दर्जे के कोण होते हैं और सब्याओं के समस्त योग का 360 पर भाग लगाया जाता है और अलग अलग सख्या को इससे गुणा कर दिया जाता है। परिणामस्वरूप प्रत्येक सख्या का अलग कोण प्राप्त हो जाता है और इसे वृत्त में से काट दिया जाता है। इसी प्रकार सब मदों के कोण काट कर उनमें मद का नाम लिख दिया जाता है। इस प्रकार के चित्र को कोण (Angular) चित्र कहा जाता है।

उदाहरण 13 17

राजस्थान—प्रथम पंचवर्षीय योजना में कृषि तथा सामुदायिक विकास के लिए निश्चित धन-राशि।

मद	धन राशि (लाख रु में)	प्रतिशत	कोण
कृषि	215 00	38 5	139
पशु	28 30	5 1	18
वन	21 00	3 8	13
सहकारिता	10 00	1 8	7
ग्राम विकास	10 00	1 8	7
सामुदायिक विकास आदि	213 00	38 0	137
स्थानीय विकास कार्य	61 50	11 0	39
योग	558 80	100 0	360

अन्तिम कालम में (जो हमने जोड़ा है) प्रत्येक मद का कोण निकाल कर दिया गया है। कोण निकालने का तरीका इस प्रकार है। कृषि में 215 लाख रु० खर्च होंगे, कुल व्यय 558 8 लाख रु० है और वृत्त के कुल कोण 360° के हैं, अतः कृषि का अंश होगा $\frac{360}{558\ 8} \times 215 = 139^\circ$, इसी प्रकार पशु मद का कोण होगा, $\frac{360}{558\ 8} \times 28\ 3 = 18^\circ$, इसी प्रकार अन्य मदों के अंश निकाले गये हैं।

पैमाना—1 वर्ग इंच = 105.24 लाख रुपये

वृत्त चित्र (circles) का पैमाना scale निकालने की विधि —

हमने पिछली कक्षाओं में पढ़ा है कि वृत्त का क्षेत्र फल πr^2 के बराबर होता है, जिसमे

π (Pie) = 3 14 या $\frac{22}{7}$ (इसका मूल्य स्थिर होता है)

r = अर्धव्यास (radius)

उपरोक्त वृत्त मे r = 1 3 इंच है, अत वृत्त का क्षेत्रफल 3 14 × 1 3² =5 31 वर्ग इंच के बराबर हुआ।

यह वृत्त कुल धनराशि 558 80 लाख रुपयों का प्रतिनिधि है, अर्थात्

5 31 वर्ग इंच = 558 80 लाख रुपयों के

∴ 1 वर्ग इंच = 105 24 लाख रुपयों के

ऊपर दिये हुए चित्रों के अतिरिक्त अन्य चित्रों का भी यदाकदा प्रयोग होता है। इनमे त्रिविमा चित्र तथा चित्रलेख विशेष प्रसिद्ध हैं।

उदाहरण 13 18

Draw a single diagram to depict the following data

(in lacs)

	Self-supporting	Non-Earning dependents	Earning dependents	Total
Agricultural	711	1,469	310	2,490
Non - Agricultural	334	673	69	1,076
Total	1,045	2,142	379	3,566

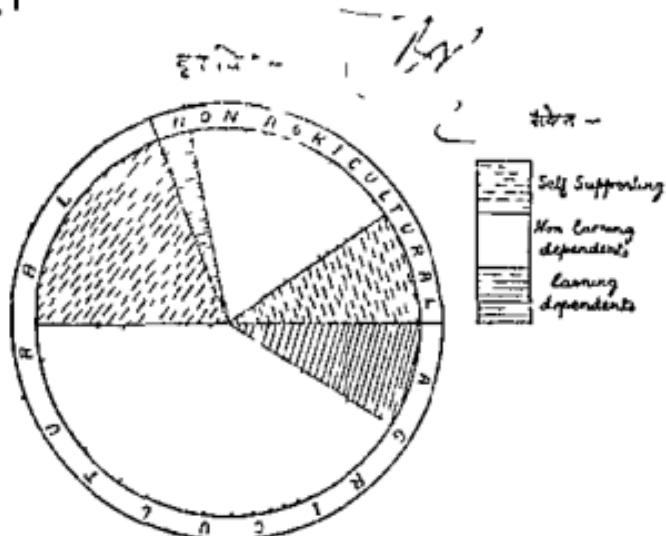
(B. Com Raj 1959)

हल —

कुल योग 3,566 लाख को 360 डिग्री के बराबर मानिए और प्रत्येक खंड की उसी अनुपात में डिग्री मालूम कर लीजिए। उदाहरणार्थ Agricultural Workers की डिग्री $\frac{2490}{3566}$ × 360=250° होगी और Non—Agricultural Workers की डिग्री $\frac{1076}{3566}$×360=110° होगी। इसी प्रकार 2,490 लाख को 250° के बराबर मानकर विविध उप–खंडों की डिग्री मालूम करली जावेगी। कुल खंडों के निम्न कोण होंगे।

(in degrees)

	self-supporting	Non-Earning dependents	Earning dependents	Total
Agricultural	70	148	32	250
Non-Agricultural	34	68	8	110
Total	104	216	40	360

अब किसी भी लम्बाई का अर्ध–व्यास मान कर एक वृत्त खेंचिए और उसमे उपरोक्त तालिका में दिये गये कोणों के अनुसार वृत्त का विभाजन निम्न प्रकार से से कर दीजिए।

POLAR DIAGRAM पोलर चित्र —

पोलर चित्र एक प्रकार से दण्ड चित्र का ही रूप है। इस चित्र का प्रयोग तब किया जाता है जब यह बताना हो कि दिये हुए घण्टो (hours) मे कोई घटना कितनी बार घटती है। आजकल इस प्रकार के चित्र का अधिक प्रयोग नही है।

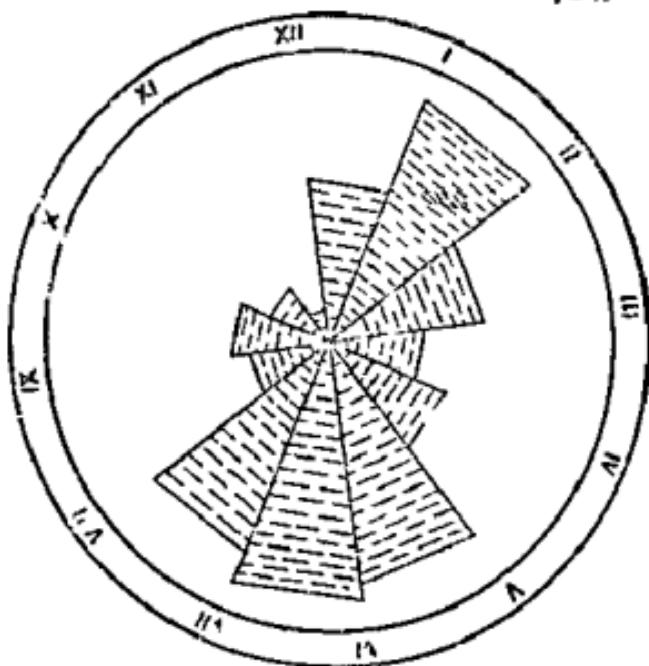
उदाहरण 13.19

फ्लोरा फाउन्टेन (Flora Fountain), बम्बई से विविध घण्टो मे जाने वाली कारो की संख्या निम्न है —

समय	कारो (cars) की सख्या
P. M.	
1 – 2	1,600
2 – 3 .	1,000
3 – 4	600
4 – 5 ..	800
5 – 6 ...	1,500
6 – 7 .	1,600
7 – 8	1,400
8 – 9	500
9 – 10	600
10 – 11	400
11 – 12	200
12 – 1 A. M. ..	1,000

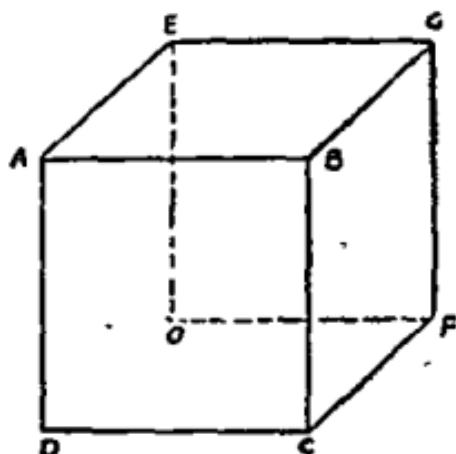
उपरोक्त आकडो को उचित चित्र बनाकर प्रस्तुत कीजिए ।

हल —

पोलर चित्र —　　　पैमाना —
१" – २,००० कार

त्रिविमा चित्र . त्रिविमा चित्रों में तीन भुजाए अर्थात् लम्बाई, चौडाई, मोटाई या गहराई होती है । इनकी विशेषता यह है कि जब तुलना के लिए प्रस्तुत सख्याओ मे अन्तर बहुत ही अधिक हो तो इन चित्रों का प्रयोग ही करना पडता है । क्योंकि इनमें अधिकतर घनमूल (cube root) निकालने पडते है ।

उदाहरणतया यदि 1 और 125 चित्रित करने हो तो दडचित्र, आयत, वृत्त अथवा वर्ग कोई भी काम नही दे सकते। घन (cubes) चित्र ही फिर काम देंगे। एक का घनमूल 1 ही आयगा और 125 का 5, अत 1 और 5 के अनुपात मे दो घनचित्र बन सकेंगे।

घनचित्र (cubes) बनाने की विधि

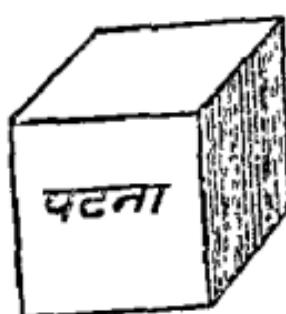
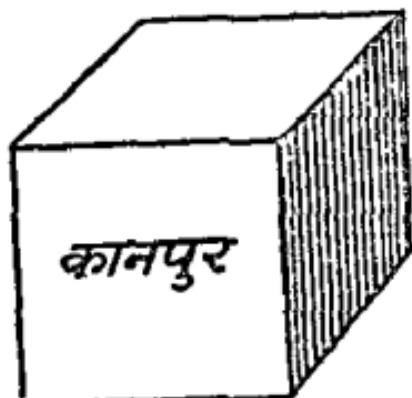
मान लीजिये आपको एक घनचित्र बनाना है जिसकी भुजा $1\frac{1}{2}$ इच है। सबसे पहले आप एक वर्ग बना लीजिये जिसकी भुजा $1\frac{1}{2}''$ हो। हमारा वर्ग ABCD तैयार हो गया।

वर्ग ABCD बनने के पश्चात् AB तथा BC रेखाओ को बिल्कुल बीच मे से काट कर आगे तक बढाया। दोनो रेखायें बिंदु O पर मिली, अब OE और OF को $1\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{2}$ इच काट लिया। OE और OF एक नये वर्ग की दो भुजाए हो गई। इस वर्ग को सम्पूर्ण करने से OEGF एक नया वर्ग बन गया। अब AE को, GB को और FC को मिला दिया। तत्पश्चात् EG और GF रेखाओ को गहरा कर दिया AEGFCD आवश्यक घन चित्र है। हल्की रेखाओ को रबड से मिटा देना चाहिए।

उदाहरण 13 20

1951 की जनगणना के अनुसार चारो नगरो की जनसख्या निम्नलिखित थी।

नगर	जनसख्या
कानपुर	6,36,443
पटना	2,83,479
शिलाग	53,756
बूदी	22 697

उपरोक्त प्रश्न के अंको को हम घनचित्र द्वारा प्रस्तुत करेंगे। चित्र बनाने से पूर्व जनसख्या के अंको के घनमूल निकालने होगे, फिर उनके लिए घनचित्रो की भुजा ज्ञात करनी होगी। नीचे की सारणी में यह आकलन किया गया है।

नगर	जनसख्या (दस हजारो मे)	घनमूल	भुजा (से० मी०)
कानपुर	63 6	3 98	4 0
पटना	28 3	3 03	3 0
शिलाग	5 5	1 71	1.7
बूदी	2 3	1 27	1 3

नगरो की जनसख्या—पैमाना, 1 घन से. मी = 10,000

घनो का बनाना बहुत कठिन है क्योकि पहले तो सख्याओ का घनमूल निकालना ही सरल नही है, फिर इनके बनाने की पद्धति भी अन्य चित्रो से जटिल है परन्तु अधिक विषम सख्याए होने पर इनका बनाना आवश्यक हो जाता है क्योकि घनमूल निकालने से सख्याओ का अन्तर बहुत कम हो जाता है। इसके अतिरिक्त घन देखने मे भी अन्य चित्रो से अधिक सुन्दर लगते हैं।

चित्रलेख (Pictograms) घनो के बनाने मे जो असुविधा होती है उसे ध्यान मे रखते हुए कभी कभी चित्रलेखो का भी सहारा लिया जाता है। चित्रलेख से तात्पर्य यह है कि जिस वस्तु या विषय सम्बन्धी अक हो उनका विवरण करने में उसका वास्तविक चित्र ही दे दिया जाता है। जैसे ऊपर के उदाहरण में चार नगरो की जनसख्या दी हुई है। चित्रलेख मे प्रत्येक नगर की जितनी सख्या है उतने उतने व्यक्तियो के चित्र अलग अलग बनाने चाहियें परन्तु व्यवहार में यह सम्भव नही है। अत एक व्यक्ति को कुछ हजार का या अन्य किसी सख्या का प्रतिनिधि मानकर चित्र खैचे जायेंगे। प्रस्तुत उदाहरण मे ही यदि 10,000 व्यक्तियो का एक प्रतिनिधि ले लें तो क्रमश. कानपुर के

लिये 61, पटना के लिये 29, शिलांग के लिये 5 तथा बूंदी के लिये 2 व्यक्तियों के चित्र खींचकर दिखलाए जायेंगे। इस प्रकार सामान्य से सामान्य व्यक्ति भी इन चित्रों को देखकर सहज ही विभिन्न मदों की तुलना कर सकता है।

उदाहरण 13.21

यदि भारत के दस प्रतिनिधि एक पंक्ति में खड़े किए जाएं तो पहले सात किसान, आठवां एक श्रमिक, नवां एक दुकानदार या क्लर्क तथा दसवां डाक्टर, व्यापारी, वकील या जमींदार होगा। इसे चित्रलेख द्वारा दिखलाइये।

मान चित्र— चित्र लेखों के अतिरिक्त मान चित्रों द्वारा भी किसी देश अथवा क्षेत्र में उत्पत्ति अथवा जनसंख्या आदि का वितरण दिखलाया जाता है। सर्व प्रथम सम्बन्धित क्षेत्र का मानचित्र बना लिया है और उसमें जो सामग्री भरनी है उसके पृथक् पृथक् मदों के चिन्ह निर्धारित कर लिये जाते हैं। वह चिन्ह आवश्यक स्थानों पर भर दिये जाते हैं। कभी कभी चिन्हों की संख्या का ध्यान रखना पड़ता है। इस बात का विशेष ध्यान रखना चाहिये कि चिन्ह स्पष्ट, सुबोधगम्य एवं सुरुचिपूर्ण हों और उनकी संख्या अनावश्यक रूप से अधिक नहीं भरनी पड़े अन्यथा चित्र की सुन्दरता में फर्क पड़ने की आशंका रहेगी। नीचे एक मान चित्र दिखलाया जा रहा है—

ऊपर दिये हुए भारत के चित्र मे शरद ऋतु मे होने वाली वर्षा की मात्रा और मानसून तथा वातचक्रीय हवाओ की दिशा दिखलाई गई है। चित्र से स्पष्ट पता चल सकता है कि वर्षा कहा अधिक, कहा कम और किधर से आने वाली हवाओं से होती है। भूगोल, अर्थशास्त्र तथा इतिहास आदि में प्राय. मानचित्रो का प्रयोग किया जाता है।

गेन्ट चार्ट (Gantt Chart)

गेन्ट चार्ट को प्रगति चार्ट (Progress Chart) या नियन्त्रण चार्ट (Control Chart) भी कहते हैं। इसका प्रयोग मुख्य रूप से नियोजित लक्ष्यो को प्राप्त लक्ष्यों से तुलना करने के लिए किया जाता है। कोई अधिकारी अपने कक्ष मे या उत्पादन-कक्ष मे इस प्रकार का चार्ट दीवार पर लगा सकता है। प्रत्येक विभाग मे प्रतिदिन —प्राप्ति की ओर कितनी प्रगति हो रही है, इसकी सूचना चार्ट से तुरन्त प्राप्त की जा सकती है।

गेन्ट चार्ट में एक कागज पर बराबर ऊचाई की खडी रेखायें खेंच ली जाती हैं। प्रथम कालम मे मशीन या विभाग का नाम लिखा जाता है। उससे अगले कालमो मे दिन या कार्य-काल अवधि अकित कर दी जाती है। प्रत्येक कालम को चार पाच खडी रेखाओ से विभाजित कर दिया जाता है। यदि काम में ५ खडी रेखाए खैंची गई हैं तो प्रत्येक उप-कालम २० प्रतिशत प्रगति को बताता है और चार रेखाए खैंची गई हैं तो २५ प्रतिशत प्रगति को। ज्यो ज्यो उत्पादन मे प्रगति होती जाती है, प्रत्येक विभाग के सामने पडी लाइन खैंची जाती है और उसे उत्पादन के अनुसार बढाया जाता है। साथ ही एक मोटी अन्य रग की पडी रेखा से उत्पादन का कुल योग (Cumulative total) भी बनाया जाता है, जैसे—

उदाहरण 13 22

मशीन सख्या	सोम	मगल	बुध	गुरु	शुक्र	शनि	कुल योग
1	100	60	80	40	60	क	340
2	60	80	100	80	म	—	320
3	80	60	100	60	40	वि	340

म–मरम्मत, क–कच्चे माल की कमी, वि–अन्य कारण

उपसंहार उपरोक्त विवरण में अनेकों प्रकार के चित्रों का वर्णन किया गया है। चित्र बनाने से पूर्व सदा यह विचार लेना उत्तम होगा कि कहां कौन सा चित्र अधिक उपयुक्त रहेगा। सामान्यतः दण्ड चित्र तथा वृत्तों का प्रयोग बहुत सरल है और सर्वत्र ही किया जा सकता है परन्तु कहीं कहीं परिस्थितियों के कारण आयत अथवा वर्ग ही उत्तम रहते हैं। चित्र वास्तव में तभी चित्र है जबकि वह स्वच्छ, सुन्दर एवं आकर्षक हो।

अगले अध्याय में लम्बी अवधि में होने वाले परिवर्तनों का वर्णन किया जायगा। लम्बी अवधि के लिए रेखा चित्र ही उपयुक्त रहते हैं, साधारण चित्रों का प्रयोग विशेष तथा स्थिर वातावरण के लिए ही उपयोगी है।

EXERCISE XIII

1 Point out the usefulness of diagrammatic representation of facts and explain the construction of any one of the different forms of diagrams you know.

(B. Com. Alld. 1945)

2. What precautions are necessary in drawing a good diagram? How would you avoid them?

3 What kind of statistical data are best represented by diagrams? Illustrate your answer with examples.

(B Com Agra 1937)

4 What are the objects of diagrammatic representation of figures? Explain the use of "bar" and "circle" diagrams. Draw a suitable diagram to show the comparative costs of production in two factories per unit, their total costs and total profits.

5. Show clearly the necessity and importance of diagrams in statistics What precautions should be taken in drawing a good diagrams (B. Com Agra 1955)

6 Give a brief description of the different kinds of diagrams generally used to represent statistical data

(B Com Agra 1954)

7. Diagrams do not add anything to the meaning of Statistics, but when drawn and studied intelligently they bring to view the salient characteristics of groups and series Discuss this statement describing briefly the various types of diagrams

(M A. Agra 1952)

8 Compare the relative advantages of presenting statistical data in the form of (a) tables, (b) diagrams, (c) graphs Illustrate your answer with suitable examples

(M. Com Agra 1953)

9 Write a note on the necessity and usefulness of diagrammatic representation of data

10 Write short notes on :

(a) Surface Diagrams, (b) Volume Diagrams, (c) Pie Diagrams, (d) Bar diagrams, (e) Two dimensional diagrams, (f) Polar diagrams, (g) Angular diagrams

11 The following table gives the Development Expenditure of the Central Government under the First Five year plan

Development Expenditure

	Head	Rupees (crores)
1	Transport and communication	409 47
2	Irrigation and power	265 90
3	Agriculture and community Development	186 34
4	Industry	146 71
5	Social services	106 36

Show the above figures by a suitable diagram

(Hint Use Bars)

12 The following table gives the number of students in a College in 1953 and 1954

Classes	Number in 1953	Number in 1954
B. A	150	200
B Com.	100	125

13. Show by suitable diagrams, the absolute as well as relative changes in the student population at the Colleges A and B in the different departments from 1940 to 1947.

Country	Birth Rate	Death Rate
Egypt	44	27
Canada	24	11
U S A	19	12
India	33	24
Japan	32	19
Germany	16	11
France	18	16
Irish Freestate	20	14
United Kingdom	16	12
Soviet Russia	40	18
Australia	20	9
Newzealand	18	8
Palestine	53	23
Sweden	15	12
Norway	17	11

Represent the above figures by a suitable diagram

(B Com , Luck 1950)

(Hint Use subdivided Bars or Double Bars)

17 Diagrammatically compare the following statistics of textile production and imports in India. What conclusions do you draw from the given figures ?

	In crores of yards	
	1913-14	1938-39
Mill-productien	116 4	426 9
Handloom production	106 8	112 0
Imports	319.7	64 7

(B Com Alld. 1946)

(Use double bars or Subdivided bars)

18 Draw suitable diagram to illustrate the following statistics relating to Birth rates per 1000 inhabitants in India

Period	Birth rates	Death rates
1921-25	32.7	26 6
1931-35	34 4	23 5
1941-45	32 2	22 0

(Hint Use subdivided bars)

19 Represent by a suitable diagram

Weekly consumption of Milk per head in England during the year 1938 —

Income per head per week	Fresh Milk	Condensed Milk
Upto 10 shillings	1 0	0 6
10 sillings to 15	2 0	0 5
15 „ to 20	2 4	0 5
20 „ to 30	2 8	0 4
30 „ to 40	4 0	0 4
Above 40 shillings	5 0	0 2

(B Com Raj 1953)

H ... by sub-divided bars or double bars

5. Show clearly the necessity and importance of diagrams in statistics What precautions should be taken in drawing a good diagrams (B Com Agra 1955)

6 Give a brief description of the different kinds of diagrams generally used to represent statistical data

(B Com Agra 1954)

7 Diagrams do not add anything to the meaning of Statistics, but when drawn and studied intelligently they bring to view the salient characteristics of groups and series Discuss this statement describing briefly the various types of diagrams

(M A Agra 1952)

8 Compare the relative advantages of presenting statistical data in the form of (a) tables, (b) diagrams, (c) graphs Illustrate your answer with suitable examples.

(M Com Agra 1953)

9 Write a note on the necessity and usefulness of diagrammatic representation of data

10 Write short notes on

(a) Surface Diagrams, (b) Volume Diagrams, (c) Pie Diagrams, (d) Bar diagrams, (e) Two dimensional diagrams, (f) Polar diagrams, (g) Angular diagrams

11 The following table gives the Development Expenditure of the Central Government under the First Five year plan

Development Expenditure

	Head	Rupees (crores)
1	Transport and communication	409 47
2	Irrigation and power	265 90
3	Agriculture and community Development	186 34
4	Industry	146 71
5	Social services	106 36

Show the above figures by a suitable diagram

(Hint Use Bars)

12 The following table gives the number of students in a College in 1953 and 1954

Classes	Number in 1953	Number in 1954
B. A	150	200
B Com.	100	125

13 Show by suitable diagrams, the absolute as well as relative changes in the student population at the Colleges A and B in the different departments from 1940 to 1947

	A		B	
	1940	1947	1940	1947
Arts	330	350	100	200
Sc ence	120	500	150	250
Commerce	200	650	130	150
Law	100	300	100	120

(B Com , Agra 1950)

(Hint use Bars)

14 Represent the following figures by a suitable diagram

Gross-income of a shoe manufacturer of Agra for the years 1948-52 composed of net-income plus manufacturing expenses —

Years	Gross income	Manufacturing expenses	Net income
in	thousand	rupees	.. ..
1948	12	5	7
1949	13	5	8
1950	26	6	20
1951	16	8	8
1952	27	12	15

(Hint—Show Bars showing net income above the line and manufacturing expenses below the line both joined)

15 Utilise the following data to present diagrammatically the relative increase in note circulation towards the end of 1945 in the different countries

Notes in circulation
(In millions of national currency unit)

Country	1939	end of 1945
Canada	233	1,129
U S A	7,598	28,507
Australia	57	200
U K	555	1,380
India	2,245	12,109

(M Com , Alld 1958)

(Hint —use double Bars)

16 The following table gives the birth rates and death rates of a few countries of the world during the year 1931

Country	Birth Rate	Death Rate
Egypt	44	27
Canada	24	11
U S A	19	12
India	33	24
Japan	32	19
Germany	16	11
France	18	16
Irish Freestate	20	14
United Kingdom	16	12
Soviet Russia	40	18
Australia	20	9
Newzealand	18	8
Palestine	53	23
Sweden	15	12
Norway	17	11

Represent the above figures by a suitable diagram

(B Com, Luck 1950)

(Hint Use subdivided Bars or Double Bars)

17 Diagrammatically compare the following statistics of textile production and imports in India What conclusions do you draw from the given figures ?

	In crores of yards	
	1913-14	1938-39
Mill-productien	116 4	426 9
Handloom production	106 8	112 0
Imports	319 7	64 7

(B Com Alld 1946)

(Use double bars or Subdivided bars)

18 Draw suitable diagram to illustrate the following statistics relating to Birth rates per 1000 inhabitants in India

Period	Birth rates	Death rates
1921-25	32.7	26 6
1931-35	34 4	23.5
1941-45	32 2	22 0

(Hint Use subdivided bars)

19 Represent by a suitable diagram

Weekly consumption of Milk per head in England during the year 1938 —

Income per head per week	Fresh Milk	Condensed Milk
Upto 10 shillings	1 0	0 6
10 sillings to 15	2 0	0 5
15 „ to 20	2 4	0.5
20 „ to 30	2.8	0 4
30 „ to 40	4 0	0 4
Above 40 shillings	5 0	0 2

(B Com Raj 1953)

Hint.—Show by sub-divided bars or double bars.

20. Represent the following data by means of a suitable diagram —

National Income by Industrial Origin (at current prices)

	Sector	in 100 Crore Rupees 1955-56	1959-60
1	Agriculture	45 6	62 5
2	Mining, Construction and Factory and small establishments	16 3	21 9
3	Trade, Transport and Banking	15 6	20 7
4	Arts, Profession Domestic Service, Govt Administration and House Property	15 5	19 4
	Net domestic product	93 0	124 5
	Net earned Income from abroad	0 0	− 0 2
	Net National Income	93 0	124.3

(B Com Raj 1962)

Hint Draw a Sub-Divided Percentage Bar Diagram

21 Draw a diagram to represent the following data

Cost of production of coal (per ton)	1924	1928
Wages ... (Rs.)	12 74	7 95
Other costs .	. 5 46	4 51
Royalties	0 56	0 50
Total	18 76	12 96
Selling price per ton	19 91	12 16
Profit or loss per ton	+ 1 15	-0'80

(M A. Agra 1940, B Com , Raj , 1954)

Hint. Use subdivided bars

22 Show the family budgets of the following two middle classes by means of a suitable diagram

Items	Family I Income Rs 200/- Actual expenses Rs	Percentage	Family II Income Rs. 300/- Actual expenses	Percentage
1 Food	80	40	100	33 3
2 Cloth	30	15	50	16 7
3. Rent	30	15	40	13.3
4 Fuel & Light	10	5	15	5 0
5. Miscellaneous	50	25	95	31.7
Total	200/-	100	300/-	100.0

(Use Rectangles)

23 The following table gives the details of the monthly expenditure of three families

	Items of Expenditure	Family A		Family B		Family C	
		Rs	nP	Rs	nP	Rs	nP
1	Food	12	0	30	0	90	0
2	Clothing	2	0	7	0	35	0
3	House Rent	2	0	8	0	40	0
4	Education	1	50	3	0	12	0
5	Litigation	1	0	5	0	40	0
6	Conventional necessities	0	50	3	0	60	0
7.	Miscellaneous	1	0	4	0	23	0

Represent the above figures by a suitable diagram Which Family is spending the money most wisely ? Give reasons

(M Com Agra 1948)

24 The following table gives the details of monthly expenditure of three families

Item of expenditure	Family X	Family Y	Family Z
	Rs	Rs.	Rs
Food	24	60	180
Clothing	4	14	70
House Rent	4	16	80
Education	3	6	24
Litigation	2	10	80
Conventional needs	1	6	120
Miscellaneous	2	8	46

Represent the above figures by a suitable diagram Which family is spending most wisely (M Com Alld 1950)

(Use Rectangles)

25 Show the details of monthly expenditure of two families given below by means of two-dimensional diagrams

Items of expenditure	Family A income Rs 400/- p m	Family B income Rs 400/- p m
Food	140	120
Clothing	80	80
House Rent	100	60
Education	30	40
Fuel & Light	40	20
Miscellaneous	40	40

(M A, Pb, Sept, 1952)

(Hint Use rectangles)

26. Reprsent the following data regarding the monthly expendr- of two families by a suitable diagram

	Item of expenditure	Family A income Rs 500 -	Family B income Rs 800/-
1	Food	Rs 200	Rs 250
2	Clothing	100	200
3	House rent	80	100
4	Fuel and light	40	50
5	Miscellaneous (including savings)	80	200
		500/-	800/-

(B Com, Agra, 1952)

(Hint Use Rectangles)

27 Draw suitable diagrams to represent the following

Factory	Wages	Materials	Profits	Units produced
A	Rs 2,000	3,000	1,000	1,000
B	Rs 1 400	2,400	1,000	800

Show also the cost and profit per unit

(B Com, Agra, 1953, Alld 1952)

(Use Rectangles)

28 Draw suitable diagram to represent the following information -

	Selling Price	Quantity sold	Wages	Material	Misc	Total
	Rs		Rs	Rs	Rs	Rs
Factory A	200	20	1,600	1,200	800	3,600
Factory B	300	30	3,000	3,000	4,500	10,500

Show also the profit or loss as the case may be

29 Represent the following data by means of a suitable diagram and comment upon it

Monthly expenditure of three families

Item of expenditure	Family A Rs	Family B Rs	Family C Rs
Food	40	80	100
Clothing	18	30	80
House Rent	10	55	60
Education	10	25	120
Miscellaneous	12	30	140

(B Com Raj 1951)

(Hint Use Rectangles)

30 Value of the imports of glass and glass-ware into India from different countries during the year 1931-32

Japan	42	lakhs of rupees
Czechoslovakia	23	" "
Germany	20	" "
U K	13	" "
Belgium	13	" "
Other countries	11	" "

Represent the above figures by suitable diagrams

(B Com, Alld 1933

(Hint Use Circle or Bars)

31 Draw a simple diagram to represent the following statistics relating to the area under different crops in British India in 1933-34 and write a brief note on the given data

Crop	Million acres
Rice	80 3
Wheat	27 6
Jowar	21 4
Other food crops	88 2
Oilseeds	17 8
Cotton	14 5
Other fibres	3 1
Fodder-crops	10 3
Other non-food crops	3.9

(B Com, Cal 1937)

(Hint Draw a pie diagram-circle)

32 The following table gives the details of the cost of construction of a house in Allahabad —

	Rs
Land	4,500
Labour	2,500
Bricks	2,000
Iron	1,800
Timber	1,500
Cement	800
Lime	800
Stone	600
Sand	200
Other things	1 300

Represent the above figures by a suitable diagram

(B. Com, Alld, 1941)

(Hint Use a square or a circle or a Bar)

33 Represent the following by a suitable diagram .

Principal heads of Revenue	1938-39 (Lakh Rs)	1939-1940 (Lakh Rs)
Customs	4,050	4,558
Central excise	868	652
Corporation Tax	204	238
Taxes on income	1,374	1,420
Salt	812	1,080
Opium	50	46
Other heads	112	130

(B Com Nagpur 1943)

(Hint Use circles)

34 Show by means of a circular diagram the following Clearing House returns

(Amount in crores of Rupees)

Centre	1940	1945
Calcutta	1 070	2,670
Bombay	829	2,443
Madras	108	274
Other centres	313	515

(B Com 1955)

(Hint Angles of sectors will be 164 131, 16, 49 and 165 146, 17 and 30 respectively)

35 The following is the table of crime figures reported with the number of detections by the Police Department, Govt of Bombay, for June 1952 —

Type of crime	No reported	No. detected
Murder	25	22
Dacoity and Robbery	34	19
House breaking (by day)	114	35
House breaking (by night)	137	41
Hust and stabbies	162	117
Total	472	234

Prepare the diagram to exhibit the incidence of each type of crime and compare the same with the measure of efficiency of the Police department as depicted by the relative figures of detection

(B Com Raj. 1960)

36 Design a single diagram to exhibit the entire information below, so as to bring about how the causes of death are distinguishable in their intensities and how they are also definitely associated with social status.

Cause of death	Social Status					
	Illegitimate Children	Poorest Classes	Unskilled workers	Artisans	Well-to-do Classes	All Classes
Diarrhoea and Enteritis	24	17	11	7	1	60
Prematurity and Atrophy	56	33	32	35	24	180
Bronchitis and Pneumonia	22	25	19	10	4	80
All causes	102	75	62	52	29	320

37 नई कारों का आयात

वर्ष	कार संख्या
1949	460
1950	1440
1951	190
1952	300
1953	253
1954	50
1955	74
1956	24
1957	11
1958	51
1959	1375
1960	1456

Draw a Polar Diagram

38 Draw a suitable diagram to show the details of the monthly expenditure of the following families

Items of Expenditure	A Income Rs 400/-	B Income Rs 200/-	C Income Rs 80/-
	Rs	Rs.	Rs
Food	160	105	48
Clothing	40	20	10
House rent	50	20	8
Fuel & light	16	10	4
Education	30	15	2
Miscellaneous	64	30	8

(B Com , Raj 1963)

अध्याय १४

METHODS OF DISPLAYING DATA

व–सामग्री का बिन्दु रेखीय निरूपण

D—(Graphic Representation of data)

एक अनुभवी व्यक्ति अङ्क सारणी से ही अपना काम चला सकता है परन्तु एक व्यापारी के लिए जो कुशल गणितज्ञ नही है समक तभी वास्तव मे उपयोगी सिद्ध हो सकते हैं जबकि न केवल उनका पूरा विवरण ही दिया जाय बल्कि उन्हे ऐसे ढग से प्रस्तुत किया जाय कि उनका भुकाव अथवा दिशा बिना विशेष परिश्रम के ही ज्ञात हो सके। सारणी अथवा अङ्क तालिका इस आवश्यकता की पूर्ति नही करती क्योकि इसमे केवल अङ्को के समूह दिये जाते है। एक साधारण व्यापारी के लिए उनका विशेष उपयोग इसलिए नही है कि उनके अध्ययन मे अधिक समय लगाना पडता है तथा उन्हे समझना भी कठिन है। इनके अतिरिक्त जिन्हे गणितीय तथ्यो के अध्ययन का अभ्यास नही है उन्हे बडे बडे अङ्क समूहो के साथ व्यवहार करने से मानसिक थकावट प्रतीत होने लगती है।

रेखाओ द्वारा परिवर्तनो की दिशा तथा मात्रा ज्ञात हो जाती है और रेखा चित्र मस्तिष्क पर भी अधिक दबाव नहीं डालते। रेखाचित्र को देखने मात्र से एक विषय की एक लम्बी अवधि सम्बन्धी सब परिवर्तन ज्ञात हो जाते हैं। एक व्यस्त डाक्टर को अपने बीमारो के तापमान चित्र (Temperature Chart) से तत्कालीन स्थिति परिवर्तन का आभास मिल सकता है, उसे अधिक पूछताछ करने की आवश्यकता नही पडती अत उसका बहुत सा बहुमूल्य समय बच जाता है। श्री बोडिंगटन के शब्दो मे एक भटकती हुई रेखा का प्रभाव मस्तिष्क पर तालिका बद्ध विवरण से अधिक शक्ति शाली होता है। चार्ट अथवा रेखा चित्र से आराम से अब तक की गति की स्थिरता अथवा अस्थिरता का ज्ञान हो जाता है और इससे भविष्य के लिए अनुमान लगाना भी सरल हो जाता है।

रेखाचित्रो का प्रयोग यद्यपि अभी तक बहुत विस्तृत नही हुआ है परन्तु उनका प्रचार बढ रहा है। उनका बनाना सरल तथा महत्व अधिक है। परन्तु रेखाए खैचने मे पर्याप्त सावधानी रखने की आवश्यकता है क्योकि बहुधा रेखाचित्र बनाने मे भी अङ्को मे फेर बदल, काट छाट अथवा वर्गीकरण आदि करने पडते हैं।

रेखाचित्र बनाने मे रेखा खिचे हुए कागज (Graph Paper) काम मे लाने पडते हैं जिनमे खडी और पडी रेखाए बनी हुई होती है। जहा से चित्र का प्रारम्भ करना होता है वह मूल बिन्दु कहलाता है। इस मूल बिन्दु को आधार मान कर जिन सख्याओ को चित्रित करना है उन्हे ग्राफ कागज पर अकित कर लिया जाता है। बिन्दु अकित करने से पूर्व यह देख लेना चाहिए कि किस पैमाने के अनुसार सारी सख्याए सुविधा पूर्वक ग्राफ कागज पर अकित हो सकती है। यदि सख्याए बहुत अधिक है तो एक इच के बराबर अधिक इकाइया लेनी चाहिए और सख्याए कम होने पर थोडी इकाइया लेनी

ठीक रहेगी। साधारणतया प्रत्येक रेखाचित्र में दो तथ्य-समूह अंकित करने होते हैं। एक समूह पड़ी रेखा पर अंकित करते हैं और फिर उसे आधार मान कर दूसरे समूह को खड़ी रेखा पर अंकित करते जाते हैं। अंकित बिन्दुओं को सीधी रेखाओं द्वारा मिला दिया जाता है और फिर इन रेखाओं को सरल कर दिया जाता है ताकि बीच के कोण समाप्त हो जाय और एक सरल वक्र (Smooth Curve) बन जाए।

साधारणतया रेखाचित्र (Graph or chart) दो प्रकार के होते हैं—

1—कालिक रेखा चित्र (Histongram)

2—आवृत्ति रेखा चित्र (frequency graph)

कालिक ग्राफ या रेखा चित्र दो प्रकार से बनाये जाते हैं। एक तो प्राकृतिक पैमाने (Natural Scale) पर तथा दूसरे आनुपातिक पैमाने (Ratio scale) पर। जब दी हुई सख्याएं अपनी वास्तविक स्थिति में ही अंकित की जाती है तो ऐसे चित्र प्राकृतिक माप चित्र कहलाते हैं। इससे सख्यायें अंकित कर जो चित्र प्राप्त होता है वह निरपेक्ष *कालिक चित्र (absolute Historigram) भी कहलाता है। सख्याओं को देशनाकों* (Index Numbers) में बदल कर अंकित किया हुआ चित्र देशनाक कालिक चित्र (Index Historigram) कहलाता है।

निरपेक्ष कालिक चित्र (Absolute Historigram) —अधिक समय के उतार चढ़ाव अथवा परिवर्तनों को दिखलाने वाले चित्र कालिक चित्र कहलाते हैं। ऐसे चित्रों के निर्माण में समय सदा पड़ी रेखा पर दिखलाना चाहिए और चल (Variable) खड़ी रेखा पर।

उदाहरण 14.1

भारत में सप्त वर्षीय राष्ट्रीय बचत पत्रों में विनियोग।

अवधि	प्राप्ति (लाख रु० में)
अप्रैल 1956	24
मई	21
जून	23
जौलाई	43
अगस्त	29
सितम्बर	17
अक्तूबर	16
नवम्बर	13
दिसम्बर	23
जनवरी 1957	21
फरवरी	17

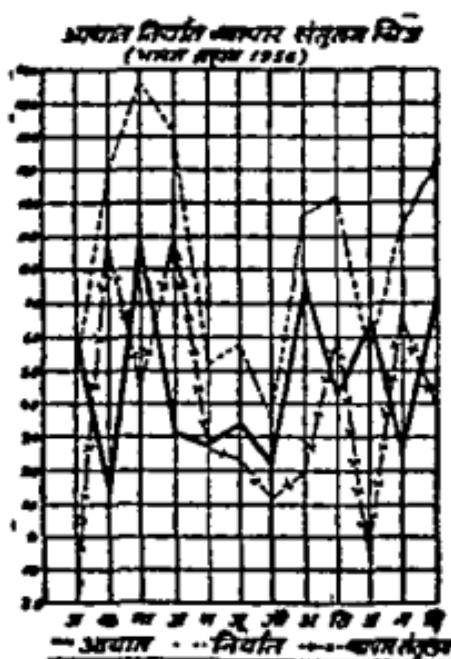
दिये हुए चित्र में तीन तीन मासों के अन्तर से महीनों के नाम लिखे गये हैं और खड़ी रेखा 90 से आरम्भ होती है। चित्र देखने से स्पष्ट है कि देशनाकों में उतार चढ़ाव तो हो रहे हैं पर उनकी मात्रा अधिक नहीं है। ग्रीष्म ऋतु अर्थात् जून 1956 तथा पास के महीनों में अवश्य ही उत्पादन के देशनाक कुछ विशेष गिरे हैं और दिसम्बर जनवरी के महीनों में वैसी ही विशेष वृद्धि मात्र से ज्ञात होता है कि लोहे इस्पात के उत्पादन में सामान्य परिवर्तन ही हुए हैं अधिक नहीं।

दो चलों (Variable) का प्रदर्शन

पिछले चित्रों में एक ग्राफ पर एक ही चल का अंकन किया गया है। परन्तु बहुधा दो या उससे अधिक चलों का भी अंकन करना पड़ता है। ऐसी स्थिति में एक रीति तो यह है कि पहले एक चल के बिन्दुओं को अंकित करके मिला देते हैं फिर दूसरे चल के बिन्दुओं को अंकित कर वक्र बना लेते हैं। इस तरह करने से एक दूसरे के बिन्दुओं के अशुद्ध मिलान का भय नहीं रहता। परन्तु इतना करना ही पर्याप्त नहीं है। व्यवहार में, दोनों चलों के बिन्दुओं को मिलाने के लिए भिन्न भिन्न रंगों की स्याही का प्रयोग किया जाता है। उदाहरणतः एक चल के बिन्दुओं को सीधी रेखा से मिला दिया जाता है, दूसरे चल के बिन्दुओं को टूटी रेखा में, तथा तीसरा यदि कोई हो तो उसके बिन्दुओं के लिए अन्य किसी प्रकार की रेखा का प्रयोग कर सकते हैं। ऐसा करने से सब रेखाएं स्पष्ट दिखलाई पड़ती हैं और सब चलों के सापेक्षिक उतार चढ़ाव ज्ञात करने के लिए एक ही ग्राफ पर उनके चित्र अंकित किये जाते हैं।

उदाहरण 14 3

भारत ब्रह्मा व्यापार 1956 (लाख रु में)

अवधि	आयात	निर्यात	व्यापार सतुलन
जनवरी	65	47	− 18
फरवरी	16	108	+ 89
मार्च	92	138	+ 46
अप्रैल	31	121	+ 90
मई	27	52	+ 25
जून	33	57	+ 24
जुलाई	23	35	+ 12
अगस्त	76	97	+ 21
सितम्बर	41	102	+ 61
अक्तूबर	62	56	− 6
नवम्बर	29	93	+ 64
दिसम्बर	73	112	+ 39

दिये हुए चित्र मे आयात सरल रेखाओ द्वारा, निर्यात टूटी रेखाओ द्वारा तथा व्यापार सतुलन रेखाओ तथा बिन्दुओ द्वारा दिखलाया गया है। चित्र से आयात, निर्यात तथा व्यापार सतुलन का स्पष्ट सकेत होता है। आयात, निर्यात तथा व्यापार सतुलन तीनो मे ही उच्चावचन (उतार-चढाव) बहुत अधिक है। यह भी स्पष्ट है कि आयात और निर्यात में परिवर्तन भी लगभग समानान्तर हैं, जब आयात गिरते हैं तो निर्यात भी गिरते हैं। व्यापार सतुलन अधिकाश पक्ष मे है केवल दो बार सतुलन रेखा शून्य से नीचे अर्थात विपक्ष में की गई है।

कूट आधार रेखा (False Base Line)

यह नियम है कि प्रत्येक ग्राफ में मूल बिन्दु शून्य मे आरम्भ होता है और अन्य सख्याएं जो खडी रेखा पर दिखलाई जाती हैं शून्य से ही आगे चलती हैं परन्तु कभी कभी ऐसा होता है कि सारी सामग्री मे बडी से बडी मद तथा छोटी से छोटी मद की सख्याओ मे परस्पर तो अन्तर बहुत कम होता है परन्तु वह शून्य से बहुत दूर होती हैं। अत यदि मूल बिन्दु को शून्य मान कर चलें तो वास्तविक अकित रेखाएं तो कागज के ऊपर ही ऊपर थोडी सी दूर में आजाएंगी और नीचे का सारा भाग खाली पडा रहेगा। इस प्रकार एक तो कागज का अधिकाश भाग रेखाएं खीचने के प्रयोग मे नही आ सकेगा, दूसरे चित्र थोडी सी दूर में होने के कारण विशेष सुन्दर भी नही लगेगा।

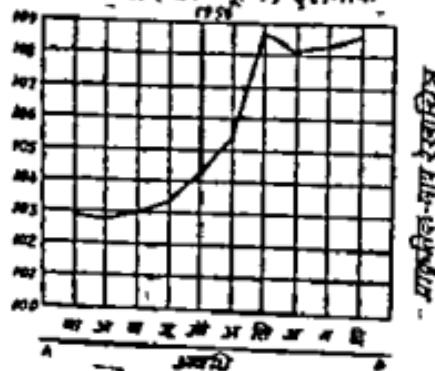
अत: ऊपर बताई हुई परिस्थिति उत्पन्न होने पर ग्राफ के नीचे ही नीचे पहले एक सीधी रेखा खींचते हैं। इसका एक सिरा शून्य मान लिया जाता है। फिर थोडा सा स्थान छोड कर इसके समानान्तर ही दूसरी रेखा खींच देते है। इनके बीच मे कभी कभी टेढी मेढी वक्र रेखा सी बना देते हैं। ग्राफ कागज होने की दशा

मे कागज पर खिची हुई नीचे की कुछ रेखाओं को छोड कर एक नई रेखा को आधार मान लेते हैं और उस पर मूल बिन्दु सख्या जो उचित समझें वह लिख लेते हैं। शून्य तो छोड़ी हुई रेखाओं के नीचे ही नीचे की रेखा को मानते है कि जिसके साथ कुछ टेढी मेढी रेखाए भी खींच देते हैं। यह नीचे की सांकेतिक आधार रेखा ही कूट आधार रेखा है। सैद्धान्तिक रूप से कूट आधार रेखा का उपयोग-उचित नहीं माना जाता क्योंकि यह उतार-चढावों को विस्तृत रूप मे बतातो है लेकिन व्यावहारिक दृष्टि मे इसका महत्व अधिक होने के कारण इस रेखा का अधिक प्रयोग होने लगा है।

उदाहरण 14.4

निर्मित माल के थोक मूल्य देशनाक (1952–53=100)

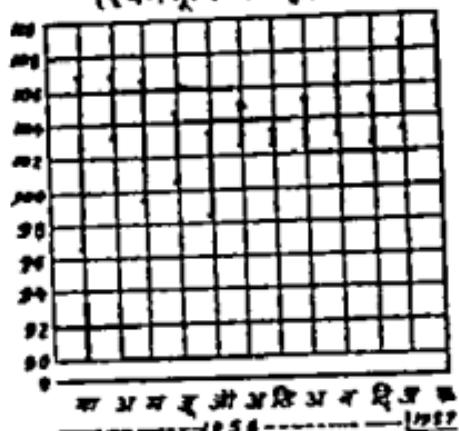
अवधि (1956)	देशनाक
मार्च	102 9
अप्रेल	102.9
मई	103 0
जून	103 4
जौलाई	104.2
अगस्त	105 5
सितम्बर	108 8
अक्तूबर	108.1
नवम्बर	108.2
दिसम्बर	108 6

प्रस्तुत प्रश्न देशनाक 102.9 से 108 8 तक है अर्थात् संख्याओं को कुल विस्तार लगभग 6 बिन्दु है। अब यदि हम मूल बिन्दु शून्य मानकर उससे आगे रेखाए खींचे तो 102 बिन्दु तक का तो सारा कागज खाली पडा रहेगा और थोडे मे भाग में रेखा चित्र बनेगा। साथ ही पैमाना भी बहुत छोटा लेना पडेगा और रेखाए परिवर्तनों का उचित महत्व नही दिखला सकेंगी। अत इसमें कूट-आधार रेखा का प्रयोग करना आवश्यक है।

इस उदाहरण सम्बन्धी चित्र में AB टूट आकार रेखा है और मूल बिन्दु शून्य इसी पर स्थित है। इसके ऊपर कुछ स्थान छोड़ कर नई रेखा आरम्भ करदी गई है जो 100 से आरम्भ की गई है। इस प्रकार केवल 100 से 109 अर्थात् केवल 9 बिन्दुओं के लिए ही पैमाना निश्चित करना पड़ा है। प्रस्तुत चित्र यह प्रकट करता है कि मूल्यों में परिवर्तन क्रमिक है तथा अधिकांश एक ही दिशा में है।

कटिबन्ध वक्र (Zonal Curve)

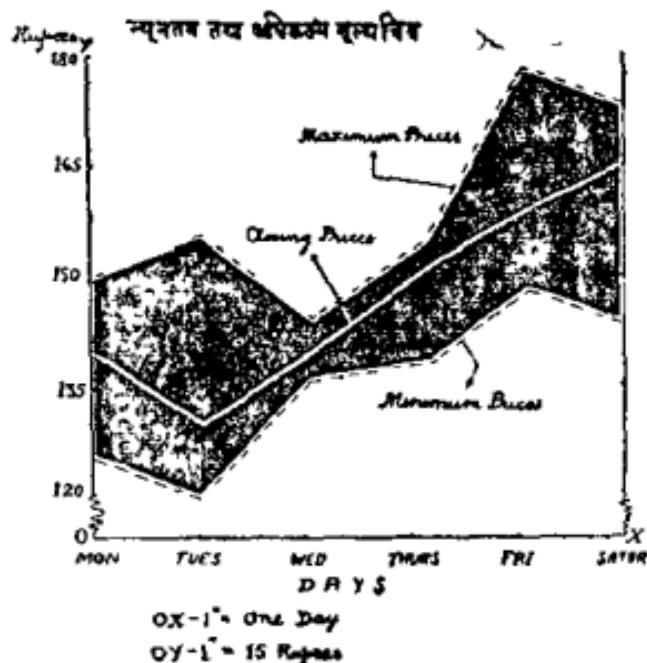
कभी-कभी ऐसे तथ्य चित्रित किये जाते हैं जिनके अधिकतम तथा न्यूनतम बिन्दुओं की जानकारी आवश्यक होती है। इसके लिए एक ही तिथि अथवा अवधि में दो बिन्दु अंकित किए जाते हैं, एक न्यूनतम तथा दूसरा अधिकतम तथा दोनों को एक सीधी लम्ब रेखा से मिला दिया जाता है। इस प्रकार प्रत्येक तिथि के बिन्दु अंकित कर क्रमशः उनके न्यूनतम तथा अधिकतम बिन्दुओं को मिलाने से जो चित्र प्राप्त होता है वह कटिबन्ध वक्र चित्र (Zonal Curve graph) होता है। न्यूनतम तथा अधिकतम तापमान, वस्तुभाव आदि दिखलाने के लिए कटिबन्ध वक्र का प्रयोग किया जाता है। इससे किसी अवधि में होने वाले सामयिक परिवर्तनों का पता लगता रहता है।

उदाहरण 14.5
स्वर्ण मूल्य—बम्बई

अवधि	अधिकतम (रु० में)	न्यूनतम (रु० में)
मार्च 1956	107.06	98.65
अप्रैल	107.00	103.12
मई	106.81	98.94
जून	104.19	100.87
जुलाई	103.50	98.94
अगस्त	105.31	102.41
सितम्बर	103.87	102.37
अक्तूबर	105.81	102.66
नवम्बर	106.56	103.69
दिसम्बर	105.69	103.41
जनवरी 1957	108.91	183.84
फरवरी	109.62	105.31

कभी कभी अधिकतम बिन्दुओं को मिला कर एक रेखा तथा न्यूनतम बिन्दुओं को मिला कर दूसरी वक्र रेखा बना लेते है और बीच के भाग को भर देते है। यह विस्तार वक्र (Range Curve) कहलाती है। इसमें अन्तिम भाव (closing prices) का एक वक्र भी साथ ही खेंचा जा सकता है, जैसे—

उदाहरण 14 6

एक कम्पनी के शेयर के न्यूनतम, अधिकतम एव अन्तिम भाव नीचे दिए गए हैं। चित्र द्वारा दिखलाइए।

दिन	न्यूनतम Rs.	अधिकतम Rs.	अन्तिम भाव Rs.
सोम	125	150	140
मगल	120	160	130
बुध	136	145	140
बृहस्पति	140	160	150
शुक्र	150	18	160
शनि	145	170	165

क्षेत्रीय वक्र चित्र (Band Curve).—

क्षेत्रीय चित्र वास्तव में मध्यमों द्वारा घेरे जाने वाले क्षेत्र का दिग्दर्शन करते हैं

उदाहरण 14 7

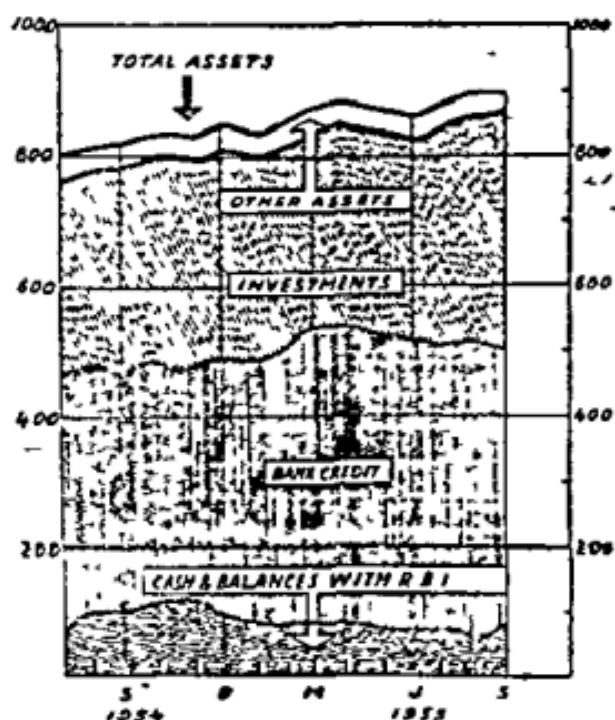
भारतीय अनुसूचित बैंकों की सम्पत्ति

(लाख रुपयों में)

अवधि		नक्द, रिजर्व बैंक तथा अन्य बैंकों में जमा	साख	विनियोग	अन्य सम्पत्ति	योग
सितम्बर	1954	88,78	382,96	322,55	25,69	819,78
अक्तूबर	,,	98,11	383,54	326,00	22,17	829,82
नवम्बर	,,	104,05	381,01	326,01	20,30	831,37
दिसम्बर	,,	101,88	392,30	323,09	29,00	846,57
जनवरी	1955	87,23	408,14	327,16	19,56	842,09
फरवरी	,,	73,82	433,36	326,78	19,74	853,70
मार्च	,,	73,58	458,12	321,37	19,75	872,82
अप्रेल	,,	76 00	462,93	321,56	20,89	881,38
मई	,,	77,68	458,90	322,06	21,13	879,77
जून	,,	81,20	451,28	324,65	21,18	878,31
जुलाई	,,	78,72	443,87	346,52	20,71	889 82
अगस्त	,,	79,34	441,40	355,65	26,11	902,50
सितम्बर	,,	87,36	432,23	360,36	22,84	902,79

सर्व प्रथम नगद तथा बैंकों में जमा की राशि को ग्राफ पर अंकित कर लेना चाहिये। इसके बाद इसकी वक्र रेखा को आधार मान कर साख को राशि के बिन्दु अंकित किए जाएंगे, फिर साख की वक्र रेखा को आधार मान कर विनियोग राशि और विनियोग राशि के वक्र को आधार मान कर अन्य सम्पत्ति रेखा अंकित की जायगी।

दूसरी रीति यह है कि सचीय रेखाएं निकाल कर पृथक पृथक अंकन किया जाए। सर्व प्रथम नकद तथा बैंकों मे जमा 88,78 को ग्राफ पर अंकित किया जाय फिर 88,78 + 382,96 अर्थात् 471,74 का बिन्दु, फिर 471,74 + 822,25 अर्थात् 794,29 का बिन्दु और अन्त में 794,29+25 69 अर्थात् 819,98 का बिन्दु अंकित कर दिया जाय। इसी प्रकार आगे के महीनों के अंक अंकित किए जासकते हैं। बिन्दु अंकित करने के पश्चात् वक्र रेखाएं खैंची जानी चाहिए तथा उनके क्षेत्रों को अलग अलग रंग अथवा चिन्हों से भर देना चाहिए।

इस प्रश्न का ग्राफ नीचे दिया गया है।

इस चित्र मे 'अन्य सम्पत्ति' की वक्र रेखा तक अनुसूचित बैंकों की पूरी सम्पत्ति आ गई है और शेष अलग अलग विभाग अंकित कर दिए गए हैं।

इस प्रकार की वक्रों का एक लाभ यह है कि यह वक्र भी है और रिंग-चित्र, भी, अत. यह दोनों काम पूरे करती है। इससे प्रत्येक मद का महत्व बहुत सरलता से ज्ञात होता है।

जी (Z) चित्र —

जी या Z चित्र का आकार अंग्रेजी के अक्षर Z जैसा होता है। इसका

प्रयोग व्यापारिक तथा सांख्यिकीय क्षेत्र में बहुत होता है। इसे बनाने में सर्व प्रथम तथ्यों के असली अंकों को ग्राफ पर अंकित किया जाता है और वक्र रेखा बनाली जाती है। फिर अंकों की सचयी आवृत्ति (Cumulative frequency) को ग्राफ पर अंकित किया जाता है और यह दूसरी वक्र रेखा बन जाती है। अन्त में सारी अवधि का वार्षिक चल योग (yearly moving total) ज्ञात किया जाता है और इसे भी ग्राफ पर अंकित कर दिया जाता है। तीनों वक्र ऐसे ढंग से बनते हैं कि उनका आकार Z जैसा होता हैं। नीचे इस चित्र के बनाने की व्यावहारिक रीति का एक उदाहरण दिया जाता है।

उदाहरण 14.8

अ कम्पनी का मासिक विक्रय (हजार रुपयों में)

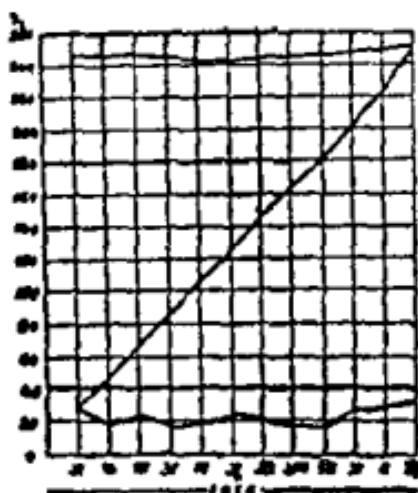
अवधि 1955	विक्रय	सचयी विक्रय	वार्षिक चल योग	अवधि 1956	विक्रय	सचयी विक्रय	वार्षिक चल योग
फरवरी	20	20	—	जनवरी	25	25	250
मार्च	21	41	—	फरवरी	20	45	550
अप्रेल	21	62	—	मार्च	21	66	250
मई	22	84	—	अप्रेल	18	48	247
जून	21	105	—	मई	19	103	244
जुलाई	19	124	—	जून	21	124	244
अगस्त	18	142	—	जुलाई	20	144	245
सितम्बर	17	159	—	अगस्त	18	162	245
अक्तूबर	21	180	—	सितम्बर	17	179	245
नवम्बर	21	201	—	अक्तूबर	22	201	246
दिसम्बर	24	225	—	नवम्बर	24	225	249
				दिसम्बर	26	251	251

इस तालिका मे पहले खाने में मास तथा दूसरे मे विक्रय के अंक दिए हुए हैं तीसरे खाने मे सचयी विक्रय दिया है। यह स्पष्ट है कि जनवरी 1956 से सचयी विक्रय नये सिरे से लिया गया है। इसका तात्पर्य यही है कि फरवरी 1955 से जनवरी 1956 तक के एक वर्ष में कुल 250 रुपये का विक्रय हुआ। नया वर्ष जनवरी से आरम्भ होता है और हमे जनवरी से दिसम्बर 1956 तक के एक वर्ष का जी (Z) चार्ट बनाना है अत जनवरी 1956 से सचयी विक्रय नये सिरे से लिया गया है।

तीसरे खाने मे फरवरी 1955 से दिसम्बर 1955 तक कुछ नही लिखा गया है क्योंकि फरवरी 1955 से दिसम्बर 1955 तक केवल ग्यारह मास होते हैं जबकि चल योग बारह मास या पूरे एक वर्ष या जिस अवधि का जी चार्ट बनाना हो उसका लिया जाता है। जनवरी 1956 के खाने मे 250 की सख्या दिखलाई गई है। यह फरवरी 1955 से जनवरी 1956 तक के विक्रय का योग है। अब हमें एक वर्षीय चल विक्रय (moving sale) योग निकालना है। इसके लिए हम 250 में से सबसे पहले महीने (फरवरी 1955) का विक्रय घटा देंगे और जो महीने योग में नही आये हैं उनमे से

पहले का विक्रय जोड़ देंगे। प्रस्तुत उदाहरण में फरवरी 1956 के सामने भी चल विक्रय योग की मात्रा 250 हजार रु० रखी गई है। इसे निकालने में जनवरी 1956 तक के कुल विक्रय योग 250 में से फरवरी 1955 का विक्रय (20) घटा दिया और फरवरी 1956 का विक्रय (20) जोड़ दिया, परिणाम निकाला 250–20+20 = 250। अब मार्च 1955 का अंक 250 में से घटाया और मार्च 1956 का जोड़ा तो परिणाम 250–21+21 अर्थात् 250 आया। इसे मार्च 1956 के सामने तीसरे खाने में रख दिया। अब अप्रैल 1955 का विक्रय अंक 250 में से घटाया और अप्रैल 1956 का अंक जोड़ा तो परिणाम 250–21+18 अर्थात् 247 आया, इसे अप्रैल 1956 के सामने रख दिया। फिर मई 1955 के अंक (22) को 247 में से घटाया और मई 1956 के अंक (19) को जोड़ा तो परिणाम 244 आया। इसी प्रकार सारी तालिका तैयार की गई है।

अब जी (Z) चार्ट बनाने में हमारे सामने तीन अंक हैं —

(1) प्रमासी अंक (2) सचयी अंक (3) वार्षिक चल योग अंक, तीनों को ग्राफ पर साधारण रूप से अंकित कर देना चाहिये।

शुद्ध शेष वक्र (Net Balance Chart)

यह चित्र लाभ-हानि (Profit and Loss), आमद से व्यय में कमी या आधिक्य, बजट में कमी अथवा आधिक्य आदि को प्रदर्शित करने के लिए बनाया जाता है।

उदाहरण 149

निम्न वर्षों में आय व व्यय का विवरण तथा उनमें कमी या आधिक्य इस प्रकार चित्र द्वारा दिखलाइए।

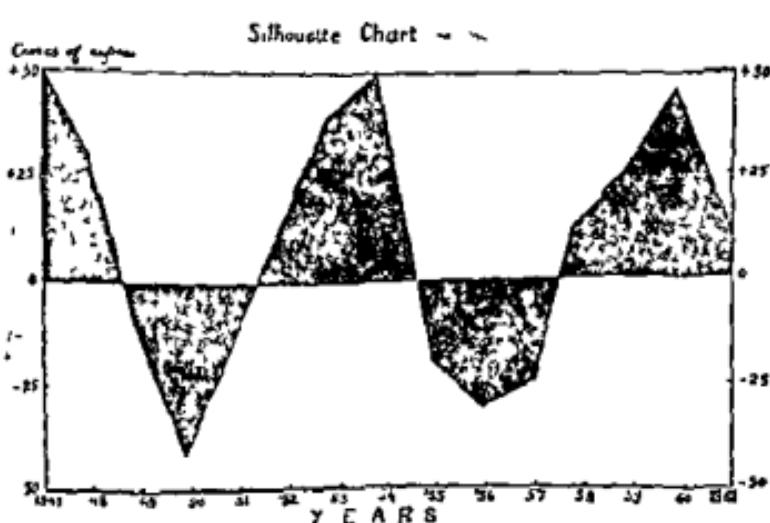
वर्ष	आय	व्यय	कमी या अतिरेक
		(करोड़ रुपयों में)	
1901	200	250	—50
1911	210	240	—30
1921	300	260	+40
1931	360	310	+50
1941	400	425	—25
1951	420	460	—40
1951	600	550	+50

उपरोक्त चित्र का प्रयोग किसी देश या राज्य में किसी निश्चित अवधि में आने वाले व जाने वाले यात्रियों के लिए भी किया जा सकता है। इसी प्रकार के आंकड़ों वाला चित्र संख्या 14 3 की भांति भी बनाया जा सकता है जिसमें धनात्मक राशियां शून्य आधार रेखा से ऊपर तथा ऋणात्मक राशियां 0 आधार रेखा से नीचे अंकित की जाती हैं, लेकिन शुद्ध शेष वक्र सरल है, देखने में अच्छा लगता है तथा इसे खींचने में तुलनात्मक समय भी कम लगता है।

सिलूट वक्र (Silhouette Chart) —

हानि–लाभ, आय-व्यय के अतिरेक या कमी, आयात निर्यात के आधार सन्तुलन आदि का प्रदर्शन करने की यह एक विधि है। इस वक्र में धनात्मक आंकड़ों को शून्य आधार रेखा से ऊपर तथा ऋणात्मक आंकड़ों को शून्य आधार रेखा से नीचे अंकित करके ऊपर वाले भाग में बहुधा काला रंग व आधार रेखा से नीचे वाले भाग में लाल रंग भर दिया जाता है। इससे धनात्मक व ऋणात्मक भागों का विभाजन अच्छी तरह से हो जाता है।

उदाहरण 14.10

वर्ष		व्यापार सतुलन (करोड रुपयों में)
1947	......	+50
1948	.. ..	+30
1949	...	−10
1950		−40
1951	... .	−15
1952	. .	+15
1953	.. .	+40
1954	. .	+50
1955	. .	−20
1956	. ...	−30
1957	...	−25
1958	..	+10
1959	... .	+25
1960		+45
1961	... ..	+10

नोट —Silhouette फ्रांस के एक मन्त्री का नाम था, जिसे इस प्रकार के चित्र काटने का काफी शौक था।

अधिकतम-विचरण-वक्र (Maximum Variation Chart)

इस प्रकार के चित्र का वैज्ञानिक प्रयोगो अथवा मिलो में (Quality Control) किस्म नियन्त्रण करने के लिए अधिक प्रयोग होता है। यदि किसी वैज्ञानिक प्रयोग मे तापक्रम किसी निश्चित सीमा मे ही रखना हो—अधिकतम सीमा से अधिक नही और न्यूनतम सीमा से कम नहीं—तो इस प्रकार का चित्र तैयार किया जाता है। मिल मे जब किसी वस्तु का निर्माण किया जाता है तो वह प्रमापित नमूने (standard sample) के अनुसार होनी चाहिए। प्रत्येक वस्तु के लिए दो सीमाएं निर्धारित करली

जाती हैं—अपर व अधर। यदि वस्तु उन सीमा के अन्दर होती है तो उसे पास कर दिया जाता है और यदि वह सीमा से परे होती है तो उसे रद्द कर दिया जाता है।

उदाहरण 14.11

एक बीमार का निम्न तापमान है। उपयुक्त चित्र बनाइए।

दिन	समय	तापमान (डिग्री F)
सोम	4 प्रातः	100
	8	99
	12	101
	4 सायं	100
	8	99
	12	97
मंगल	4 प्रातः	98
	8	99
	12	102
	4 सायं	100
	8	99
	12	98
बुध	4 प्रातः	97
	8	98
	12	100
	4 सायं	99
	8	98
	12	97
गुरु	4 प्रातः	98
	8	100
	12	103

संघटक भाग वक्र (Component-Part-Chart) —

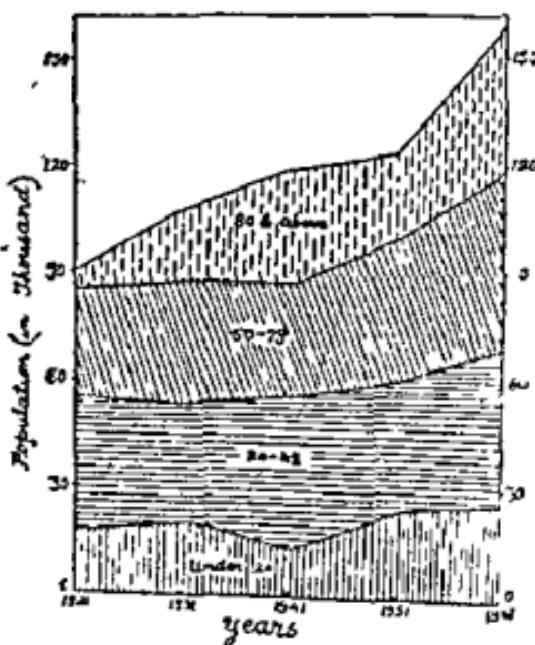
निम्न चित्र मे चार उम्र समागो (age-groups) मे विभिन्न वर्षो में एक शहर की जनसख्या का प्रदर्शन किया गया है। इस प्रकार के चित्र से यह ज्ञात किया जा सकता है कि किसी भी उम्र समाग में वृद्धि हो रही है अथवा कमी। साथ ही सब समागों के योग की भी विभिन्न वर्षों में तुलना की जा सकती है।

उदाहरण 14 12

(in thousand)

उम्र–समाग	1921	1931	1941	1951	1961
20 से नीचे	20	22	18	25	28
20 – 49	35	32	37	35	40
50 – 79	30	34	32	40	50
80 और ऊपर	15	20	30	25	40

इस प्रकार के चित्र मे आवृत्ति को पहले सचयी आवृत्ति (cumulative frequency) में बदल लिया जाता है।

उम्र–समाग	1921	1931	1941	1951	1961
20 से नीचे	20	22	18	25	28
20 – 49	55	54	55	60	68
50 – 79	85	88	87	100	118
80 और ऊपर	100	108	117	125	158

आनुपातिक माप चित्र (Ratio Scale graphs or Ratio Charts)

अब तक हमने ग्राफ कागज पर सामग्री के वास्तविक अंक अंकित किए हैं परन्तु वास्तविक अंकों द्वारा बनाए गए चित्र कभी कभी स्थिति का वास्तविक चित्रण नहीं करते और उनसे अशुद्ध परिणाम निकलने की सम्भावना हो जाती है अतः आनुपातिक माप (Ratio Scale) का प्रयोग किया जाता है।

जैसे मान लीजिए किसी शहर की जनसंख्या निम्न प्रकार से बढ़ती है—

1	2	3	4
वर्ष	जनसंख्या	वास्तविक वृद्धि	प्रतिशत वृद्धि
1920	100	—	—
1930	200	100	100
1940	300	100	50
1950	400	100	33 3
1960	500	100	25

तीसरा खाना बताता है कि प्रतिवर्ष बराबर वृद्धि हुई है और चौथा खाना बताता है कि प्रतिशत वृद्धि 100, 50, 33 3 और 25 हुई है। तीसरा खाना वास्तविक वृद्धि बताता है और चौथा खाना प्रतिशत वृद्धि। अर्थात् तीसरे खाने में निरपेक्ष वृद्धि है और चौथे में सापेक्ष वृद्धि। तुलना करने के लिए सापेक्षिक संख्याएं अच्छी रहती हैं। आनुपातिक मापचित्र (ratio charts) सापेक्षिक तुलना ही करते हैं।

साधारणतया आनुपातिक माप में दी हुई संख्याओं के लघु गुणक (Logarithms) निकाल लिये जाते हैं और उन्हें ग्राफ पर अंकित कर दिया जाता है। दूसरी रीति वास्तविक संख्याओं को लघुगुणक पैमाने पर अंकित करने की है। इसके लिए विशेष लाइनों वाले कागज का प्रयोग किया जाता है।

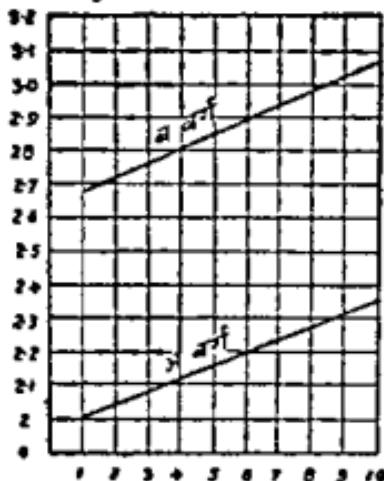
प्राकृतिक तथा लघुगुणकों के आनुपातिक पैमाने पर ग्राफ बनाने में क्या अन्तर है, यह निम्नलिखित उदाहरण से समझ में आ जाएगा।

उदाहरण 14 13

10 प्रतिशत ब्याज की दर पर दो व्यक्तियों का मिश्रधन

वर्ष	म (रु०)	ब (रु०)	लघुगुणक म	„ ब
1	100	500	2 00	2 69
2	110	550	2.04	2 74
3	121	605	2 08	2.78
4	133	665	2 12	2.82
5	146	730	2 16	2 86
6	161	805	2 20	2 90
7	177	885	2.24	2 94
8	195	975	2 29	2 98
9	214	1070	2.33	3.03
10	236	1180	2 37	3 07

पहले इन सख्याओं को प्राकृतिक माप से ग्राफ पर अकित करते हैं :

ऊपर का चित्र वास्तविक अको के आधार पर बनाया गया है और इससे ऐसा लगता है कि ब का मिश्रधन बहुत तीव्र गति से बढा है जब कि वास्तव मे म और ब के मिश्रधन की वृद्धि गति बिल्कुल समान है। अब हम आनुपातिक चित्र बनाते हैं जिसमे लघु गुणको को ग्राफ पर अकित किया है।

आनुपातिक माप रेखा चित्र से स्पष्ट है कि अ और ब के मिश्रधन मे परिवर्तन समानान्तर है। यही कारण है कि ऐसे अको को जिन का मूल चित्रण वास्तविक स्थिति का दिग्दर्शन नही करता, आनुपातिक माप से ग्राफ पर अकित किया जाता है। आनुपातिक माप का प्रयोग आधुनिक व्यापारिक युग मे बहुत महत्वपूर्ण है जब कि सब क्षेत्रो मे सापेक्षिक अथवा तुलनात्मक अको को महत्व दिया जाता है।

इसके अतिरिक्त ऊपर दिए हुए अको को अर्द्ध लघुगुणक द्वारा भी अकित किया जा सकता है। इस माप वाले चित्र का अकन अर्द्ध लघुगुणक कागज (जो साधारण ग्राफ कागज से भिन्न होता है) पर किया जाता है। इसके अन्तर्गत वास्तविक अको को ही अर्ध लघुगुणक कागज पर अकित कर देते हैं।

आनुपातिक ग्राफ पढना—आनुपातिक ग्राफ से परिणाम इस प्रकार निकालने चाहिए।

(1) यदि लघुगुणकीय वक्र ऊपर की ओर जाती है तो समझना चाहिए कि प्रगति धनात्मक (positive) है और नीचे की ओर जाने पर ऋणात्मक (Negative) है।

(2) यदि वक्र सीधी रेखा है तो प्रगति सम है।

(3) यदि वक्र मे एक स्थान से दूसरे स्थान पर अधिक उतार चढाव है तो उच्चावचन सम न होकर विषम है।

(4) यदि दो वक्र एक दूसरे के समान्तर है तो दोनो एक ही दिशा मे परिवर्तन हुए हैं और भिन्न होने पर उतार चढाव की गति भी भिन्न माननी चाहिए।

आनुपातिक माप की विशेषताए — आनुपातिक माप की निम्न विशेषताये हैं

(1) आनुपातिक माप शून्य से आरम्भ नही होता और इसमें प्राकृतिक माप की भाति टूट आधार रेखा दिखलाने की आवश्यकता नहीं है। परन्तु इसमें शून्य अथवा ऋणात्मक अक नही दिखलाए जा सकते।

(2) आनुपातिक माप में कोई आधार रेखा भी मानने की आवश्यकता नहीं है। किसी वक्र को दूसरे वक्र के पास लाने के लिए ऊपर नीचे लाया जा सकता है, केवल आनुपातिक झुकाव में गड़बड़ नहीं होनी चाहिए। इस प्रकार आनुपातिक माप में दो वक्रों को समीपतम लाया जा सकता है जिससे तुलना करना बहुत सरल है।

(3) आनुपातिक ग्राफ में दो बड़ी से बड़ी सख्याओं को अकित किया जा सकता है क्योंकि लघुगुणक बड़ी से बड़ी सख्याओं को भी बहुत छोटा कर देते हैं। वास्तविक अकों में यह समव नही है।

(4) आनुपातिक ग्राफ मे दो या इससे अधिक मापो का भी प्रयोग किया जा सकता है तथा दो भिन्न भिन्न श्रेणियों के अक भी प्रस्तुत किये जा सकते हैं।

(5) आनुपातिक ग्राफ मे समान अन्तर, समान आनुपातिक परिवर्तन दिखलाते हैं।

(6) आनुपातिक माप चित्र देशनाको तथा देशनाक कालिक चित्र दिखलाने के लिए बड़े उपयोगी हैं क्योंकि देशनाक कालिक चित्र [index Historigrams] आनुपातिक परिवर्तन दिखलाने के लिए ही तैयार किये जाते हैं अत उनमें आनुपातिक माप का उपयोग सर्वोत्तम है।

(7) आनुपातिक माप ग्राफ वास्तविक परिवर्तन नहीं दिखला सकते हैं, केवल तुलनात्मक उच्चावचन प्रदर्शित करते हैं।

आवृत्ति चित्र (Frequency Graphs)

जिस प्रकार हमने अब तक विभिन्न सामग्रियों को चित्रों द्वारा दिखलाया है लगभग उसी प्रकार आवृत्तियों वाली सामग्री भी चित्रित की जा सकती है। आवृत्ति श्रेणियां खडित (discrete) हो सकती हैं या सतत (continuous) जिनका विवरण पहले दिया जा चुका है।

आवृत्ति आयत (Histogram). जब विभिन्न वर्ग विस्तारों में आने वाली आवृत्तियों को आयतो के द्वारा प्रदर्शित किया जाता है तो प्रस्तुत चित्र को आवृत्ति-आयत-चित्र (Histogram) कहते हैं।

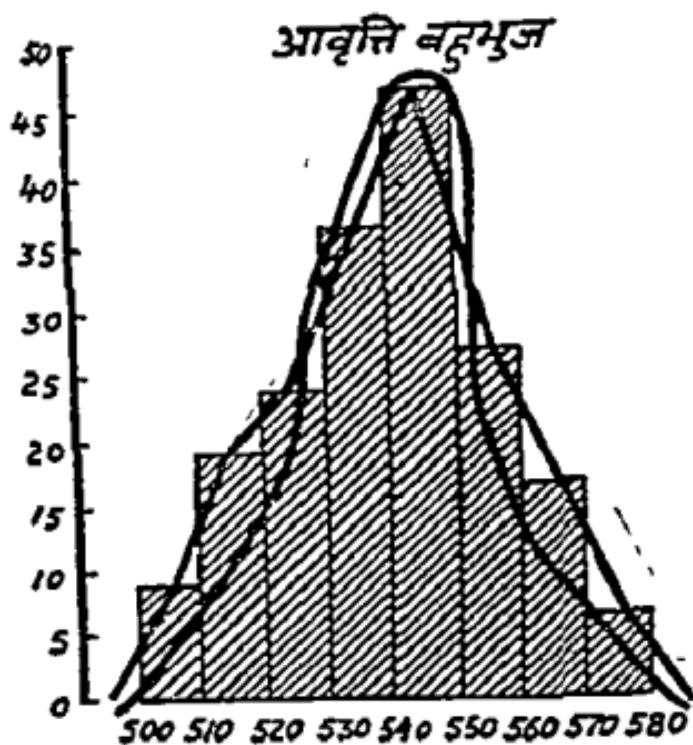
उदाहरण 14 14

विशाल उत्पादन गृह

180 श्रमिको का साप्ताहिक उत्पादन विवरण

उत्पादन (इकाइयों में)	श्रमिक
500-510	8
510-520	18
520-530	23
530-540	37
540-550	47
550-560	26
560-570	16
570-580	5
	180

आवृत्ति बहुभुज (Frequency Polygon) आयत चित्र का एक दोष यह बतलाया गया है कि यदि दिये हुए वर्ग विस्तार में थोड़ा परिवर्तन कर दिया जाय तो चित्र भिन्न हो जायगा क्योंकि वास्तव में तो प्रत्येक वर्ग में भिन्न भिन्न मात्राओं में उत्पादन करने वाले व्यक्ति हैं। इस दोष को दूर करने के लिए आवृत्ति बहुभुज तैयार की जाती है।

आवृत्ति बहुभुज बनाने के लिए पहले तो आयत चित्र ही बनाना पड़ता है फिर सब आयतों के शीर्ष भाग के मध्य बिन्दुओं को आपस में मिला देते हैं। इसके परिणाम स्वरूप जो टेढ़ी मेढ़ी वक्र उपलब्ध होती है उसे सरल (Smooth) कर देते हैं। ऐसा करने से जो चित्र प्राप्त होता है उसका क्षेत्रफल तो आयत चित्र के लगभग समान ही रहता है परन्तु अलग अलग आयतों के क्षेत्रफल में परिवर्तन होजाता है।

उपरोक्त चित्र में आयतों के शीर्षों में मध्य बिन्दु मिलाये गये हैं तथा फिर वक्र को सरल किया गया है। शीर्षों के मध्य बिन्दु मिलाने वाली रेखा पतली लाइन है और सरल की हुई बहुभुज मोटी रेखा से दिखलाई गई है।

आवृत्ति बहुभुज बनाने का मुख्य उद्देश्य भूयिष्ठक (mode) ज्ञात करना होता है। बहुभुज के शीर्ष से सहज ही भूयिष्ठक का अनुमान लगाया जा सकता है। यदि अंक श्रेणी में कुछ और अंक भी जोड़ दिये जाय तो भी बहुभुज का शीर्ष सदा भूयिष्ठक वाले वर्ग विस्तार को छूता हुआ जायगा। आवृत्ति बहुभुज का एक दोष यह है कि यह शीर्ष के समीप आकस्मिक परिवर्तन दिखाती है।

संचयी आवृत्ति चित्र (Cumulative Frequency Curve or OGIVE or less-than curve)

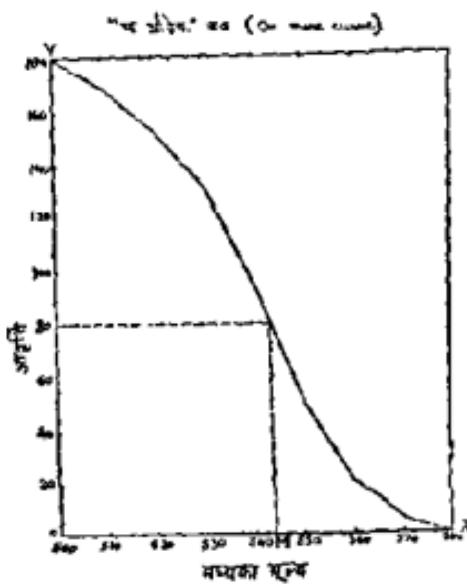
पर अंकित कर लिया, तत्पश्चात् अंकित बिन्दुओं को मिला दिया। यही संचयी आवृत्ति रेखा है। बहुधा यह रेखा भी सरल की जाती है परन्तु सरल करने की क्रिया बहुत कठिन है और यथेष्ट अनुभव के पश्चात ही प्राप्त होती है।

सचयी आवृत्ति रेखा से मध्यका तथा चतुर्थक निकाले जा सकते हैं। प्रस्तुत चित्र मे लम्ब रेखा पर $\frac{180}{2}$ अर्थात 90 के बिन्दु से एक बडी रेखा सचयी आवृत्ति रेखा तक खींची और जहां इस रेखा ने सचयी आवृत्ति रेखा को काटा वहा से लम्ब, आधार रेखा पर डाला। यह लम्ब जिस बिन्दु पर सचयी आवृत्ति रेखा को काटता है वह मूल्य मध्यका है। इसी प्रकार 45 (प्रथम चतुर्थक का मूल्य स्थान) तथा 135 (तृतीय चतुर्थक का मूल्य स्थान) से सचयी आवृत्ति रेखा तक रेखाए खींचो और जहा इन रेखाओं ने सचयी आवृत्ति रेखा को काटा वहा से पडी रेखा पर लम्ब डाले गए। जिन बिन्दुओं पर यह पडी रेखा को काटते हैं वह मूल्य ही क्रमश प्रथम चतुर्थक तथा तृतीय चतुर्थक हैं।

यह बात स्मरण रखनी चाहिये कि सचयी आवृति द्वारा मध्यका अथवा चतुर्थकों के शुद्धतम परिणाम तभी निकल सकते हैं जब कि रेखा शुद्धतम बिन्दुओं के आधार पर खींची गई हो अन्यथा न्यूनमात्र अन्तर रहना स्वाभाविक ही है।

मध्यका आदि ज्ञात करने के लिए हम "से कम" (less than) वक्र बनाने के बजाय 'या अधिक" (or more) वक्र भी निम्न प्रकार से बना सकते हैं—

उत्पादन	मिक सख्या	सचयी आवृत्ति ("या अधिक" or more)
500–510	8	180
510–520	18	172
520–530	23	154
530–540	37	131
540–550	47	94
550–560	26	47
560–570	16	21
570–580	5	5

"या अधिक" (more than) सचयी आवृति वक्र में अधर सीमा पर ही तदा सचयी आवृत्ति अ कित करनी चाहिए। निम्न चित्र से यह स्पष्ट हो जाएगा।

यदि एक ही चित्र मे "से कम" और "या अधिक" सचयी आवृत्ति वक्र खैंचे जाए तो दोनो वक्र एक दूसरे को एक बिन्दु पर काटेंगे। उस बिन्दु से पडी आधार रेखा पर एक लम्ब (perpendicular) खैंचिए। जिस स्थान पर यह लम्ब पडी आधार रेखा को छूता है वही मूल्य मध्यका है।

गाल्टन की मध्यका ज्ञात करने की रीति

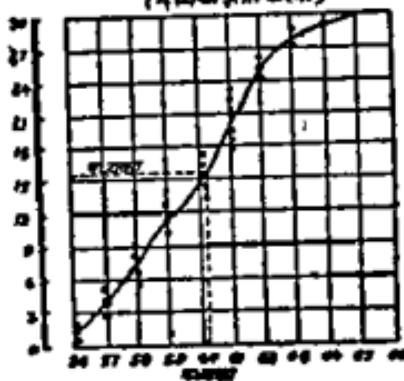
फ्रांसिस गाल्टन ने मध्यका ज्ञात करने की एक ऐसी रीति का आविष्कार किया जिसमें आवृत्ति को सचयी करने की आवश्यकता नहीं है। ग्राफ की पडी रेखा पर पहले चल का मूल्य (Value of Variable) अ कित कर लेते हैं फिर आवृत्तिया अ कित करने में विशेष बात यह रहती है कि प्रत्येक आवृत्ति आगे वाली आवृत्ति का आधार हो जाती है। दूसरे, एक मूल्य मे जितनी आवृत्तिया है लम्ब रेखा पर उतने ही बिन्दु एक के ऊपर दूसरा, इस प्रकार अ कित करते चले जाते है। सब बिन्दु अ कित करने पर इन बिन्दुओ के बीच में से एक रेखा खैंचते हैं। बीच मे से रेखा खैंचने की पद्धति इस प्रकार है।

मान लीजिये 50 चल मूल्य की आवृत्ति 3 है। पडी रेखा के 50 बिन्दु स्थान पर जो लम्ब है उस पर खडी रेखा के आरम्भ से तीन बिन्दु एक के ऊपर दूसरा इस प्रकार अ कित कर देते है। अब रेखा दूसरे बिन्दु को छूती हुई जायगी क्योकि दूसरा बिन्दु बीच का बिन्दु है। पाच बिन्दु होने पर रेखा तीसरे बिन्दु मे से होकर जायगी। यदि बिन्दु दो ही है तो दोनो के ठीक बीच में से रेखा निकाली जानी चाहिए। इस प्रकार रेखा खैंचने के बाद सचयी आवृत्ति रेखा की भाति ही मध्यका के मूल्य स्थान से पडी रेखा के समानान्तर का एक रेखा गाल्टन वक्र रेखा तक खैंच देंगे और जहा यह रेखा वक्र को काटती है वहा

से एक लम्ब पडी रेखा को पर डाल दिया जायगा। जिस बिन्दु पर यह लम्ब पडी रेखा काटेगा, वही मूल्य मध्यका होगा।

उदाहरण 14.19

अ कक्षा के बालकों की लम्बाई

लम्बाई (इंचों में)	आवृत्ति
56	2
57	3
58	4
59	3
60	5
61	6
62	3
63	2
64	1
65	1
	30

प्रस्तुत चित्र में मध्यका बिन्दु अंकित किया गया है जो 60 इंच पर आता है। गणित द्वारा ज्ञात करने से मध्यका 60 इंच ही आता है।

3 लोरेंज वक्र (Lorenz Curve or Cumulative Percentage Curve)

ग्राफ रीति का प्रयोग केवल मध्यका, चतुर्थक अथवा भूयिष्ठक ज्ञात करने में ही नहीं होता बल्कि मध्यको से वास्तविक अंक कितने दूर है यह नापने के लिए भी ग्राफ का प्रयोग हो सकता है। डा० लौरेंज द्वारा प्रयुक्त रीति इसके लिए सर्वोत्तम है। लौरेंज वक्र का प्रयोग सर्व प्रथम सम्पत्ति वितरण दिखलाने के लिए किया गया था।

लौरेंज वक्र एक प्रकार का सचयी प्रतिशत वक्र है। व्यापार के विभिन्न क्षेत्रों में होने वाले लाभों की तुलना के लिए यह वक्र विशेष उपयोगी है। ग्राफ रीति से लौरेंज वक्र बना कर अपकिरण का अनुमान लगाया जाता है।

वक्र खींचना : वक्र खींचने की रीति को एक उदाहरण लेकर समझना उचित रहेगा।

उदाहरण 14.17

कम्पनियो का लाभ (हजार रु० मे)

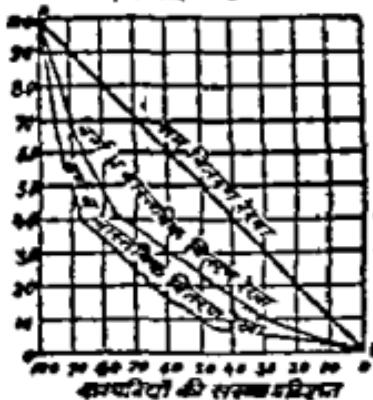
लाभ	अ वर्ग	ब वर्ग
6	6	1
25	11	19
60	13	26
84	14	14
105	15	14
150	17	13
170	10	6
400	14	7
1000	100	100

लौरेंज वक्र बनाने के लिए सर्व प्रथम कम्पनियो के प्रत्येक वर्ग के लाभ की प्रतिशत तथा कम्पनियो की सख्या की प्रतिशत निकालनी पडती है। नीचे की तालिका मे यह प्रतिशत निकाल कर दिखलाई गई है।

(लाभ हजार रु० मे)			वर्ग अ		वर्ग ब	
लाभ की मात्रा	सचयी लाभ	कुल का प्रतिशत	सख्या	सचयी सख्या और कुल का प्रतिशत	सख्या	सचयी सख्या और कुल का प्रतिशत
1	2	3	4	5	6	7
6	6	0 6	6	6	1	1
25	31	3 1	11	17	19	20
60	91	9 1	13	30	26	46
84	175	17.5	14	44	14	60
105	280	28 0	15	59	14	74
150	430	43 0	17	76	13	87
170	600	60 0	10	86	6	93
400	1000	100 0	14	100	7	100

ऊपर के प्रश्न मे पहले प्रत्येक वर्ग के लाभ की कुल लाभ से प्रतिशत निकाली गई है और उसे कालम 3 मे रखा गया है। कालम 5 मे अ वर्ग की कम्पनियो की सचयी सख्या तथा प्रतिशत दोनो हैं। यह प्रश्न ही ऐसा है कि इसमे कम्पनियो की कुल सख्या ही 100 है। यदि सख्या 100 से भिन्न होती तो प्रतिशत का एक अलग कालम बनाना पडता। इसी प्रकार ब वर्ग की कम्पनियो की सचयी सख्या और प्रतिशत रखी गई है। यहा भी कम्पनियो की सख्या 100 होने से प्रतिशत का अलग कालम नही बनाना पडा।

अब सब से पहले हमे ग्राफ पर खडी तथा पडी रेखा के बाएं ऊपर के सिरे से दाए नीचे का सिरा मिला देना चाहिए जैसा कि चित्र मे AB को मिला कर दिखाया गया है। यह सीधी रेखा AB समान वितरण की रेखा (Line of Equal Distribution) है। फिर लम्ब रेखा पर तो 0 से 100 तक पैमाने की सख्याए अकित करनी

चाहिए तथा पड़ी रेखा पर इसके विपरीत अर्थात् 100 तक संख्याएं अंकित की जानी चाहिए जैसा कि चित्र में दिखलाया गया है।

ऊपर बतलाये अनुसार AB रेखा द्वारा दोनो कोने मिला दिये गये है। कम्पनियो की प्रतिशत सख्या को आधार मान कर उस पर लाभ की प्रतिशत अंकित की गई है। उदाहरण स्वरूप अ वर्ग की कम्पनियो को लीजिए। सर्व प्रथम कम्पनियो की प्रतिशत सख्या ६ तथा उनके सामने लाभ प्रतिशत 0 6 लम्ब रेखा पर अंकित कर दिया (इस में हमें दाए से बाएं चलना होगा क्योंकि दाए शून्य है और बाएं सिरे पर 100), फिर दूसरी सचयी सख्या प्रतिशत 17 तथा लाभ की प्रतिशत 3.1 है अत 17 को आधार मान कर लम्ब रेखा पर 3.1 अंकित कर दिया। इसी प्रकार अन्त तक पहले अ वर्ग के बिन्दु तथा बाद में ब वर्ग के बिन्दु अंकित कर उन्हें अलग अलग मिला कर दो वक्र बन गए हैं। हैं। यही लोरेंज वक्र है।

लोरेंज वक्र बना कर उससे परिणाम निकालना कठिन नही हैं। सम वितरण रेखा से जो वक्र जितनी अधिक दूर है उतना ही उसका वितरण मध्यक से अधिक दूर होगा। प्रस्तुत चित्र में ब वर्ग की वक्र, सम रेखा से अधिक दूर है अत ब वर्ग के लाभों की तुलना मे, औसत से अधिक भिन्न हैं। यदि लाभ औसत के बिल्कुल समान या बहुत कम भिन्न होंगे तो लोरेंज वक्र सम वितरण रेखा के बिल्कुल समीप होगा।

समीकरण वक्र (Equation curves)

कई बार ऐसा देखा जाता है कि दो चलों (variables) में पूर्ण निर्भरता का सम्बन्ध होता है। एक चल में परिवर्तन की मात्रा दूसरे में चल परिवर्तन की निश्चित मात्रा पर निर्भर करती है। दो चल X और Y मे यदि Y,X पर निर्भर है तो Y को X का प्रकार्य (function) कहेंगे और यदि X, Y पर निर्भर है तो X को Y का प्रकार्य (function) कहेंगे। इस प्रकार के प्रकार्यीय सम्बन्ध (functional relationship) को किसी समीकरण (equation) द्वारा व्यक्त किया जाता है और उस समीकरण पर आधारित वक्र समीकरण वक्र (equation curve) कहलाता है।

कई समीकरण वक्र ऐसे हैं जो अर्थ-शास्त्र के नियमो की तरह बनते हैं। यह कहना ठीक नहीं होगा कि अमुक समीकरण अर्थशास्त्र के अमुक नियम पर आधारित है। उस समीकरण का वक्र ही ऐसा बनता है जो अमुक नियम को वक्र के रूप मे प्रस्तुत करता है।

ह्रासमान प्रत्याय नियम (Law of Diminishing Returns)
या वर्धी परिव्यय नियम (Law of Increasing Cost)—

उपरोक्त आर्थिक वक्र (economic curve) का द्वितीय दर्जे के परवलयक वक्र (the parabola of the second order) मे सम्बन्ध जोड़ा जा सकता है। द्वितीय दर्जे के परवलयक वक्र का समीकरण निम्नलिखित है—

$$Y = a + bX + cX^2$$

इसमे Y के मूल्य X के मूल्य पर निर्भर हैं, अर्थात् X और Y तो चल (variable) हैं और a, b व c के मूल्य स्थिर (constant) हैं।

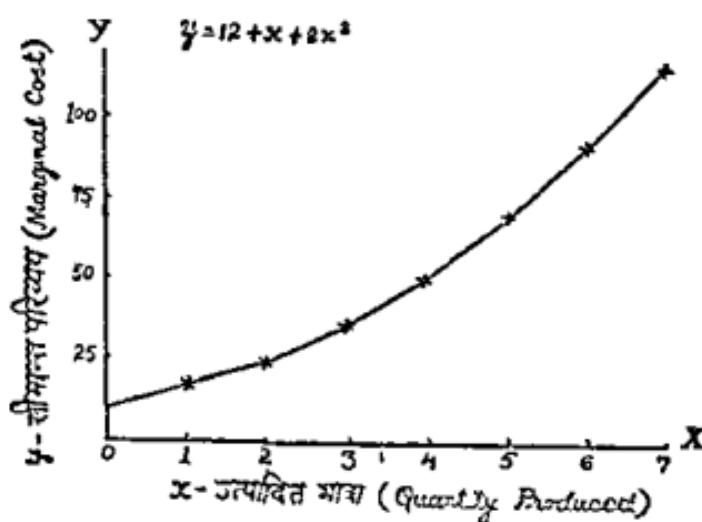
यदि $a = 12$, $b = 1$ और $c = 2$ हो तो निम्न समीकरण a, b व c के मूल्य प्रतिस्थापन (substitution) करने के बाद बनजाएगी।

$$Y = 12 + X + 2X^2$$

अब X के भिन्न-भिन्न मूल्य मानने पर Y के निम्न मूल्य होते हैं—

यदि X = 0 1 2 3 4 5 6 7

तो Y = 12 15 22 33 48 67 90 117

उपरोक्त मूल्यों को (X को पड़ी आधार रेखा पर व Y को खड़ी आधार रेखा पर) ग्राफ-पत्र पर निम्न प्रकार से अंकित कीजिए—

उपरोक्त वक्र से हमें ज्ञात होता है कि ज्यो-ज्यो उत्पादन की मात्रा बढ़ती जाती है, त्यो-त्यो सीमान्त-व्यय भी बढ़ता जाता है। उपरोक्त परवलयक का प्रयोग हमने प्रत्यागणना (अध्याय 15) और काल श्रेणी का विश्लेषण (अध्याय 16) मे भी किया

है। द्वितीय, तृतीय या अन्य दर्जे के बनने वाली माला (series) को सम्भाव्य माला (potential series) भी कहते हैं।

वर्धी प्रत्याय नियम (Law of Increasing Returns)
या ह्रासी परिव्यय नियम (Law of Decreasing Cost)—

उपरोक्त नियम से सम्बन्ध रखने वाला वक्र लघु-गुणक वक्र (logarithmic curve) होता है। इसकी निम्न समीकरण होती है—

$$Y = a b^{X}$$

या

$$\text{Log. } Y = \log. a + X \log b$$

उपरोक्त में a और b के मूल्य तो स्थिर (constant) हैं, और X व Y के मूल्य चल (variable)। Y के मूल्य X के मूल्यों पर निर्भर हैं। उपरोक्त समीकरण (प्रश्न) में X exponent है अतः इस प्रकार के समीकरण exponential equations कहलाते हैं।

उदाहरण 14.18

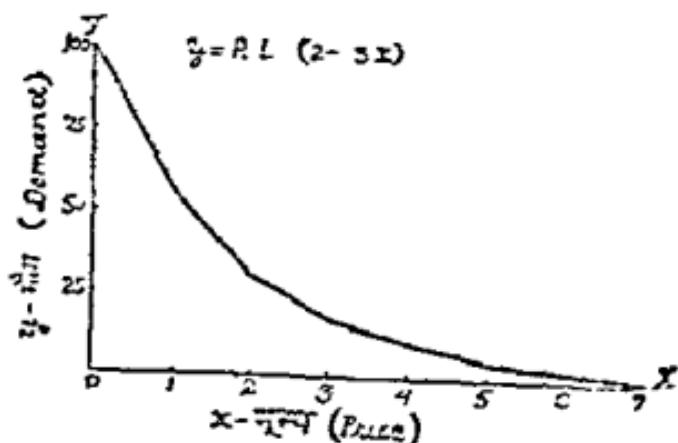
निम्न समीकरण से ह्रासी परिव्यय नियम (Law of decreasing cost) का वक्र बनाइए—

हल :— $\text{Log } Y = 2 - 0{\cdot}3 X$

उपरोक्त समीकरण को निम्न प्रकार से भी लिखा जा सकता है—

$$Y = \text{A L.} (2 - 0{\cdot}3 X)$$

अब X के भिन्न-भिन्न मूल्य मानकर Y के निर्भर मूल्य ज्ञात कर लीजिए—

यदि X =	0	1	2	3	4	5	6	7
तो Y =	100	50·12	25·12	12·59	6·31	3·16	1·58	0·79

X को पड़ी आधार रेखा पर और Y को खड़ी आधार रेखा पर निम्न प्रकार अंकित कीजिए—

उपरोक्त वक्र में ज्यों-ज्यों मूल्य बढ़ता है त्यों-त्यों माँग घटती जाती है या हम यह भी कह सकते हैं कि ज्यों-ज्यों उपभोग (consumption) बढ़ता है त्यों-त्यों उपयोगिता (utility) घटती है।

8. Write a brief note on the "graphical representation of economic data."

The All-India monthly Index Numbers of Prices of primary commodities, raw materials, and manufactured articles in 1944 were as follows—

Month	Index Number of Primary commodities	Index Number of Raw materials	Index Number of Manufactured articles
Jan	234	193	251
Feb	233	195	251
March	232	197	252
April	232	199	261
May	236	204	208
June	240	204	259
July	240	204	261
August	239	202	262
September	238	203	259
October	238	206	256
Nov	256	210	256
Dec	257	200	257

Draw a suitable graph (M A Agra 1946)

9 The following table gives the probable ages of bridegrooms and brides of various ages

Age of bride	Probable age of bridegrooms	Age of bride	Probable age of bridegrooms
15.5	25 0	25.5	27 0
16 5	25 2	26 5	27 5
17 5	25 4	27 5	28 0
18.5	25 5	28 5	29 0
19 5	25 5	29 5	30 0
20 5	25 5	30 5	32 0
21 5	25 8	31 5	33.0
22 5	26 0	32 5	33 0
23 5	26 0	33 5	34 0
24 5	26 8	33 5	34 5

Draw a suitable graph (M A Agra, 1944)

Hint Have a common average line

10 Plot the following figures relating to wholesale prices and the supply of currency deposit money in India on a full page graph and comment on their relationship

Year 1952	Jan	Feb	Mar	April	May	June	July	Aug.	Sept
Wholesale price Index	430	416	378	378	367	375	384	387	389
Money supply (in crore Rs)	1886	1898	1887	1890	1873	1850	1832	1816	1797

Hint Have a common average line (M A 1954)

11 Show the results of Class I railways in undivided India graphically and comment thereupon.

(in millions of £)

	Capital outlay	Gross earning
1923 - 24	464	70
1924 - 25	473	74
1925 - 26	487	73
1926 - 27	505	72
1927 - 28	594	86
1928 - 29	599	86
1929 - 30	617	84
1930 - 31	627	77
1931 - 32	632	71
1932 - 33	638	70
1933 - 34	635	72

Hint Have a common average line (B Com, Agra 1940)

12 Represent graphically the data given below in a single sheet of graph paper —

Volume and value of exports of lac from India in 1941—42

Month	Volume (In thousand cwts)	Value (In lakhs of rupees)
April	53	22
May	80	34
June	89	40
July	96	50
August	56	33
September	69	43
October	32	23
November	60	48
December	22	19
January	102	83
February	60	51
March	49	46

(M A, Agra, 1958, M Com, Raj, 1958)

Hint Have a Common average line

13 (a) What is a Logarithmic graph ? What are its uses ?

(b) The quantities of cotton piecegoods exported from India, and imported into India, during 1942-43 & 1943-44 were as follows.

1942-43	Exports	Imports
	(in million yards)	
April	103 4	1 0
May	140 7	1 6
June	68 2	1 5
July	62 5	1 7
Aug	77 6	1 4
Sept	71 4	1 6
Oct	46 7	2 0
Nov	84 8	1 6
Dec	51 2	0 6

1943-44	Exports	Imports
	(in million yards)	
Jan	50 0	0 1
Feb	46 0	0 1
March	51 6	0 1
April	35 4	0 1
May	59.5	0 2
June	46 9	0 1
July	52 9	0 1
Aug	23 1	nil
Sept.	23 6	0.1
Oct	23 7	0 1
Nov	66 7	0 3

Represent the figures graphically and comment on their trend

Hint Draw one curve for Imports and another for exports extending over two years (M. A Agra 1945)

14 The following table gives the population of four towns at the time of the last seven censuses (In thousands)

Year	Allahabad	Agra	Banaras	Kanpur
1881	160	160	218	155
1891	175	169	224	194
1901	172	188	213	203
1911	172	154	204	179
1921	157	164	198	216
1931	114	205	305	243
1941	261	284	263	487

Represent graphically and state in which town the increase is the highest

Hint Draw log graph

(M A Agra, 1947)

15 Represent graphically the exports and imports of India from the following table on the natural as well as on the ratio scale

In crores of rupees

	exports	Imports
1929-30	345	258
1930-31	308	206
1931-32	263	176
1932-33	239	203
1933-34	275	182
1934-35	280	210
1935-36	282	216
1936-37	343	199

(M A Agra, 1951)

16 Plot the following figures relating to population of India (undivided) so as to show the proportionate increase in Population from one period to another,

Year	Population (000,000's omitted)
1872	210
1881	250
1891	290
1901	295
1911	315
1921	320
1931	350
1941	390

Hint Draw log graph.

(B Com Nagpur 1945, B Com Raj 1952)

17. The following table gives the proportion of married women in 1940 and in 1950 from women of every age Show graphically that the increase was most marked for the women of younger years —

(Percentage of married women)

Age	1940	1950
18	17 0	19 2
20	36 2	38 4
22	50 7	52 9
24	62 0	64 2
26	65 7	67 8

Hint Draw log graph (B Com , Raj , 1954)

18 Plot the following figures relating to the population on a graph paper so as to show the proportionate increase in population

(Population in thousands)

Year	A	B	C
1891	165	80	50
1901	167	79	58
1911	143	80	64
1921	127	73	73
1931	151	95	95
1941	176	127	128
1951	291	191	181

Hint Draw log graph (T D C II Yr Raj , 1961)

19 Show the following data by a Zee Chart

Cheque clearings at Jaipur clearing House

Year	Jan	Feb	Mar	Apr	May	June	July	Aug	Sept	Oct	Nov	Dec
1954		..									14	12
1955	11	12	13	11	14	12	13	13	11	12	12	14
1956	14	13	13	15	15	14	13	14	13	13	12	10
1957	15	12	15	15								

20 The length of Peepal leaves of a tree is given hereunder Locate the median of the same by Galton's method

Length of leaves in inches

2 3, 2 2, 2 2, 2 3, 2 5, 2 5 2 7, 2 1, 2 0, 1 25, 1 5, 2 4, 2 5, 2 4, 2 5, 2 3, 3 4, 4 6, 2 4, 2 5, 2 5, 2 6, 2 5, 2 6 2 3, 2 4, 1 9, 1 8, 1 8, 2 6, 3 2, 3 1, 3 4, 3 5, 3 6, 3 2, 3 1, 3 0, 2 3, 2 3, 2 3, 3 8, 2 4, 2 5, 2 0

21 Find the mode and median from the following table by the use of graphs and check the results by calculation

Marks	Students	Marks	Students
0-10	2	40-50	35
10-20	18	50-60	20
20-30	30	60-70	6
30-40	45	70-80	3

(B Com Agra 1941)

22. Construct an Ogive from the following data relating to corn stalks and locate the median, Quartiles and Deciles therefrom :

Height in Feet					Number of corn stalks
Exceeding	3	but not exceeding		4	99
"	4	"	"	5	211
"	5	"	"	6	612
"	6	"	"	7	1802
"	7	"	"	8	2029
"	8	"	"	9	913
"	9	"	"	10	243

(B Com Agra 1942)

23 Describe the Lorenz graph How does it differ from an Ogive ? Illustrate your answer by fitting (a) a Lorenz and (b) an Ogive to the following data

Percentage of age distribution of the male population in British India, 1931

Age group	Males
0-10	28 9
10-20	20 9
20-30	17 7
30-40	14 3
40-50	9 7
50-60	5 6
60-70	2 7
70 & over	1 1

(M A Patna 1940)

24 Plot (a) Histogram and (b) cumulative frequency curve from the following

Number of Dairy Farms according to cost of production of Milk in 1935-36

Cost of production (annas per gallon)	Number of dairy farms
4-6	13
6-8	111
8-10	182
10-12	105
12-14	19
14-16	7
Total	437

Find the approximate value of the Median from the cumulative curve and mark that value on the Histogram

M = 8 43 (B Com Raj 1948)

25 The following table gives the population of males of different ... in India at the time of the census of 1931 .

Age groups (in years)	Population (in lakhs)
0-5	214
5-10	258
10-15	222
15-20	157
20-25	145
25-30	161
30-40	257
40-50	184
50-60	120
above 60	100

Represent the above data graphically (by means of a cumulative frequency curve) and from the graph thus drawn estimate the median and quartiles (B Com. Raj 1950)

Ans —M = 20 16, Q_1 = 5 1, Q_3 — 31 13

26 Profit per Shop No of Shops

Profit per Shop	No of Shops
0-10	12
10-20	18
20-30	27
30-40	30
40-50	17
50-60	6

Prepare from the above table the cumulative frequency table and represent the latter graphically Find from the graph the value of the median

Ans —M = 22 32 (B Com Raj 1953)

27 The following table gives the actual infantile mortality per 1000 live births in the Union of India from 1925 to 1950 Represent this data graphically in the form of a historigram and indicate the trend by computing five-yearly moving average

Year	Infant mortality per 100 live births	Year	Infant mortality per 100 live births
1926	189	1939	157
1927	164	1940	159
1928	172	1941	157
1929	176	1942	160
1930	174	1943	160
1931	180	1944	166
1932	167	1945	153
1933	165	1946	138
1934	185	1947	136
1935	164	1948	134
1936	161	1949	131
1937	160	1950	130
1938	165		

(B Com., Raj. 1956)

28 The following are the marks obtained by 50 students in statistics.

Marks out of 60		Number of students
Less than	10	4
"	20	10
"	30	30
"	40	40
"	50	47
"	60	50

Draw a curve and answer the following questions —

(i) What is the range of marks obtained by *middle 50% of the* students ?

(ii) What is Median ?

(iii) If the result is 50% what should have been the minimum percentage marks for passing ? [B. Com Raj 1961]

29 The distribution of wages of unskilled workers in two towns A and B were, according to random sample survey, as follows —

Wages per day	Number of labourers sampled	
	Town A	Town B
8 as and under	20	5
8 " to 10 as.	30	7
10 " " 12 "	35	83
12 " " 14 "	150	122
14 " " 16 "	60	75
16 " " 18 "	32	30
18 " " 20 "	13	20
over 20 as	10	8
	350	350

Draw a suitable graph. [M A, *Agra, 1947*]

30 From the data given below draw an Ogive and find the values of Median and Quartiles from the graph drawn :

Year (under)	10	20	30	40	50	60
No of persons	15	32	51	78	97	102

(M A, Raj, 1961)

31 The following table gives the fluctuations in the price of Silver *in Bombay Bullion market in a particular fortnight* Show the figures by Zone curves

Week days	Minimum price	Maximum price
Monday	170 20	173 15
Tuesday	172 30	178 45
Wednesday	180 24	186 12
Thursday	178.15	180 25
Friday	175 25	185 25
Saturday	182.35	190 25
Monday	181 24	184 23
Tuesday	178 85	180 56
Wednesday	172 13	175 45
Thursday	170 25	180 12
Friday	172 35	173.24
Saturday	173 30	174.15

32. What are Band curves ? Show an imaginary Band curve giving the figures of imports in India during a Particular period

33 Draw a Net Balance chart from the data given below—

(in crores of Rupees)

Year	Revenue	Expenditure
1951 - 52	100	120
1952 - 53	80	100
1953 - 54	120	140
1954 - 55	150	140
1955 - 56	180	160
1956 - 57	200	190
1957 - 58	300	325
1958 - 59	380	400
1959 - 60	435	460
1960 - 61	608	590
1961 - 62	690	600
1962 - 63	820	900

34 What is a Ratio Chart ? Construct an Increasing Cost curve based on the following relationship

$$Y = a + bX + cX^2$$

When the values of a, b and c are 15, 2 and 3 respectively.

(T D C. II Yr Raj 1962)

35 Assuming that X represents the market prices of a commodity and Y the quantities of a commodity demanded at the given prices, construct a Demand curve satisfying the following equation

$$\text{Log. } Y = 2 - 0{\cdot}3\,X$$
$$\text{or } Y = A\ L\ [2 - 0{\cdot}3\,X]$$

For X you may assume the values of Re 1—, Rs 2—, Rs. 3—, Rs 4—, and Rs 5— to arrive at the corresponding values of Y before plotting the Demand curve [M. Com Raj 1952]

Hint See example 14 18

36 Draw curves of the following equations—

[a] $Y = 100 - 2X - 3X^2$

[b] $Y = 17 + 2X + 3X^2$

[c] $X = 16\,Y + 15{\cdot}115$

[d] $Y = 1{\cdot}2\,X - 10\,225$

अध्याय १५

अन्तर्गणन एवं वहिर्गणन

(Interpolation and Extrapolation)

किन्ही विशेष मान्यताओ (assumptions) के आधार पर किसी संख्या का अनुमान लगाना अन्तर्गणन कहलाता है। हमने मध्यको के अध्याय में भूयिष्ठक तथा मध्यका अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात किया है। जहा एक विशेष विस्तार के अन्तर्गत कोई मध्य स्थिर होता है तो उसका शुद्ध मूल्य ज्ञात करने के लिए अन्तर्गणन का प्रयोग किया जाता है। इसी प्रकार यदि हमे किसी लम्बी अवधि सम्बन्धी अक ज्ञात हो और बीच में से कोई अक प्राप्त नहीं हो तो अन्तर्गणन द्वारा वह अक ज्ञात किया जा सकता है। इतना ही नही, आने वाले समय की किसी तिथि से सम्बन्धित अक की गणना भी प्राप्त अको के आधार पर की जाती है। यह क्रिया वहिर्गणन (Extrapolation) या पूर्वानुमान (Forecasting) कहलाती है। जन सख्या, वस्तुओ अथवा अशो के भाव आदि का अनुमान इसी प्रकार जाता है।

आवश्यकता—अन्तगणन का प्रयोग करने की आवश्यकता अनेक परिस्थितियो मे अनेक क्षेत्रो के अनेक व्यक्तियो को पड सकती है। निम्नलिखित बातो के कारण अन्त-गणन का प्रयोग करने की मुख्य आवश्यकता होती है।

राजकीय कार्य—सरकार को कर लगाने, खाद्य अथवा अन्य वस्तुओ की वास्तविक माग की जानकारी प्राप्त करने अथवा सामाजिक परिस्थितियो की जानकारी करने के लिए किसी भी वर्ष की जनसख्या, विशेष आयु वाले व्यक्तियो की जनसख्या अथवा सरकारी उद्योगो के किसी विशेष अवधि के उत्पादन के अको की आवश्यकता पड सकती है। यदि उस अवधि के आस पास के अक उपलब्ध है तो बीच की अवधि के अक अन्तर्गणन द्वारा सहज ही जाने जा सकते है और भविष्य के लिए वहिर्गणन का सहारा लिया जा सकता है। प्रत्येक देश का जनगणना विभाग उस देश की वार्षिक जनसख्या का अनुमान इस पद्धति से ही करता है क्योंकि जनगणना तो दसवें वर्ष की जाती है।

(२) व्यापारियो के लिए—व्यापार अधिकतर अनुमानों के आधार पर चलता है। यह सत्य है कि यह अनुमान महत्वपूर्ण तथ्यो पर आधारित होते हैं परन्तु उनके भविष्य के विक्रय सम्बन्धी अनुमान भूतकाल के अनुभव पर ही आधारित रहते हैं। वह भविष्य के लिए व्यापार विस्तार की योजनाए बनाने मे अन्तर्गणन का समुचित सहयोग लेते हैं और यदि कभी बीच की अवधि के कुछ अक खो जाय या नष्ट भी हो जाय तो अन्तगणन द्वारा रिकार्ड पूरे किए जा सकते हैं। उत्पादन के लिए भी अन्तर्गणन का उपयोग महत्वपूर्ण होता है।

(३) समूह मे से इकाई—कभी कभी हमारे पास अको का एक बहुत बडा ढेर होता है या अक किसी समूह के सम्बन्ध मे होते हैं। इकाइयो का पृथक कोई

रिकार्ड नहीं रखा गया हो तो बीच की किसी इकाई का मूल्य ज्ञात करने में अन्तर्गणन अत्यधिक उपयोगी होता है। एक समूह में से मध्यका अथवा भूयिष्ठक के शुद्ध मूल्य इसी प्रकार ज्ञात किये जाते हैं। इसी प्रकार यदि 0 से 100 रु० तक की आय तथा आगे के वर्ग विस्तारों की आय वाले व्यक्तियों की संख्या दी हुई हो तो इनमें से 0-20 रु० अथवा 20-40 रु० तक की आय वाले व्यक्तियों की संख्या अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात की जा सकती है।

(४) तुलना के लिए — विभिन्न देशों में जनसंख्या, देशनाक, मूल्य अथवा अन्य तथ्यों सम्बन्धी अंक यदि भिन्न-भिन्न अवधियों के दिए हुए हों तो तुलना ठीक प्रकार से नहीं की जा सकती। अन्तर्गणन द्वारा सब देशों के एक ही अवधि के अंक प्राप्त कर तुलना का सीधा मार्ग प्रशस्त हो जाता है।

मान्यताएं (assumptions)

उपरोक्त तथ्यों से हमें अन्तर्गणन का महत्व ज्ञात होता है। परन्तु अन्तर्गणन करते समय कुछ मान्यतायें लेकर ही चला जाता है। पहली मान्यता तो यह है कि जिस अवधि के बीच में से हम किसी अवधि के सम्बन्ध में अन्तर्गणन कर रहे हैं उसमें कोई विशेष घटना नहीं घटी है। यदि किसी वर्ष प्लेग से किसी नगर में बहुत अधिक व्यक्ति मर गये हों तो उस नगर की सही जानकारी अन्तर्गणन द्वारा नहीं की जा सकती है। इसी प्रकार दूसरी मान्यता यह है कि सारी अवधि अथवा समूह में उतार चढ़ाव बिल्कुल नियमित हुए हों। यदि दस वर्ष पूर्व तथा दस वर्ष बाद की जनसंख्या दी हुई है और बीच के किसी वर्ष की जनसंख्या ज्ञात करनी हो तो अन्तर्गणन इस मान्यता से ही किया जायगा कि उन दस वर्षों में जनसंख्या में प्रति वर्ष एक ही दर से वृद्धि या कमी हुई है। उपरोक्त दो मान्यताओं के आधार पर ही अन्तर्गणन किया जाता है।

अन्तर्गणन की शुद्धता — साधारणतया सांख्यिकीय सभी तथ्य सामान्य शुद्ध होते हैं क्योंकि उनमें अनुमान का सहारा बहुत लेना पड़ता है, और अन्तर्गणन तो एक प्रकार से अनुमान में से अनुमान लगाने का कार्य है क्योंकि, यदि जनसंख्या का ही उदाहरण लें तो जनसंख्या के अङ्क एक तो वैसे ही बहुत कुछ अनुमानों पर आधारित होते हैं, फिर उनको आधार मान कर किसी बीच के वर्ष की जनसंख्या ज्ञात करना होता है तो इसमें अधिकतम शुद्धता का तो प्रश्न ही उत्पन्न नहीं होता। वास्तव में अन्तर्गणन द्वारा प्राप्त अंक निकटतम सम्भाव्य अंक हैं। इस पर भी वह सामान्य शुद्ध तब होंगे जब कि ऊपर बताई हुई दोनों मान्यताएं ठीक हों तथा जिन तथ्यों के आधार पर अन्तर्गणन किया गया है वह भी अधिकतम सावधानी एवं कुशलता से एकत्रित किए गए हों। यदि अन्तर्गणन यदि शुद्ध तथ्यों पर आधारित है और उनसे सम्बन्धित सामग्री सामान्य रीति द्वारा से सम्बन्धित है तो उसके द्वारा प्राप्त परिणाम निश्चय ही सामान्य शुद्ध होंगे।

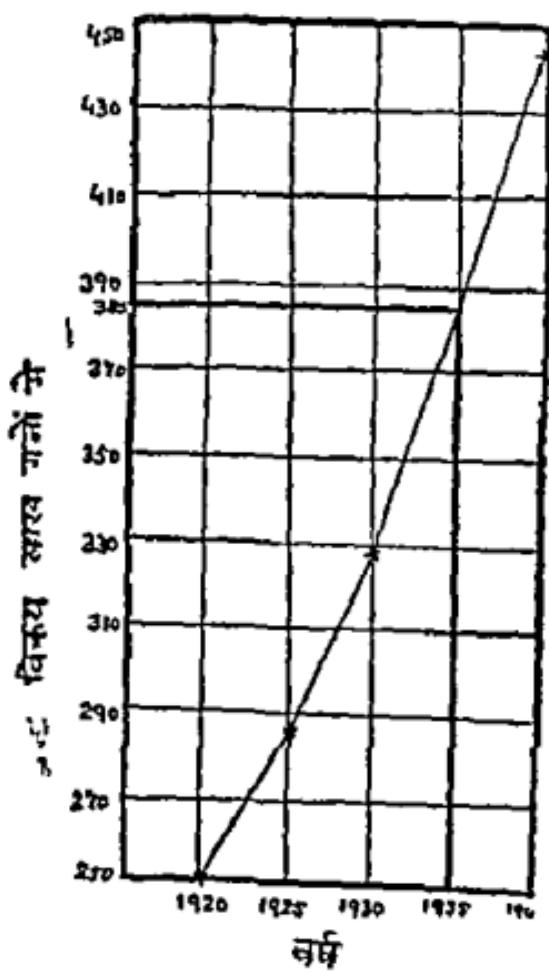
अन्तर्गणन की रीतियां — (अन्तर्गणन दो रीतियों द्वारा किया जाता है— १) बिन्दु रेखाओं द्वारा, (२) बीजगणितीय सूत्रों (Algebraical Formulas)

द्वारा। साधारणतया बिन्दु रेखीय पद्धति का प्रयोग तब करना चाहिये जबकि समूह में आई संख्याएं चक्रीय उतार चढ़ाव दिखलाती हो।

बिन्दु रेखाओं का प्रयोग — बिन्दु रेखीय पद्धति के अन्तर्गत सामग्री के अंको को सामान्य रूप से ग्राफ पर अंकित कर देना चाहिए और आवश्यक बिन्दु से रेखा खींच कर उसका मूल्य ज्ञात कर लेना चाहिए। एक उदाहरण से यह बात स्पष्ट हो जायगी।

उदाहरण 151

निम्नलिखित सारणी में एक वस्त्र विक्रेता की चार वर्षों की बिक्री दी गई है। उसकी 1935 की वार्षिक बिक्री ग्राफ द्वारा निकालिये—

वर्ष	लाख गजों में वस्त्र विक्रय
1920	250
1925	285
1930	328
1940	444

चित्र से यह प्रकट है कि विक्रय में वृद्धि क्रमिक हुई है अत 1935 के विक्रय की राशि का 1930 से अधिक होना स्वाभाविक ही है। 1935 के वर्ष बिन्दु से एक लम्ब वहा तक खींचा जहा वह वक्र रेखा को छू ले, वहा से एक लम्ब विक्रय ''ाने वाली रेखा पर डाला जो 385 के बिन्दु को छूता है, यही 1935 का विक्रय है। अत 1935 का विक्रय अन्तर्गणन द्वारा 385 लाख गज वस्त्र हुआ।

बीज गणितीय रीतियो का प्रयोग (Use of Algebraic Methods) अन्तर्गणन मे भी बीज गणितीय रीतियो का प्रयोग किया जाता है। इस प्रकार के सूत्र हैं जिनके आधार पर हम बीच के अथवा बाद के किसी भी अक का अनुमान कर सकते हैं जबकि आसपास के अक ज्ञात हों। बीजगणितीय रीतियां मे निम्न रीतियो का प्रयोग अधिकतर किया जाता है —

अन्तर्गणन में भी बीज गणितीय रीतियों का प्रयोग किया है जाता। इसप्रकार के सूत्र हैं जिनके आधार पर हम बीच के अथवा बाद के किसी भी अक का अनुमान कर सकते हैं जबकि आस पास के अक ज्ञात हो। बीजगणितीय रीतियो मे निम्न रीतियो का प्रयोग अधिकतर किया जाता है —

(1) वक्र अन्वायोजन रीति (Method of fitting a Parabolic Curve)

(2) न्यूटन की प्रगतिमान अन्तर रीति (Newton's Method of Advancing differences)

(3) न्यूटन-गॉस रीति (Newton-Gauss Method)

(4) न्यूटन गॉस (अधोमुख) रीति (Newton-Gauss (downward) Method)

(5) लेग्रेन्ज सूत्र रीति (Lagrange's Method)

(6) परिमितान्तर विधि (Finite Differences Method या) द्विपद विस्तार विधि (Binomial Expansion Method)

इन रीतियो द्वारा हम अन्तर्गणन ज्ञात करेंगे।

(1) वक्रअन्वायोजन रीति (Method of fitting a Parabolic Curve)

अन्तर्गणन के अन्तर्गत यह मान्यता रहती है कि प्रत्येक मद में दो चल (variables) रहते हैं जो एक दूसरे पर निर्भर (dependent) होते हैं। सुविधा के लिए उन चलो को X और Y का नाम देते हैं। इन चलो (X, Y) का बीज गणितीय सम्बन्ध इस प्रकार माना गया है।

$$Y=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4 \cdots +nX^n$$

इस सूत्र में a, b, c आदि स्थिर (constant) हैं और उनकी सख्या Y के ज्ञात मूल्यो पर निर्भर रहती है। सूत्र को हम एक उदाहरण से स्पष्ट करेंगे।

उदाहरण 15.2

निम्नलिखित-सारणी में भारत की चार जनगणनाओं की जन संख्या दी गई है। अन्तर्गणना द्वारा 1901 की जनसंख्या ज्ञात कीजिए।

वर्ष	जनसंख्या (करोडो में)
1881	25 3
1891	28 7
1911	31.5
1921	31 9

हमें केवल चार मदों के मूल्य ज्ञात है—

1881, 1891, 1901, 1911, 1921

25 3, 28 7, ?, 31.5, 31 9

पाचवें मद का मूल्य ज्ञात करने के लिए पहले वर्षान्तर निकालना होगा।

$X = -20, -10, 0, 10, 20$

$Y = 25\ 3, 28\ 7, y_o, 31.5, 31\ 9$

X के मूल्य 1881 − 1901, 1891 − 1901, 1901 − 1901, 1911 − 1901 तथा 1921 − 1901 के परिणाम है। इन परिणामों को 10 से भाग देकर संक्षिप्त कर लेना उचित होगा। अत

$X = -2, -1, 0, 1, 2$

$Y = 25\ 3, 28\ 7, y_o, 31.5, 31.9$

अब इसकी समीकरण लिखते हैं।

$$Y = a + bx + cx^2 + dx^3.$$

यहा यह स्मरण रखना चाहिये कि y के सामने जो अक अथवा सख्याएं आदि समीकरण में दिये जाते हैं उनकी सख्या हमेशा उतनी ही होती है जितने मदों का मूल्य हमे ज्ञात होता है। यहा हमें केवल चार मदों के मूल्य ज्ञात हैं अत. समीकरण में Y के सामने चार ही अक आयेंगे। यदि पाच मदों के मूल्य ज्ञात होते और छटा निकालना होता तो समीकरण इस प्रकार होती —

$$Y = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4$$

अब क्योंकि हमें X के मूल्य भी ज्ञात है अत उन मूल्यों का समीकरणों में प्रतिस्थापन करें नए समीकरण इस प्रकार बनेंगे।

$$25\ 3 = a + (b \times -2) + [c(-2)^2] + [d(-2)^3] \qquad [1]$$

$$28\ 7 = a + (b \times -1) + [c(-1)^2] + [d(-1)^3] \qquad [2]$$

$$Y_o = a \qquad [3]$$

$$31.5 = a + (b \times 1) + [c(1)^2] + [d(1)^3] \qquad [4]$$

$$31\ 9 = a + (b \times 2) + [c(2)^2] + [d(2)^3] \qquad [5]$$

ऊपर समीकरण बनाने के लिए जो विस्तृत विवरण दिया गया है उससे वास्तविक समीकरण निम्नलिखित बनेगी।

$a - 2b + 4c - 8d = 25.3$ [1]
$a - b + c - d = 28.7$ [2]
$a = y_0$ [3]
$a + b + c + d = 31.5$ [4]
$a + 2b + 4c + 8d = 31.9$ [5]

हमे y_0 का मूल्य ज्ञात करना है जो a के समान है। अत a का मूल्य ही हमारा ज्ञातव्य है जो समीकरणों के हल से इस प्रकार जाना जा सकताहै।

समीकरण (1) तथा (5) को जोडा गया

$a - 2b + 4c - 8d = 25.3$ [1]
$a + 2b + 4c + 8d = 31.9$ [5]

$2a + 8c = 57.2$ [6]

समीकरण (2) तथा (4) को जोडा गया

$a - b + c - d = 28.7$ [2]
$a + b + c + d = 31.5$ [4]

$2a + 2c = 60.2$ [7]

अब समीकरण (7) को 4 से गुणा करके समीकरण (6) मे से घटाया गया

$2a + 8c = 57.2$ [6]
$8a + 8c = 240.8$ [8]

$-6a = -183.6$
$a = 30.6$

अत अन्तगणन द्वारा 1901 मे भारत की जन सख्या 30 6 करोड हुई।

इस पद्धति का प्रयोग ऐसी स्थितियो में ही करना अधिक उपयुक्त है जहा पदो की सख्या साधारणतया चार या पाच हो। यदि इससे अधिक पद हो तो समीकरणों की सख्या बहुत हो जायगी और उनके हल करने में आकलन बहुत करना पडेगा। इस सूत्र का प्रयोग किसी भी परिस्थिति मे, चाहे वर्ग विस्तार समान हो या नही, किया जा सकता है।

(2) न्यूटन की प्रगतिमान अन्तर रीति (Newton's Method of Advancing differences)

न्यूटन ने अन्तगणन के लिए निम्नलिखित सूत्र दिया है:—

$$Y_x = Y_0 + x\,\Delta_0^1 + \frac{(x-1)}{1\times 2}\,\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\Delta_0^4 + \cdots$$

Y_x वह सख्या है जिसे अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात करना है।

Δ (delta) अन्तर है।

$x = \dfrac{\text{अन्तर्गणन वर्ष (–) प्रथम वर्ष}}{\text{वर्षों के बीच का अन्तर}}$

अथवा अधिक स्पष्ट रूप में

$= \dfrac{\text{वह मद जिसकी अन्तगणना करनी है — समूह का प्रथम मद}}{\text{वर्गान्तर}}$

Y_o = समूह के प्रथम मद का मूल्य

निम्न उदाहरण से यह सूत्र भली प्रकार समझा जा सकेगा।

उदाहरण 15 3

बुलद चीनी मिल के कुछ लाभ नीचे दिये गये हैं —

वर्ष	कुछ लाभ (लाख रु० मे)
1935–36	4 86
1937–38	12 64
1939–49	13 68
1941–42	16.65
1943–44	23 29

1942–43 तथा 1944–45 के लाभ का अनुमान लगाइये।

इस प्रश्न में अन्तर्गणन तथा वहिर्गणन दोनों करने हैं।

(1) वर्ष X		(2) लाभ (लाख रु. मे) y		अन्तर * Δ (3) प्रथम Δ^1		(4) द्वितीय Δ^2		(5) तृतीय Δ^3		(6) चतुर्थ Δ^4	
1935–36	x_0	4 86	y_0								
				7 78	Δ_0^1						
1937–38	x_1	12 64	y_1			-6 74	Δ_0^2				
				1 04	Δ_1^1			8 67	Δ_0^3		
1939–40	x_2	13.68	y_2			1 93	Δ_1^2			-6 93	Δ_0^4
				2 97	Δ_2^1			1 74	Δ_1^3		
1941–42	x_3	16.65	y_3			3.67	Δ_2^2				
				6 64	Δ_3^1						
1943–44	x_4	23 29	y_4								

1942–43

अब पहले x का मूल्य ज्ञात करेंगे

$$x = \frac{(1942-43)-(1935-36)}{(1937-38)-(1935-36)} = \frac{7}{2} = 3\ 5$$

Y_o = 4.86

* प्रत्येक पहली मद के मूल्य को दूसरी मे से घटाया गया है। जैसे 12.64 – 36 13 68 – 12.64 आदि। कालम 4, 5 तथा 6 में भी इसी प्रकार किया गया है।

$\Delta_0^1 = 7.78$
$\Delta_0^2 = -6.74$
$\Delta_0^3 = 8.67$
$\Delta_0^4 = -6\ 93$

अत $Y_x = 4\ 86 + (3.5 \times 7.78) + \frac{3\ 5\ (3\ 5-1)}{1 \times 2} \times -6.74 +$

$\frac{3.5(3\ 5-1)\ (3\ 5-2)}{1 \times 2 \times 3} \times 8\ 67 + \frac{3.5(3.5-1)\ (3\ 5-2)\ (3\ 5-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times -6.93$

$= 4\ 86 + 27\ 23 + (-29\ 488) + 18\ 965 + (-1\ 895)$

$= 19\ 672$ लाख रुपये

1944–45

$x = \frac{(1944-45) - (1935-36)}{(1937-38) - (1935-36)} = \frac{9}{2} = 4\ 5$

$y_x = 4\ 86 + (4\ 5 \times 7.88) + \frac{4\ 5\ (4\ 5-1)}{1 \times 2} \times -6\ 74 +$

$\frac{4\ 5\ (4\ 5-1\ (4.5-2)}{1 \times 2 \times 3} \times 8\ 67 + \frac{4.5\ (4\ 5-1)\ (4\ 5-2)\ (4\ 5-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} \times -6'93$

$= 4.86 + 35\ 01 + (-53\ 078) + 56.897 + (-17\ 054)$

$= 26.635$ लाख रुपए

न्यूटन का यह सूत्र वही प्रयोग किया जा सकता है जहा मदो का (X का) पारस्परिक अन्तर या वर्ग विस्तार बिल्कुल समान हो और अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात करने की मद सारणी मे प्रारम्भ में ही हो। यदि अवधि या वर्ग के विस्तार में अन्तर होगा तो इस सूत्र का प्रयोग सम्भव नही है। क्योकि फिर x का मूल्य निर्धारण नही हो सकेगा।

3—न्यूटन-गॉस रीति (Newton-Gauss Method)—

यदि वह सख्या जिसे अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात करना है सारणी के मध्य में हो तो न्यूटन गॉस द्वारा प्रतिपादित सूत्र अधिक उपयुक्त रहता है। इस सूत्र का प्रयोग भी तभी किया जा सकता है जबकि मदो (X) पारस्परिक अन्तर या वर्ग विस्तार बिल्कुल समान हो।

न्यूटन-गॉस का सूत्र निम्न प्रकार है —

$$y_x = y_0 + x\,\Delta^1 + \frac{x\,(x-1)}{1 \times 2}\,\Delta^2{}_{y-1} + \frac{x\,(x+1)\,(x-1)}{1 \times 2 + 3} \times$$

$$\Delta^3{}_{y\cdot 1} + \frac{x\,(x+1)\,(x-1)\,(x-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\,\Delta^4{}_{y\cdot 2}\ \cdot\ \cdot$$

y_x = अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात की जाने वाली संख्या

इस सूत्र मे y_0 अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात की जाने वाली संख्या के बिल्कुल पहिले (immediately proceding) सख्या के सामने लिखा जाता है। y_0 के पहिले वाली सख्याओ के सामने क्रमश y^{-1}, y^{-2} आदि लिखा जाता है और y_0 के बाद वाली सख्याओ के सामने क्रमश y_1, y_2, y_3 आदि लिखा जाता है।

इसमे $x = $ अन्तर्गणन वाली मद – अन्तर्गणन वाली मद के बिल्कुल पहिले वाली मद

निम्न उदाहरण से यह सूत्र भली प्रकार समझ मे आजाएगा ।

उदाहरण 16·4

निम्न तथ्यो से 24 वर्ष की आयु पर जीवन की प्रत्याशा का अनुमान कीजिए—

आयु (वर्ष)	10	15	20	25	30	35
जीवन का अनुमान (वर्ष)	35'45	32'20	29 06	26'03	23'11	20 41

हल—

आयु X	जीवन-प्रत्याशा Y		अन्तर Δ^1		Δ^2		Δ^3		Δ^4	
10		y_{-2}								
			-3 25	$\Delta^1 y_{-2}$						
15	32.20	y_{-1}			-'11	$\Delta^2 y_{-2}$				
			-3'14	$\Delta^1 y_{-1}$			- 00	$\Delta^3 y_{-2}$		
20	29 06	y_0			-'11	$\Delta^2 y_{-1}$			00	$\Delta^4 y_{-2}$
			-3 03	$\Delta^1 y_0$			- 00	$\Delta^3 y_{-1}$		
25	26.03	y_1			-'11	$\Delta^2 y_0$			'11	$\Delta^4 y_{-1}$
			-2 92	$\Delta^1 y_1$			-'11	$\Delta^3 y_0$		
30	23.11	y_2			-'22	$\Delta^2 y_1$				
			-2.70	$\Delta^1 y_2$						
35	20.41	y_3								

13.58 − 12 54 भाग ...

$$x = \frac{24-20}{25-20} = \frac{4}{5} = \cdot 8$$

$$y_x = y_0 + x\,\Delta^1 y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \times 2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{x(x+1)(x-1)}{1 \times 2 \times 3} \times$$

$$\Delta^3 y_{-1} + \frac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\Delta^4 y_{-2}$$

मूल्य प्रतिस्थापित करने पर

$$y_x = 29\cdot 06 + (\cdot 8 \times -3\cdot 03) + \frac{\cdot 8(\cdot 8-1)}{2} \times -\cdot 11 +$$

$$\frac{\cdot 8(\cdot 8+1)(\cdot 8-1)}{6} \times 0 + \frac{\cdot 8(\cdot 8+1)(\cdot 8-1)(\cdot 8-2)}{24} \times -\cdot 11$$

$$= 29\cdot 06 - 2\cdot 424 + \cdot 0088 - 0 - \cdot 004$$

$$= 29\cdot 0728 - 2\cdot 424 = 26\cdot 65 \text{ वर्ष}$$

[4] न्यूटन-गॉस [अधोमुख] रीति [Newton-Gauss (Downward) Method]—

यदि वह सख्या जिसे अन्तर्गणन द्वारा ज्ञात करना है सारणी के अन्तिम भाग मे हो, तो न्यूटन-गॉस की अधोमुख [downward] रीति अधिक उपयुक्त रहती है। इस सूत्र का प्रयोग भी तभी किया जाता है जब कि मदो [X] का पारस्परिक अन्तर या वर्ग-विस्तार बिल्कुल समान हो।

सूत्र निम्न प्रकार है—

$$y_x = y_0 - x\,\Delta^1 y_{-1} + \frac{x(x+1)}{1 \times 2}\Delta^2 y_{-1} - \frac{x(x+1)(x-1)}{1 \times 2 \times 3} \times$$

$$\Delta^3 y_{-2} + \frac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\Delta^4 y_{-3}$$

इस सूत्र में y_0 अन्तर्गणन ज्ञात किये जाने वाली सख्या के बिल्कुल बाद वाली [immediately succeeding] सख्या के सामने लिखा जाता है। y_0 के पहले वाली सख्याओ के सामने क्रमश Y^{-1}, Y^{-2} आदि लिखा जाता है और y_0 के बाद वाली सख्या के सामने y_1 [यदि आवश्यक हो तो]।

निम्न उदाहरण मे यह सूत्र ठीक प्रकार से समझ मे आ जाएगा—

यदि प्रश्न मे चल (X) अवरोही क्रम में दिया गया हो तो आसानी की दृष्टि से उसे आरोही क्रम मे बदल लेना चाहिये।

$$\text{इसमें } x = \frac{\text{अन्तर्गणन वाली मद के बिल्कुल बाद वाली मद} - \text{अन्तर्गणन वाली मद}}{\text{वर्गान्तर}}$$

उदाहरण 15 5

निम्न तथ्यो से, यदि ट्राम के टिकट की दर 4.8 नये पैसे करदी जाय तो कितने व्यक्तियो के सफर करने की आशा है, ज्ञात कीजिए—

दर (नए पैसे)	3 0	3 5	4 0	4 5	5.0	5 5
यात्रियों की संख्या ('0000 में)	15	10	6	4	3	2

दर X	यात्री ('0000) में Y	अन्तर (differences) Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4
3 0	15 y_{-4}				
		−5 $\Delta^1 y_{-4}$			
3 5	10 y_{-3}		1 $\Delta^2 y_{-4}$		
		−4 $\Delta^1 y_{-3}$		1 $\Delta^3 y_{-4}$	
4 0	6 y_{-2}		2 $\Delta^2 y_{-3}$		2 $\Delta^4 y_{-4}$
		−2 $\Delta^1 y_{-2}$		−1 $\Delta^3 y_{-3}$	
4 5	4 y_{-1}		1 $\Delta^2 y_{-2}$		0 $\Delta^4 y_{-3}$
		−1 $\Delta^1 y_{-1}$		−1 $\Delta^3 y_{-2}$	
5 0	3 y_0		0 $\Delta^2 y_{-1}$		
		−1 $\Delta^1 y_0$			
5 5	2 y_1				

$$x = \frac{5 0 - 4 8}{5 0 - 4 5} = \frac{\cdot 2}{5} = \cdot 4$$

$$y_x = y_0 - x\,\Delta^1 y_{-1} + \frac{x(x+1)}{1 \times 2}\,\Delta^2 y_{-1} - \frac{x(x+1)(x-1)}{1 \times 2 \times 3} \times$$

$$\Delta^3 y_{-2} + \frac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\,\Delta^4 y_{-3}$$

मूल्य प्रतिस्थापित करने पर—

$$= 3 - (\cdot 4 \times -1) + \left(\frac{\cdot 4 \times 1 \cdot 4}{2} \times 0\right) - \left(\frac{\cdot 4 \times 1 \cdot 4 \times -\cdot 6}{6} \times -1\right)$$

$$+ \left(\frac{\cdot 4 \times 1 \cdot 4 \times -\cdot 6 \times -1 \cdot 6}{24} \times 0\right)$$

$$= 3 + \cdot 4 + 0 - \cdot 056 + 0$$

$$= 3 \cdot 4 - \cdot 056$$

$$= 3 \cdot 344$$

= 33,440 व्यक्ति

कभी-कभी वर्ग विस्तार (Class intervals) में दी हुई मदों को कुछ बदल लेना पड़ता है। जैसे 50 व्यक्तियों की आयु वर्ग-विस्तारों में बटी हुई दी गई हो और 15 वर्ष तक की आयु के कुल व्यक्तियों की संख्या जाननी हो तो आवृत्तियों को संचित (cumulate) कर लेना होगा। नीचे इसका उदाहरण दिया जाता है।

13 58 − 12 64 भाद । कानन ...

50 व्यक्तियों की आयु के अङ्क

आयु (वर्ष)	आवृत्ति
0–10	5
10–20	10
20–30	20
30–40	9
40–50	6

अन्तर्गणन के लिए इस सारणी को सचयी आवृत्ति वाली सारणी में बदल लेना चाहिए ।

आयु (वर्ष)	आवृत्ति
10 वर्ष से कम	5
20 ,, ,, ,,	15
30 ,, ,, ,,	35
40 ,, ,, ,,	44
50 ,, ,, ,,	50

अब न्यूटन की रीति से 15 वर्ष से कम आयु के व्यक्तियों की सख्या का निम्न प्रकार से अन्तर्गणन कर लेना चाहिये ।

आयु (वर्ष) X	अन्तर (Differences)									
	y		Δ^1		Δ^2		Δ^3		Δ^4	
10 से कम	5	y_0								
			10	$\Delta^1 y_0$						
20 से कम	15	y_1			10	$\Delta^2 y_0$				
			20	$\Delta^1 y_1$			-21	$\Delta^3 y_0$		
30 से कम	35	y_2			-11	$\Delta^2 y_1$			29	$\Delta^4 y_0$
			9	$\Delta^1 y_2$			8	$\Delta^3 y_1$		
40 से कम	44	y_3			-3	$\Delta^2 y_2$				
			6	$\Delta^1 y_3$						
50 से कम	50	y_4								

$$x = \frac{15-10}{20-10} = \frac{5}{10} = \cdot 5$$

$$x = y_0 + x\,\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1\times 2}\,\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3}\,\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1\times 2\times 3\times 4}\,\Delta_0^4$$

$$= 5 + (5\times 10) + \left\{\frac{5(5-1)}{2}\times 10\right\} + \left\{\frac{5(5-1)(5-2)}{6}\right.$$

$$\times -21 \Big\} + \Big\{ \frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{24} \times 29 \Big\}$$

$= 5 + 5 - 1\ 25 - 1\ 312 + 1{\cdot}132$

$= 11\ 132 - 2\ 560$

$= 8\ 562 = 9$ व्यक्ति

अत 15 वर्ष से कम आयु के व्यक्तियो की सख्या 9 है।

लैग्रेंज सूत्र (Lagrange's Formula)—लैग्रेंज का अन्तर्गणन सूत्र ऐसा है जिसके द्वारा किसी भी परिस्थिति में, चाहे वर्ग विस्तार समान हो या न हों, अन्तर्गणन अथवा बहिर्गणन किया जा सकता है। जहा न्यूटन रीति अथवा वक्र अन्वायोजन रीति काम मे नही आ सकती वहा लैग्रेंज का सूत्र ही काम देता है। सूत्र इस प्रकार है —

$$y_x = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2) \quad \cdot \quad \cdot (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2) \ \ldots \ \ldots (x_0-x_n)}$$

$$+ y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2) \quad \ldots (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2) \ \ldots \ \ldots (x_1-x_n)}$$

$$+ \ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$+ y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1) \ \ldots \ \ldots (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1) \ \ldots \ \cdot (x_n-x_{n-1})}$$

सूत्र को निम्न लिखित उदाहरण से समझाया गया है।

उदाहरण 15 6

एक विदेशी बीमा कम्पनी 1000 रु० के 20 वर्ष के बीमा पत्र पर निम्नलिखित दर लेती है।

आयु	बीमा दर (रु०)
20	36
25	39
30	43
35	47

28 वर्ष की आयु की बीमा दर निकालिये।

लैग्रेंज के सूत्र द्वारा—

आयु Age (X)		बीमा दर Premium (y) Rs	
20	x_0	36	y_0
25	x_1	39	y_1
30	x_2	43	y_2
35	x_3	47	y_3

$x = 28$

13 68 − 12 64 प्राप्त ...

हल —

∵ ज्ञात मूल्य 4 हैं

$\therefore (Y - 1)^4 = 0$

$or \ Y^4 - 4Y^3 + 6Y^2 - 4Y^1 + Y^0 = 0$

मूल्य प्रतिस्थापन करने पर

$Y^4 - (4 \times 70) + (6 \times 50) - (4 \times 45) + 30 = 0$

$or \ Y^4 - 280 + 300 - 180 + 30 = 0$

$or \ Y^4 - 460 + 330 = 0$

$or \ Y^4 = 460 - 330$

$= 130$ lakh rupees

अतः 1955 के लाभ का अनुमान 130 लाख रुपए है।

अन्तर्गणन तथा बहिर्गणन की रीतियो पर विचार करने के पश्चात् इनका महत्व अवश्य ही स्पष्ट हो गया होगा। अनेको तथ्यो का वास्तविक आगणन करने मे बहुत धन तथा श्रम खर्च करना पडता है, इसीलिए जनगणना प्रतिवर्ष नही ली जाती। अन्तर्गणन तथा बहिर्गणन द्वारा बहुत सा धन तथा समय बच जाता है तथा उद्देश्य की सिद्धि मे भी कोई अटचन नही आती।

साराश

आवश्यकता —[1] राजकीय कार्यों मे [2] व्यापारी के लिए [3] इकाई निकालने के लिए [4] तुलना के लिए

अन्तर्गणन की शुद्धता सामान्य समको के अनुसार ही होती है।

अन्तर्गणन एव बहिर्गणन बिन्दु रेखाओ तथा बीजगणित द्वारा किया जा सकता है।

वक्र अन्वायोजन रीति सूत्र

$$Y = a + bX + cX^2 + dX^3 + eX^4 \cdots nX^n$$

न्यूटन की प्रगतिमान अन्तर रीति —

सूत्र —

$$y_x = y_0 + x\Delta_0^1 + \frac{x(x-1)}{1 \times 2}\Delta_0^2 + \frac{x(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3}\Delta_0^3 + \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\Delta_0^4 \cdots \cdots$$

न्यूटन-गॉस रीति :

$$y_x = y_0 + x\Delta^1 y_0 + \frac{x(x-1)}{1 \times 2}\Delta^2 y_{-1} + \frac{x(x-1)(x+1)}{1 \times 2 \times 3} \times \Delta^3 y_{-1} + \frac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}\Delta^4 y_{-2}$$

न्यूटन-गॉस प्रघोमुख रीति —

$$y_x = y_0 - x\,\Delta^1 y_{-1} + \frac{x(x+1)}{1\times 2}\,\Delta^2 y_{-1} - \frac{x(x+1)(x-1)}{1\times 2\times 3}\times$$

$$\Delta y_{-2} + \frac{x(x+1)(x-1)(x-2)}{1\times 2\times 3\times 4}\,\Delta^4 y_{-3}$$

लेग्रेंज सूत्र—

$$y_x = y_0\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ \ldots\ \ldots\ (x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ \ldots\ \ldots\ (x_0-x_n)}$$

$$+y_1\,\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ \ldots\ (x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ \ldots\ (x_1-x_n)}$$

$$+\ \ldots\ \ldots\ \ldots$$

$$+y_n\,\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ \ldots\ \ldots\ (x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\ \ldots\ \ldots\ (x_n-x_{n-1})}$$

द्विपद विस्तार विधि :

$(Y-1)^n = 0$

EXERCISE XV

1. What is interpolation ? Explain its necessity by taking a few concrete examples.

2. Give a few examples of the use of Interpolation in Business Statistics

3 What assumptions are made in interpolating figures in a series ? How far are interpolated or extrapolated figures to be relied upon ?

4 Give a brief account of what, in your opinion, is the most accurate method of forecasting the future trends in the size of population of any given country. (M Com Agra 1947)

5. How will you calculate changes in intercensal population ?

Can you forecast the population in 1949 on the basis of census figures for 1921, 1931 and 1941 ? (M Com Agra 1945)

6 Discuss the various assumptions of the Algebraic methods of Interpolation

7. Estimate the anunal sale of pencils for 1942 from the following records of wholesale merchants

Year	Sales of pencils in lakhs of dozens
1932	25
1936	30
1940	40
1944	55
1948	60

Ans 47 46 doz pencils

8 From the following data, estimate the number of persons earning wages between 60 and 70 rupees

Wages in Rupees	No of persons (in thousands)
Below 40	250
40 - 60	120
60 - 80	100
80 - 100	70
100 - 120	50

Ans 53 6 thousand persons (M Com Agra 1951)

9 Extrapolate the population of a town for 1946 from the following data about its population during the previous four censuses.

Census year	Population in Thousands
1911	573
1921	468
1931	454
1941	484

Ans. 532 06 thousand (M Com Raj 1950)

10 The age of mothers and the average number of children born per mother are given in a table below Interpolate the average number of children born per mother aged 30—34

Age of Mother	No of children born
15 - 19	0 7
20 - 24	2 1
25 - 29	3.5
30 - 34	? ?
35 - 39	5 7
40 - 44	5.8

Ans. 4·79 = 5 children (M Com Alld 1946)

11. The annual sales of a concern are given below —

Year	Sales of cloth in lakhs of yds
1915	125
1920	163
1925	204
1930	238
1935	282

Assuming the conditions of the market to be the same, estimate the sales for year 1940

Ans 380 lakh yards (M A Patna, 1941)
(M A Agra, 1960)

12 Determine by Lagange's formula the percentage number of criminals under 35 years

Age	% number of criminals
under 25 years	52 0
„ 30 „	67 3
„ 40 „	84 1
„ 50 „	94.4

Ans —77 43% (M A Agra, 1934)

13 Interpolate the missing figures in the following table of rice cultivation.

Year	Acres in millions
1911	76 6
1912	78.7
1913	?
1914	77.7
1915	78 7
1916	?
1917	80 6
1918	77 6
1919	78 7

Ans 78 2 and 80.5 million acres. (B Com Agra 1943)

14 Interpolate the missing figure in the following table with the help of a suitable formula.

Years	Acres in millions
1911	1331
1912	1728
1913	2197
1914	?
1915	3375
1916	4096
1917	4913

Ans. 2744 million acres (M A Delhi 1953)

15. Estimate the expectation of life at the age of 46 years using the following data.

Age in years	Expectation of life
10	35 4 years
15	32 3 „
20	29 2 „
25	26 0 „
30	23.2 „
35	20 4 „

Ans 31 7 years (M A Agra, 1943)

16 Estimate the missing figures in the following table.

x	20	22	25	30	35
y	73	?	198	573	1198

Ans. 93. (B Com, Luck. 1951)

17. The following table gives the number of income tax assesseess in U P.

Income not exceeding	No of Assessees
Rs 2,500	7,167
Rs. 3,000	10,576
Rs. 5,000	17,200
Rs 7,500	20,505
Rs. 10,000	21,975

Estimate the number of assessees with income not exceeding Rs 4,000

Ans 14,898 (M. A Alld 1944)

18 From the following life table, calculate the number living at ages 25, 35, 47

Age (in years)	20	30	40	50
Number living	51	44	35	24

Ans 48, 40, 28 [निकटतम] (M. A. Alld. 1952)

19 Estimate the probable number of persons earning between Rs. 40 and 50 from the following data

Income in Rs	below 20	20–40	40–60	60–80	80–100
No of persons	120	145	200	250	150

Ans. 90 persons

20 The population of a town is given below in the years mentioned What is it likely to be in 1939 and 1944 ?

Year	1940	1941	1942	1943
Population	24,367	27,895	38,018	49,950

How far would you rely on your results ?

Ans 32,200 and 59,200 (B Com. Agra, 1948)

21 From the following table find the number of students who obtained less than 45 marks ·

Marks	No. of students
30 – 40	31
40 – 50	42
50 – 60	51
60 – 70	35
70 – 80	31

Ans 48 students [निकटतम] (M Com Alld 1952, M A Raj 1960)

22 State the assumptions underlying the finite differences formula employed in interpolation. Calculate the expectation of life at the age of 22 using the following data .

Age	Expectation of life
10	35 45
15	32 20
20	29 06
25	26 03
30	23 11
35	20 41

Ans 27 85 years (B Com Nagpur 1943)

23 Find an interpolated figure for population of 1896 from the following table

Year	Population
1881	25,974
1891	29,003
1991	32 528
1911	36,070

State the assumptions underlying the formula employed

Ans 30733 (B Com. Nagpur 1942)

24 Estimate the number of persons having incomes between 1000 and 1500 in the table given below in the groups A and B

Income in Rs	No of persons Group A	No of persons Group B
Below 500	6,000	5,000
500 - 1000	4,250	4,500
1000 - 2000	3,600	4,800
2000 - 3000	1,500	2,200
3000 - 4000	650	1,500

Ans 2,141 and 2,844 persons (B Com Agra 1947)

25 Find out by interpolation from the following data the number of workers earning Rs 24 or more but less than Rs 25

Earning less than Rs	No of workers
20	296
25	599
30	804
35	918
40	966

Ans 53 workers

26 The following table gives the population of Indore at the time of the last six censuses

1881	75,401
1891	82 984
1901	86,636
1911	44,947
1921	93,001
1931	1,27,327

Estimate the population for 1941.

Ans 2,20750

3.53 = 12 04 [illegible]

Hint—Population for 1911 is an abnormal figure Hence first interpolate the figure for 1911 It is 86,547 Then interpolate the figure for 1941 OR, drop the abnormal figure for 1911 and adopt Langrage's formula (B Com Agra 1944)

27 The annual sales of a concern are given below—

Years	Sales in Lakh Rs
1953	23 4
1954	24 2
1955	?
1956	28 3

Find out the missing figure

Ans Rs 25 83 lakhs

28 The gross Profit of a Company during the last 5 years is as follows

Years	Gross profit in (thousand Rs.)
1951	32 3
1952	32 6
1953	34 6
1954	?
1955	38.1

Estimate the profit for 1954

Ans Rs 36 9 thousand

29 The population of a city during the last four censuses was as follows

Population in Thousand	364	412	465	538
Census (years)	1921	1931	1941	1951

Estimate the population in 1961

Ans 646 thousand

30 The population of a town increases according to the compound interest law In 1890 and 1940 it was 19,500 and 34,670 respectively Use it to estimate the population in 1926 and 1945

Hint—Apply $Y = a + bX$

Ans. 30,422 and 36,187.

31 The population of India in 1950-51 was 356 million and in 1960-61 it was 438 million. Estimate the population in the intervening years and the yearly rate of increase

Ans

1951-52	'52-53	'53-54	'54-55	'55-56	'56-57	'57-58
363 5	371 2	379 0	387 1	395'3	403 6	412 2

'58-59	59-60	(in millions)
420 9	429 8	

Annual Rate of increase is 2 1%

Hint—Apply $r = \sqrt[n]{\frac{P_n}{P_o}} - 1$

32. The following table relates to marks obtained by 130 candidates at the I. A S Exam. in the paper of Statistics. Find out the number of candidates who secured first class marks in the examination assuming that 60% are the minimum marks for securing a first class, and marks are awarded in whole numbers only.

(Marks out of 200)	No of candidates
More than 50	130
" " 72	126
" " 90	80
" " 110	36
" " 140	14

Ans 24 93 = 25 candidates.

Hint—Adopt Lagrange's formula and find y when x = 119

33 The following are the marks obtained by 492 candidates in a certain examination

Marks (Not more than)	Candidates
40	210
45	253
50	307
55	381
60	413
65	492

Find out the no of candidates (a) who secured more than 48 but not more than 50 marks, (b) less than 48 but not less than 45 marks

Ans. (a) 27, (b) 27. (M. Com Raj 1960)

34. The following figures relate to the working of a Tramway

Rate per unit (nP)	No passangers
5	50,000
4.5	40,000
4	60,000
3 5	1,00,000
3	1,50,000

Estimate the probable number of passangers if the rate be 4'2 nP.
(T. D. C II Yr. Raj. 1962)

Ans 49040 thousand passangers

Hint—(Value of x = 1 6 by Newton's Method of advancing differences)

35. Use some appropriate interpolation method and reconstruct the following frequency table with the intervals halved :—

X	Frequency
0 — 2	35
2 — 4	52
4 — 6	84

(M A Raj 1961)

(Hint —Convert into cumulative frequency table and apply Newton's method)

Ans Frequency for 0 — 1, 2 — 3 and 5 — 6 would be 21, 22 and 38 respectively

36 From the following table of yearly premiums for policies maturing at different ages, estimate using a suitable formula for interpolation the premium for a policy maturing at age 47

Age (Next birth day) (Years)	45	50	55	60	65
Premium in rupees	28 71	24 04	20 83	18 62	17 12

Ans 26 63 (M Com Raj 1961)

37 Given

μ_0	μ_1	μ_2	μ_3	μ_4
3	5	10	12	15

Evaluate (a) μ_{10} and $\mu_{1\ 5}$

Ans $\mu_{10} = 1538$ and $\mu_{1\ 5} = 7.735$

38. The following table gives the population of India at the time of the last five censuses —

Year	1911	1921	1931	1941	1951
Population (in lakhs)	2522	2514	2791	3168	3613

The census commissioner of India estimates the population of India for 1961 as 4078 lakh By using any formula of extrapolation verify the correctness of the above estimate

Ans The population of India for 1961 would be 4247 lakhs and so the estimate is not correct

39 Given log 654 = 2 8156 , log 658 = 2 8182

log 659 = 2 8189 , log 661 = 2 8202

Find log 656 by using Lagrange's formula of interpolation.

Ans. Log 656 = 2 8169 (M A Raj. 1961

40 The following are the numbers of deaths in four successive ten-year age groups Estimate the number of deaths at 45—50 and 5 0—55 age groups

Age group	Deaths
25—	13,229
35—	18,139
45—	24,225
55—	31,496

(M A Raj 1961)
(P C. S 1952)

Ans Death at 45—50 = 3487

„ „ 50—55 = 3784

(Hint—use Newton's formula of Advancing differences.)

अध्याय १६

काल श्रेणी का विश्लेषण

(Analysis of Time Series)

किसी भी वस्तु के परिवर्तन होने के सम्बन्ध में अनेको प्रकार के प्रभावो के अतिरिक्त समय का भी बहुत प्रभाव होता है। हमें इस प्रकार के परिवर्तनो के सम्बन्ध में दो बातो का ध्यान रखना चाहिए — (1) इन परिवर्तनो का अध्ययन और (2) यह पता लगाना कि उनका अन्य प्रकार की काल श्रेणी के परिवर्तनो से क्या सम्बन्ध है। काल श्रेणी किसी चल का दूसरे चल काल के साथ सम्बन्ध बताती है।

समय के साथ साथ किसी वस्तु के मूल्य में विभिन्न कारणो से परिवर्तन होते हैं जैसे जन सख्या मे वृद्धि, रुचि मे परिवर्तन, उत्पादन व्यय कम होना, इत्यादि। यदि इन प्रभावो में कोइ परिवर्तन न हो तो चल में भी किसी प्रकार परिवर्तन नही होगा। परन्तु साधारणतया ऐसा नही होता एव परिवर्तन होते ही रहते हैं और हम उनके विषय में तभी जान पाते हैं जब चल मे परिवर्तन होते हैं।

अत यदि हम यह ज्ञान करना चाहे कि व्यावहारिक रूप में वस्तु स्थिति कैसी है तो हमें चल के मूल्यो में प्रभावों की महत्ता मे होने वाले परिवर्तनो के कारण एव होने वाले परिवर्तनो का अध्ययन करना पढेगा। अर्थशास्त्र मे किसी भी सम्बन्ध में दो प्रकार की दशाए होती हैं—एक स्थैतिक (Static) जिसमें कोई परिवर्तन नहीं होता और दूसरी प्रवैगिक (Dynamic) जिसमें परिवर्तन होता रहता है।

काल श्रेणी का अध्ययन प्रवैगिक (dynamic) दशा को समझने के लिए किया जाता है।

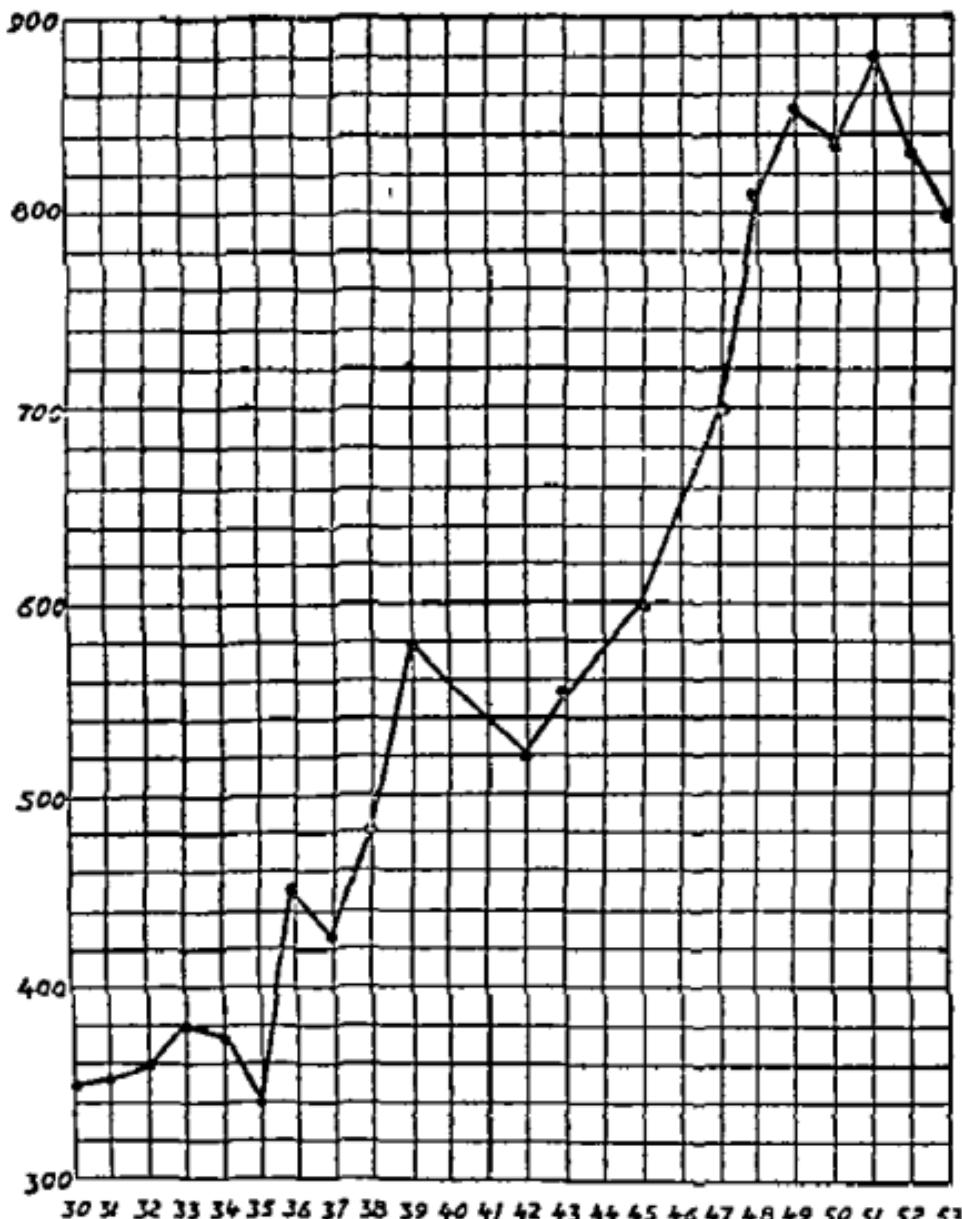
काल श्रेणी का अध्ययन करने के लिए यह जानना जरूरी है कि उनमे परिवर्तनो के क्या कारण हैं। इन परिवर्तनो को देखकर इन प्रभावो के परिवर्तनो को कुछ मुख्य भागो में रखा जा सकता है। यह भाग कुछ निश्चित स्वभाव वाले प्रभावो को बताते हैं। इन्हे काल श्रेणी सघटक (component) कहा जाता है क्योकि इन सब में एक साथ होने वाले परिवर्तनो के कारण ही काल श्रेणी बनती है।

उदाहरण 16 1

चल 'क' के मूल्य विभिन्न वर्षों मे

वर्ष	मूल्य	वर्ष	मूल्य
1930	350	1942	520
31	352	43	550
32	360	44	430
33	380	45	600
34	375	46	742
35	340	47	700
36	450	48	818
37	430	49	853
38	480	50	840
39	580	51	880
40	560	52	835
41	540	53	705

900
800
700
600
500
400
300

30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53

किसी भी प्रकार की काल श्रेणी का विश्लेषण करने के लिए हमे तीन प्रकार के परिवर्तनों का अध्ययन करना होगा .—

1 सुदीर्घकालीन उपनति (Secular trend, general trend or trend)
2 अल्पकालीन उच्चावन (Short time Fluctuations)
   (a) आर्तव विचरण (Seasonal variations)
   (b) चक्रीय उच्चावचन (Cyclic Fluctuations)
3. दैव या अनियमित उच्चावचन (Random or Irregular Fluctu-
)

काल श्रेणी मे परिवर्तनों का अध्ययन करने के लिए यह जरूरी है कि एक समय मे एक ही प्रकार के परिवर्तनो का अध्ययन हो अर्थात् दीर्घकालीन या अल्पकालीन । ऐसा करने के लिए हमे एक समय मे होने वाले परिवर्तनो का ही अध्ययन करना होगा । यदि हमे दीर्घकालीन परिवर्तनों का अध्ययन करना है तो हमे अल्पकालीन उच्चावचनो को अलग करना होगा । इसके विपरीत यदि अल्पकालीन परिवर्तन को देखना है तो दीर्घकालीन परिवर्तन को अलग करना होगा ।

दीर्घकालीन उपनति (Secular Trend)—यदि किसी भी वस्तु के कुछ समय के अ को को ग्राफ पर प्रकट किया जाय और उसका हम अध्ययन करें जैसे सारणी 16 1 मे दिखाया गया है तो हम उस चित्र से दो निष्कर्ष निकालते हैं–(१) कुछ समय मे वस्तु के मूल्य बढते है या घटते है अर्थात् दीर्घकाल मे उसकी क्या प्रवृत्ति है । (२) यदि उसके मूल्यो का थोडे थोडे समय के हिसाब से अध्ययन करे तो किस प्रकार के परिवर्तन होते हैं ।

सारणी 16 1 के चित्र को देखने मे पता लगता है कि वस्तु 'क' के मूल्यो की दीर्घकालीन मे प्रवृत्ति बढने की है और बढने की प्रवृत्ति को दिखाने वाले सवटक को सुदीर्घकालीन उपनति कहते हैं । जिस प्रकार बढने की प्रवृत्ति होती है उसी प्रकार घटने की भी प्रवृत्ति हो सकती है ।

दीर्घकालीन उपनति का अध्ययन करने के लिए यह जरूरी है कि वस्तु के मूल्य मे जो उच्चावचन हो उसको दूर कर दिया जाये । ऐसा करने से वस्तु के मूल्यो की लम्बे समय की प्रवृत्ति (Trend) का पता लग जाता है और हम कह सकते हैं कि वस्तु के मूल्य दीर्घकाल मे किस प्रकार व्यवहार करते हैं ।

सुदीर्घकालीन उपनति (secular trend) का जानना —

लम्बे समय की उपनति जानने के लिए नीचे लिखे तरीके काम मे लाये जाते हैं –

(१) निरीक्षण द्वारा उपनति अन्वायोजन (Trend fitting by Inspection or Free hand Curve Method)

इस तरीके के आधार पर मूल्यो मे होने वाले परिवर्तनो को रेखा द्वारा प्रकट किया जाता है । रेखा खीचते समय यह ध्यान रखा जाता है कि वह परिवर्तनो की दीर्घकालीन प्रवृत्ति अच्छी प्रकार से प्रकट कर सके । इस प्रकार की बनाई गई रेखा परिवर्तन की दिशा प्रकट करेगी । यह रेखा थोडे समय के परिवर्तनो का अध्ययन कतई नही करती और इसी लिये ही इसको उपनति (Trend) कहते हैं ।

लाभ —(१) सबसे सरल है ।

(२) उपनति रेखा शीघ्रतापूर्वक जानी जा सकती है ।

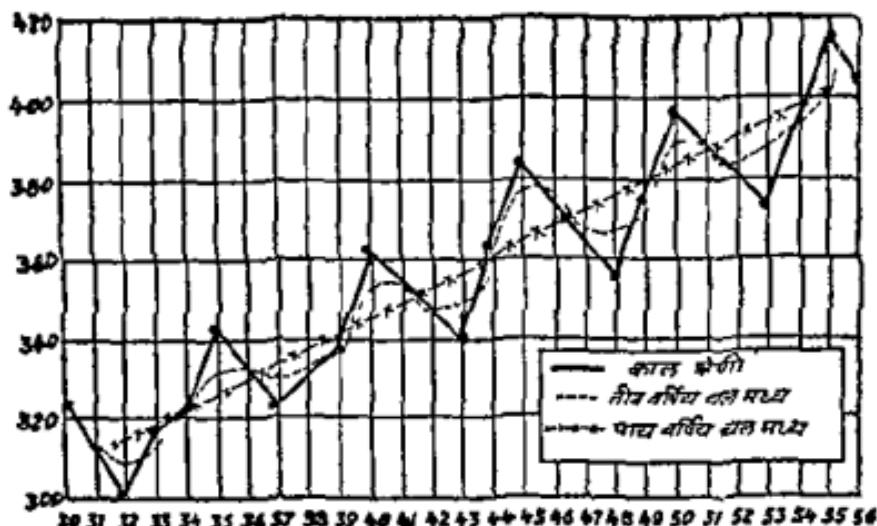
(३) गणित की कोई जटिल समस्या प्रयोग मे नही आती । अत हर एक व्यक्ति यह काम कर सकता है ।

दोष —(१) यह रेखा सांख्यिक की अभिनति (Bias) से प्रभावित हो जाती है और भिन्न-भिन्न व्यक्ति भिन्न-भिन्न प्रकार की उपनति दिखा सकते हैं ।

(२) चल माध्य की रीति —(Moving Average)

दीर्घकालीन उपनति मालूम करने मे चल माध्य का ही अधिकतर प्रयोग किया जाता है। इस माध्य को निकालने के लिए पहिले अवधि (Periodicity) मालूम कर ली जाती है और फिर उस अवधि का माध्य मालूम किया जाता है। बाद में एक पहले का वर्ष छोड दिया जाता है और बाद मे वर्षो को जोड कर फिर माध्य निकाल लिया जाता है। यही क्रम करते रहने से अन्त तक का चल माध्य मालूम किया जाता है। इसको विस्तारपूर्वक अध्याय ७ मे समझा दिया गया है अत यहा उसको एक उदाहरण से समझना अधिक अच्छा है।

उदाहरण 16.2

वर्ष	वार्षिक अंक	3 वर्षीय चल माध्य	5 वर्षीय चल माध्य
1930	325 ✓		
31	313 ✓	313	
32	301 ✓	310	315
33	315 ✓	313	319
34	323 ✓	328	324
35	345 ✓	334	329
36	335	335	332
37	325	331	337
38	333	336	341
39	349	349	346
40	365	357	351
41	359	357	352
42	349	350	356
43	341	352	360
44	365	364	363
45	385	375	366
46	375	375	370
47	365	366	372
48	359	366	374
49	375	377	377
50	397	387	380
51	389	389	383
52	381	382	387
53	375	383	391
54	395	395	394
55	415	405	
56	405		

चल माध्य के लाभ—1. यह माध्य दीर्घकालीन उपनति को आसानी से प्रकट कर देती हैं।

2 माध्य निकालना भी सरल है । केवल यही जानना आवश्यक है कि एक वर्ष छोडत जायें और बाद का एक जोडते जायें।

दोष—1. इस माध्य के प्रयोग से उपनति को प्रकट करने के लिए सभी तथ्यो को प्रकट नही कर सकते। जसे ऊपर के उदाहरण मे 1930 से 1932 और 1953 से 1956 के वर्षों की उपनति नही दिखा सकते।

2 इसका प्रयोग हर एक काल श्रेणी के लिये सफलता के साथ नही कर सकते। इसका प्रयोग उन्ही काल श्रेणियो के लिए हो सकता है जिनमें अवधि (periodicity) साफ प्रतीत होती है।

नोट—ऊपर बताये गये दोषों में से पहिला दोष निम्न प्रकार से दूर किया जा सकता है।

(१) प्रारम्भिक व अन्तिम वर्ष के तथ्य, रेखा को स्वत बढा कर दिखाये जा सकते हैं।

(२) कल्पित अ क पहिले व बाद में और जोड कर प्रारम्भिक व अन्तिम वर्षों तक के अ क मालूम किये जा सकते हैं।

यह दोनो तरीके केवल उपसाघन है।

(३) अल्पतम-वर्ग रीति—(Method of Least Squares)

यह दीर्घकालीन उपनति मालूम करने की सबसे परिष्कृत रीति है। इस रीति से सर्वोत्तम अन्वायुक्त रेखा (Line of Best fit) निकाली जाती है, और वह रेखा उपनति बनाती है। इसको प्रयोग में करते समय निम्न बातो का ध्यान रखना चाहिए।

(1) उपनति रेखा से अन्य बिन्दुओ की दूरी का योग शून्य हो।

(2) उपनति रेखा से लिये गये विचलनो (deviations) के वर्गों का योग न्यूनतम (least) हो। इसीलिये इसको अल्पतम-वर्ग रीति कहा जाता है।

यह रीति अच्छी तरह समझ मे आ जाय इसलिए नीचे एक उदाहरण दिया गया है।

उदाहरण 163

वर्ष 1	उत्पादन (करोड़ों मनों में) 2 Y	मध्य वर्ष से कालिक विचलन 3 X	विचलन का वर्ग X^2 4	गुणा 2 × 3 XY 5	उन्नति-कोटि 6
1950	12	−3	9	−36	12.7−3×.39 =11.53
1951	10	−2	4	−20	12.7−2×.39 =11.92
1952	13	−1	1	−13	12.7−1×.39 =12.31
1953	13	0	0	0	12.7+0×.39 =12.70
1954	14	+1	1	+14	12.7+1×.39 =13.09
1955	15	+2	4	+30	12.7+2×.39 =13.48
1956	12	+3	9	+36	12.7+3×.39 =13.87
	89 ΣY	0	28 ΣX^2	+11 ΣXY	88.90*

*उपरोक्त संख्या 89 होनी चाहिए थी। अन्तर निकटतम पूर्णांक निकालने के कारण है, अतः समायोजन करके इसे 89 के बराबर कर लेना चाहिए।

समान्तर मध्यक $= \bar{X} = \frac{\Sigma Y}{N} = \frac{89}{7} = 12.7$

वार्षिक वृद्धि की दर (Annual Rate of increase) $= \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{11}{28} = .39$

इस उदाहरण मे कालम 6 मे दिये गये मूल्य उपनति प्रवृति प्रगट करते हैं। इनको मालूम करने का निम्न तरीका है —

[1] उत्पादन संख्या का समान्तर मध्यक मालूम कीजिए। यह सर्वोत्तम अन्वायुक्त रेखा का मान्य बिन्दु है।

[2] मध्य वर्ष मे अन्य वर्षों का कालिक (Time deviation) विचलन निकालिए।

[3] विचलनों का वर्ग मालूम कीजिए।

[4] उत्पादन अंक को (2) को विचलनों (3) से गुणा कर उनका योग मालूम कीजिए। यह कालम 5 मे दिया गया है।

[5] कालम 5 के योग को कालम 4 के योग से भाग दीजिए। भाग देने से जो राशि प्राप्त होगी वह उपनति की प्रति वर्ष माध्य वृद्धि प्रकट करेगी। इस उदाहरण मे यह 39 है।

[6] समान्तर मध्यक मध्य वर्ष अर्थात् 1953 के सामने कालम 6 मे लिखना चाहिए और फिर उपनति की अन्य वर्षों की राशि या कोटि मालूम करने के लिए मध्य वर्ष से पहिले के वर्षों मे 12.7 मे से कम करनी चाहिए और बाद के वर्षों मे जोडनी चाहिये। यह अन्तर .39 प्रति वर्ष है अत. इसको वर्षों के हिसाब से जोडना या कम करना चाहिए। अगर वार्षिक दर का चिन्ह ऋणात्मक होता तो मध्य वर्ष से पहिले के वर्षों के मूल्य मे 39 का उसी प्रकार जोड़ा जाता और बाद के वर्षों के मूल्य मे से इसे घटाया जाता।

उपरोक्त उदाहरण [16 3] मे मदो की संख्या अयुग्म [odd] है। यदि मदो की संख्या युग्म [even] होती तो ऊपर दी गई प्रणाली मे निम्न हेर फेर करना पड़ता है।

उदाहरण 16 4

वर्ष	उत्पादन (पौंडो मे) Y	मध्य वर्ष से कालिक विचलन X	विचलनों का वर्ग X^2	XY	Trend Values उपनति अंक
1951	107	−5	25	−535	108.76
1952	110	−3	9	−330	109 99
1953	114	−1	1	−114	111.22
		=0			
1954	112	+1	1	+112	112 44
1955	115	+3	9	+345	113 67
1956	113	+5	25	+565	114.90
	671		70	43	671
	ΣY		ΣX^2	ΣXY	

समान्तर मध्यक $[\text{Mean}] = \frac{671}{6} = 111.83$

अर्ध-वार्षिक वृद्धि (Half-yearly rate of increase) $= \frac{\Sigma XY}{\Sigma X^2} = \frac{43}{70} = \cdot615$

उपरोक्त प्रश्न में मदो की सख्या युग्म होने के कारण पिछले प्रश्न की तरह कोई विशेष वर्ष से विचलन नही निकाले जा सकते क्योकि मध्य काल 1953 और 1954 के बीच का समय है। अत उस समय से 1953 तक का [आधे वर्ष का] विचलन − 1 है और उसी समय से 1954 तक [आधे वर्ष का] विचलन + 1 है। जब आधे वर्ष का विचलन 1 के बराबर है तो पूरे वर्ष का विचलन 2 होगा। अत. 1952 का विचलन − 3 और 1955 का विचलन + 3 होगा। इसी प्रकार 1951 का विचलन − 5 और 1956 का विचलन + 5 होगा। इसी कारण उपरोक्त प्रश्न मे '615 अर्ध-वार्षिक वृद्धि है। समान्तर मध्यक 111 83 में से '615 घटाने पर 1953 का उपनति अंक 111.22 होगा और 111 83 में '615 जोडने पर 1954 का उपनति अंक 112 44 है। लेकिन 1952 का उपनति अंक 111.22 मे से '615×2=1.23 [पूरे वर्ष की वृद्धि] घटाने पर 109.99 और 1954 का उपनति अंक 112.44 मे 1 23 जोडने पर 113 67 होगा। इसी प्रकार 1951 और 1955 के उपनति अंक भी 1 23 क्रमश. घटाने या बढ़ाने से प्राप्त किए गये हैं।

दीर्घकालीन उपनति बीज-गणितीय समीकरणों [equations] से भी मालूम की जाती है। इसमें सरल-रेखा-समीकरण [Straight-Line-Equation] $Y = a + bx$ का प्रयोग होता है, जो निम्न उदाहरण से स्पष्ट होगा।

उदाहरण 16 5

वर्ष	उत्पादन [पौंडो में] Y	1953 से कालिक-विचलन X	X^2	XY	उपनति-अंक [Trend Values]	उपसादित उपनति-अंक Y
1951	107	−2	4	−214	108 76	109
1952	110	−1	1	−110	109 99	110
1953	114	0	0	0	111 22	111
1954	112	1	1	112	112.45	112
1955	115	2	4	230	113 68	114
1956	113	3	9	339	114 91	115
	671 (ΣY)	3 $\Sigma(X)$	19 (ΣX^2)	357 $\Sigma(XY)$		671

$\therefore Y = a + bX$

उपरोक्त समीकरण की निम्न प्रमामान्य समीकरण [Normal equations] है—

$\Sigma(Y) = Na + b\Sigma(X)$ (i)

$\Sigma(XY) = a\,\Sigma(X) + b\Sigma(X^2)$ (ii)

मूल्यो में प्रतिस्थापन करने पर —

$671 = 6a + 3b$ (i)

$357 = 3a + 19b$ (ii)

(ii) को 2 से गुणा करने पर :—

714 = 6 a + 38 b (iii)

(i) को (iii) मे से घटाने पर

43 = 35 b

1 .3 = b

b के मूल्य का (1) में प्रतिस्थापन करने पर

671 = 6 a +3 69

667 31 = 6a

111 21 = a

अत समीकरण हुई—Y = 111 22+1 23 X

अब X की कालम 3 मे दिए हुए मूल्यो पर निर्भर Y के मूल्य ज्ञात कर लीजिए।

यदि X	Y
−2	[111 22 —(2 × 1 23)] = 108 76
−1	109 99
−0	111 22
+1	112 45
+2	113 68
+3	114 91

सरल रेखा समीकरण ($Y = a + bX$) से उपनति अक निकालने पर मदो की सख्या युग्म [even] हो या अयुग्म [odd], प्रणाली मे कोई हेर-फेर नही करना पडता।

द्वितीय दर्जे का परवलयिक वक्र [The Second Degree Parabola] अडे की शक्ल के किसी भाग को परवलयिक वक्र [Parabolic curve] कहते हैं। बन्दूक की गोली, मिसाइल [missile] आदि सीधे न जाकर परवलयिक वक्र बनाते हुये आगे बढ़ते हैं। द्वितीय दर्जे के परवलयिक वक्र के मूल्य ज्ञात करने के लिये निम्न समीकरण का प्रयोग किया जाता है।

$$Y = a + bX + cX^2$$

उपरोक्त समीकरण की निम्न प्रसामान्य (normal) समीकरण हैं—

$$\Sigma(Y) = Na + b(\Sigma X) + c(\Sigma X^2)$$

$$\Sigma(XY) = a(\Sigma X) + b(\Sigma X^2) + c(\Sigma X^3)$$

$$\Sigma(X^2Y) = a(\Sigma X^2) + b(\Sigma X^3) + c(\Sigma X^4)$$

अब X की कालम 3 में दी हुई मूल्यों पर निर्भर Y के मूल्य ज्ञात कर लीजिये।

यदि X	Y
−2	24 872 $\left(32.9+(-2\times5.3)+[6.43\times(-2)^2]\right)$
−1	28 243
0	32 913
1	38 843
2	46 572

इसी प्रकार तृतीय, चतुर्थ या अधिक दर्जे के परवलयिक वक्र के मूल्य ज्ञात किए जा सकते हैं।

अल्पकालीन उच्चावचन (Snort-time Fluctuations)

अल्पकालीन परिवर्तनों का अध्ययन करने के लिए काल श्रेणी में से दीर्घ कालीन–उन्नति का निरसन कर दिया जाता है। ऐसा कर देने से जो तथ्य बच जाते हैं वह इन उन्नति शून्य न सामग्री के अल्पकालीन उच्चावचनों को प्रकट करेंगे।

उदाहरण 16 2 में दिए गए अंकों से अल्पकालीन उच्चावचनों की गणना उदाहरण 16 7 में दिखाई गई है।

उदाहरण 16.7

वर्ष	वार्षिक अंक	पंचवर्षीय चलमाध्य	उपनति (चल-माध्य से विचलन)
1	2	3	4
1930	325		
31	313		
32	301	315	− 14
33	315	319	− 4
34	323	324	− 1
35	345	329	+16
36	335	332	+ 3
37	325	337	− 12
38	333	341	− 8
39	349	346	+ 3
40	365	351	+14
41	359	352	+ 7
42	349	356	− 7
43	341	360	− 19
44	365	363	+ 2
45	385	366	+19
46	375	370	+ 5
47	365	372	− 7
48	359	374	− 15
49	375	377	− 2
50	397	380	+17
51	389	383	+ 6
52	381	387	− 6
53	375	391	− 16
54	395	934	+ 1
55	415		
56	405		

ऊपर दिये गये विचलन वार्षिक अङ्को से लिए गये हैं और इनके धनात्मक या ऋणात्मक चिन्ह भी साथ दिखाये गये हैं। यदि इनको भूमिक आधार पर दिखाया जाए तो इनके द्वारा बनी रेखा अल्पकालीन उच्चावचनो कोप्रकट करेगी। इसमे आर्तव और चक्रीय तथा अनियमी उच्चावचनो का मिश्रण होगा। इनका भी अलग अलग अध्ययन किया जा सकता है।

आर्तव उच्चावचनो का नापना (Measurement of Seasonal Fluctuations) — यह कार्य तीन प्रकार से किया जा सकता है —

(1) आर्तव-देशनाको की रचना द्वारा जो मासिक माध्य रीति पर आधारित हो। इस रीति के द्वारा प्रत्येक महीने की अलग अलग वर्षों की सख्या को जोडा जाता है और प्राप्त अङ्को को वर्षों की संख्या से विभाजित करने से प्रति मास के माध्य का पता लग जाता है। फिर मासिक योगो के माध्य की गणना की जाती है, यह या तो मासिक योगो को 12 से विभाजित करके की जाती है या मासिक माध्य के योग को 12 से विभाजित करके।

इसके बाद प्रत्येक महीने के माध्य योग का मासिक माध्यो के माध्य से प्रतिशत अनुपात मालूम कीजिए।

जनवरी की प्रतिशतता निकालने के लिए

$$\text{पहली रीति से} = \frac{\text{जनवरी महीने का माध्य}}{\text{मासिक माध्यों का माध्य}} \times 100$$

$$= \frac{119 \times 100}{193\ 2} = 98\ 8$$

$$\text{दूसरी रीति से} = \frac{\text{जनवरी मास का योग}}{\text{मासिक योगों का माध्य}} \times 100$$

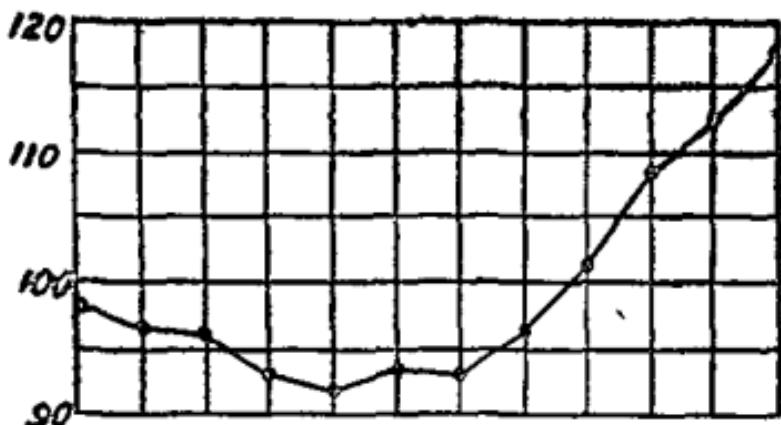
$$= \frac{955 \times 100}{966} = 98\ 8$$

यही प्रतिशतता आर्तव देशनाक हैं जो आर्तव उच्चावचनो को नापते हैं। निम्नलिखित उदाहरण से इसे अच्छी तरह समझा जा सकता है।

उदाहरण 16 8

महीने	गेहूँ का उत्पादन 1950	1951	1952	1953	1954	पाच वर्षों का मासिक योग	पाच वर्ष के माध्य	प्रतिशत
1	2	3	4	5	6	7	8	9
जनवरी	120	135	200	240	260	955	191	98.8
फरवरी	118	125	190	240	262	935	187	96 7
मर्च	112	133	200	225	260	930	186	96 3
अप्रेल	115	136	193	206	250	900	180	93.2
मई	113	140	190	200	242	885	177	91 6
जून	114	150	193	198	250	905	181	93.7
जुलाई	121	156	185	190	248	900	180	93.2
अगस्त	125	162	197	199	252	935	187	96 7
सितम्बर	130	165	205	215	260	975	195	100 9
अक्तूबर	132	172	221	240	290	1055	211	109 1
नवम्बर	145	185	224	243	288	1085	217	112.2
दिसम्बर	150	203	222	260	300	1135	227	117.5

योग 11595 2319

12 966 193 2

कालम 9 मे दी गई सख्यायें आर्तव उच्चावचन का स्वभाव बताती हैं। इनके स्वभाव को चित्र सख्या 16.5 से ग्रासानी से जाना जा सकता है।

(२) चल माध्य के ग्राधार पर —

इस रीति से ग्रार्तव देशनाक बनाने का निम्न तरीका है —

(१) पहिले चल माध्य मालूम कीजिए।

(२) ग्रसली सामग्री के प्रत्येक पद को सगत चल माध्य की प्रतिशतता के रूप मे प्रकट कीजिये।

(३) इस प्रकार प्राप्त प्रतिशतता को विन्यसित कीजिये ग्रौर प्रत्येक महीने के लिए मासिक माध्य मालूम कीजिए।

(४) मासिक माध्यो का माध्य ज्ञात कीजिए।

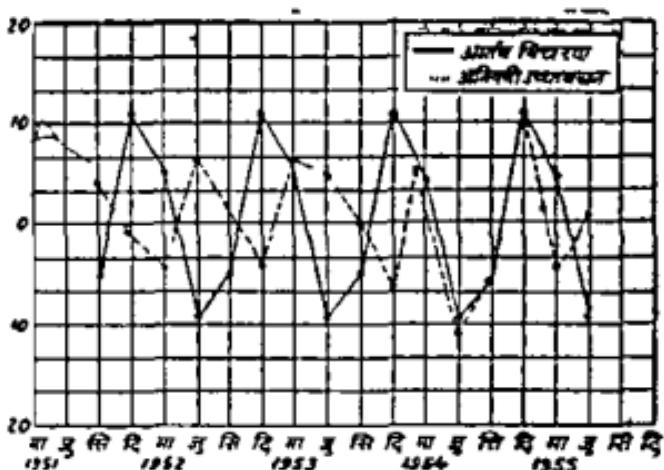
(५) मासिक माध्यो को, इनके माध्य को ग्राधार मान कर बनाए गए प्रतिशतता-नुपातो के रूप में रखिये। यह प्रतिशततानुपात ग्रार्तव देशनाक है। निम्नलिखित सारणी मे यह ग्रच्छी तरह समझ मे ग्रा जायगा।

उदाहरण 169

वर्ष	उत्पादन	12 मासिक चल मा०	चल माध्य केन्द्रित	ग्रल्प कालीन उच्चावच	ग्रार्तव विचरण	शेष उच्चावचन
1	2	3	4	5	6	7
1951 ज	128					
फ	125					
मा.	117					
ग्र	115					
म	109					
जू.	112					

		123				
जु.	100		123.5	−14.5	−18.0	+3.5
		124				
अ.	119		125.0	−6.0	−9.5	+3.5
		126				
सि.	126		127.0	−1.0	−4 7	+3 7
		128				
अ.	129		129.0	0 0	+2.9	−2.9
		130				
न.	141		131.5	+9.5	+8.4	+1.1
		133				
दि.	145		135.0	+10 0	+11.2	−1.2
		137				
1952 ज.	141		138 5	+2.5	+14.6	−12 1
		140				
फ.	147		142 0	+5.0	+13 0	−8 0
		144				
मा.	145		145.5	−0.5	+3 4	−3 9
		147				
अ.	139		149 0	−10 0	−5.9	−4 1
		151				
म.	145		153 5	−8 5	−9 7	+1.2
		156				
जू.	155		158 5	−3 5	−8 5	+5 0
		161				
जु	149		163 0	−14 0	−18.0	+4.0
		165				
म.	161		167.5	−6 5	−9.5	+3.0
		170				
सि.	169		172.5	−3.5	−4.7	+1.2
		175				
अ.	179		177.0	+2.0	+2 9	−0.9
		179				
न.	193		181.5	+11.5	+8.4	+3.1
		184				

दि	194		186.0	+8.0	+11.2	−3.2
		188				
953 ज	204		189.5	+14.5	+14.6	−0.1
		191				
फ	207		193.0	+14.0	+13.0	+1.0
		195				
मा	205		196.5	+8.5	+3.4	+5.1
		198				
अ	197		199.5	−2.5	−5.9	+3.4
		201				
म.	197		201.0	−4.5	−9.7	+5.2
		202				
जू	199		203.5	−4.5	−8.5	+4.0
		205				
जु	189		206.5	−17.5	−18.0	+0.5
		208				
अ.	202		209.0	−7.0	−9.5	+2.5
		210				
सि	207		211.0	−4.0	−4.7	+0.7
		212				
अ	218		212.5	+5.5	+2.9	+2.6
		213				
न	220		213.5	+6.5	+8.4	−1.9
		214				
दि	219		214.0	+5.0	+11.2	−6.2
		214				
954 ज	235		214.5	+20.5	+14.6	+5.9
		215				
फ	234		215.5	+18.5	+13.0	+5.5
		216				
मा.	222		216.0	+6.0	+3.4	+2.6
		216				
अ.	216		217.0	−1.0	−5.9	+4.9
		218				

म.	209		218.5	−8.5	+2.7	+1 2
		219				
जू.	203		221.0	−18 0	−8 5	−9.5
		225				
जु	198		226.0	−26 0	−18.0	−8.0
		225				
अ.	207		225 5	−18 5	−9.5	−9 0
		226				
सि	217		227.5	−10 5	−4 7	−5 8
		229				
अ	234		230 0	+4 0	−2 9	+1.1
		231				
न.	238		232 0	+6.0	+8 4	−2 4
		233				
दि.	257		235 0	+22 0	+11.2	+10 8
		237				
1955 ज.	260		239 0	+21.0	+14.6	−6 4
		241				
फ	258		243 5	+14.4	+13.0	+1 4
		246				
मा.	247		247.5	−.5	+3 4	−3 9
		249				
अ	241		251 0	−10.0	−5 9	−4.1
		253				
म.	237		254.5	−17.5	−9.7	−7 8
		256				
जू	250		258 0	−8 0	−8.5	+0 5
		260				
जु	247					
अ.	252					
सि.	266					
अ.	282					
न.	287					
दि.	297					

नोट —1. आर्तव विचरण मालूम करने के लिए कालम 5 मे दी गई सामग्री का मासिक माध्य निकालने की विधि नीचे दी गई है ।

2 शेष उच्चावचनो को मालूम करने के लिए आर्तव विचरणो को अल्पकालीन उच्चावचनों में स घटा देना चाहिये । यह क्रिया करते समय योग व बाकी के चिन्हो का विशेष ध्यान रखना चाहिए ।

3. उपरोक्त चित्र मे काल श्रेणी के आर्तव विचरण और अनियमी उच्चावचन दिखाये गये हैं ।

आर्तव विचरण

वर्ष	महीने											
	ज०	फ०	मा०	अ०	म०	जू०	जु०	अ०	सि०	अ०	न०	दि०
1951							-14 5	- 6 0	- 1 0	0 0	9 5	10 0
1952	2 5	5 0	-0 5	-10 0	- 8 5	- 3 5	-14 0	- 6 5	- 3 5	2 0	11 5	8 0
1953	14 5	14 0	8 5	- 2 5	- 4 5	- 4 5	-17 5	- 7 0	- 4 0	5 5	6 5	5 0
1954	20 5	18 5	6 0	- 1 0	- 8 5	-18 0	-26 0	-18 5	-10 5	4 0	6 0	22 0
1955	21 0	1 44	-0 5	-10 0	-17 5	- 8 0				...		
योग	58 5	51 9	13 5	-23 5	-39 0	-34 0	-72 0	-38 0	-19 0	11 5	33 5	+5 0
माध्य[1]	14 6	13	3 4	-5 9	-9 7	-8 5	-18 0	-9 5	-4 7	2 9	8 4	11.2

नोट —कुल आर्तव उच्चावचनो का योग शून्य होना चाहिये, लेकिन निकटतम मूल्य निकालने के कारण कुछ अन्तर आ जाता है । अन इनमें कुछ समायोजन करके योग शून्य के बराबर कर लेना चाहिये ।

[1] कुल वर्षों के योग = 4 का भाग दीजिए,

(3) तीसरी रीति में आर्तव देशनांक निम्न तरीके से मालूम किए जाते हैं —

1. प्रत्येक कालावधि के अङ्क को उससे पहले की कालावधि के अङ्क से विभाजित करिये और भागफल को प्रतिशतता के रूप में लिखिये। यह श्रृंखलानुपात (Link Relatives) कहलाता है।

2 प्रत्येक कालावधि के प्राप्त श्रृंखलानुपातो का माध्य निकालिये।

3 इन माध्यो के लिए पुनः प्रथम कालावधि को आधार मानकर श्रृंखलानुपात (Chain relatives) निकालिए।

4 ऐसा करने के बाद अन्तिम कालावधि को आधार मानकर प्रथम कालावधि का श्रृंखलानुपात निकालिये। इस प्रकार से निकाला हुआ श्रृंखलानुपात प्रथम प्रकार से निकाले श्रृंखलानुपात से भिन्न होगा। इस भिन्नता का कारण दीर्घकालीन परिवर्तन है। अतः इसको ठीक करना चाहिए।

5 श्रृंखलानुपात मे सशोधन करने के लिए पहली प्रकार के पहली कालावधि के श्रृंखलानुपात को दूसरी प्रकार के पहली कालावधि के श्रृंखलानुपात मे से घटना चाहिये और प्राप्त अंक को कालावधियों की सख्या से विभाजित करना चाहिए। भजनफल को 1 से गुणा करके दूसरी कालावधि में से, 2 से गुणा करके तीसरी कालावधि में से और इसी प्रकार अन्य कालावधियो मे से घटना चाहिए। इस प्रकार से प्राप्त अंक ही सशोधित श्रृंखलानुपात अंक है।

6 सशोधित श्रृंखलानुपातो को इनके माध्य से विभाजित करके और 100 से गुणा करके आर्तव देशनांको को ज्ञात किया जाता है।

यह समस्त क्रियाएँ निम्नलिखित उदाहरण से समझ मे आ जाएगी।

उदाहरण 16 10

त्रैमासिक अंक

त्रैमास	1951	1952	1953	1954	1955
1	45	48	49	52	60
2	54	56	63	65	70
3	72	63	70	7.5	84
4	60	56	65	72	77

इनके श्रृंखलानुपात निम्न हुए —

वर्ष त्रैमास	1	2	3	4
1951	—	120	133	83
1952	80	117	133	89
1953	88	129	111	92
1954	80	125	115	96
1955	83	117	120	79
समान्तर मध्यक	82 8	121 6	118 4	88 0

श्रृंखलानुपात Chain relative	100	$\frac{100\times121.6}{100}=121.6$	$\frac{121.6\times118.4}{100}=143.9$	$\frac{143.9\times88.0}{100}=126.6$
संशोधित श्रृंखलानुपात	100	$121.6-1.2=120.4$	$143.9-2.4=141.5$	$126.6-3.6=123$
आर्तव देशनाक	100	$\frac{120.4\times100}{121.2}=99.4$	$\frac{141.5\times100}{121.2}=116.7$	$\frac{123\times100}{121.2}=101.5$

नोट —(1) संशोधित श्रृंखलानुपात इस प्रकार ज्ञात किये हैं —

पहले त्रैमास का श्रृंखलानुपात पहले त्रैमास के आधार पर = 100

पहिले त्रैमास का श्रृंखलानुपात अन्तिम त्रैमास के आधार पर =

$$\frac{126.6\times82.8}{100}=104.8$$

श्रृंखलानुपात का समस्त अन्तर = 104.8 − 100 = 4.8

अन्तर प्रति त्रैमास $=\frac{4.8}{4}=1.2$

(2) आर्तव देशनाक ज्ञात करने के लिए संशोधित श्रृंखलानुपात का माध्य लेकर उससे संशोधित श्रृंखलानुपात को भाग देकर 100 से भाग देना चाहिए, जो फल प्राप्त होगा वह ही आर्तव देशनाक होगा। जैसे —

संशोधित श्रृंखलानुपात का मध्य

$$=\frac{100+120.4+141.5+123.0}{4}=\frac{484.9}{4}$$

$$=121.2$$

दूसरे त्रैमास के आर्तव देशनाक $=\frac{120.4}{121.2}\times100$

$$=99.4$$

इसी प्रकार तीसरे त्रैमास का आर्तव देशनाक $=\frac{141.5}{121.2}\times100$

$$=116.7$$

आज कल Ratio to trend रीति व Ratio to Moving Average रीति से भी आर्तव सूचकांक निकाले जाते हैं।

चक्रीय और अनियमी उच्चावचन (Cyclic and Irregular Fluctuations)—अल्पकालीन उच्चावचन दो प्रकार के हो सकते हैं। (1) चक्रीय और (2) अनियमी। यदि अल्पकालीन उच्चावचनों में आर्तव विचरण व अनियमी उच्चावचन ही हो तो अनियमी उच्चावचनों को आसानी से नापा जा सकता है। अल्पकालीन उच्चावचनों में से आर्तव विचरण घटाने से अनियमी उच्चावचन प्रकट हो जाते हैं। इनको

ग्राफ पर दिखाने से अनियमी उच्चावचन आसानी से जाने जा सकते हैं। उदाहरण 16.9 के कालम 7 मे अनियमी उच्चावचनो के अक हैं। इन्हे चित्र पृष्ठ 527 मे दिखाया गया है।

चित्र को देखने से प्रकट होता है कि यह उच्चावचन कोई निर्धारित नियम के अनुसार नही हैं, यह कभी भी हो जाते हैं अत इनको अनियमी उच्चावचन कहते हैं।

यदि यही उच्चावचन नियत समय के अन्तर पर होते रहे तो इनको नियमी या चक्रीय उच्चावचन कहेगे क्योकि इनका होना एक निश्चित समय पर आश्रित है और यह नियमपूर्वक होते रहते हैं। इस प्रकार के कालचक्रो की अवधि भिन्न भिन्न होती है जैसे 5 वर्ष, 7 वर्ष या 10 वर्ष इत्यादि।

चक्रीय उच्चावचनो के अध्ययन को क्रोक्सटन (Croxton) ने मुख्य रूप से निम्न चार रीतिया बतलाई हैं —

(1) अवशेष रीति (Residual Method)

(2) प्रत्यक्ष रीति (Direct Method)

(3) हरात्मक विश्लेषण रीति (Harmonic Analysis Method)

(4) चक्रीय माध्य रीति (Method of cyclical Averages)

काल श्रेणी के अध्ययन की उपयोगिता·

काल श्रेणी के अध्ययन से हमको अनेको लाभ हैं।

(1) हम यह जान सकते हैं कि किसी वस्तु के उत्पादन, मूल्य, मजदूरी इत्यादि का दीर्घकालीन व अल्पकालीन क्या प्रभाव होता है।

(2) इन श्रेणियो के अध्ययन से वर्तमान परिस्थिति ही नही बल्कि भूतकाल की परिस्थितियो का भी पता लग जाता है और वर्तमान तथा भूतकाल के अको की तुलना की जा सकती है।

(3) चक्रीय उच्चावचनो के अध्ययन मे यह पता लगाया जा सकता है कि उद्योग व व्यापार मे कब तेजी मन्दी आई और भविष्य के बारे मे भी अनुमान लगाया जा सकता है।

(4) पहले का अनुभव भविष्य का पथ प्रदर्शक होता है। काल श्रेणी का अध्ययन पहले के मुख्य लक्ष्यो को प्रकाश में लाता है और इन्ही के आधार पर व्यापारी, राजनीतिज्ञ व अर्थशास्त्री भविष्य की नीति का निर्माण करते हैं।

Questions

(Theory)

1 Explain clearly what is meant by time series analysis Indicate fully the importance of such analysis in business

(B Com. Luck, 1944)

2 Write a short essay on "Analysis of time series"

(B. Com, Hons. Andhra, 1943, M A. Patna, 1944)

3 What is meant by 'Trend'? How would you statistically eliminate the influence of seasonal and cyclic factors on the long period movement of any series? (B Com Bombay, 1936)

4 Describe briefly the statistical procedure you would adopt for the analysis of time series and explain carefully how you would isolate the secular trend? (M A, Patna, 1942)

5 (a) Distinguish between the regular and irregular fluctuations in a time series, (b) Write a short note on the value of analysing time variations (M A Panjab, Apr, 1952)

6 Indicate briefly how you would analyse a series of monthly records extending over fifty years (M A, Alld, 1942)

7 Discuss the claims and limitations of the method of moving average as applied to analysis of the time series (M A, Delhi, 1953)

8 How would you distinguish the cyclic fluctuations from the trend and the seasonal fluctuations?

9 How would you find the trend values in a series by the method of Least Squares?

10 Distinguish between secular trend, seasonal variations and cyclic fluctuations How would you measure secular trend in any given data? (B Com Agra, 1958)

11 "The primary purpose in the statistical analysis of economic time series is to discover and measure any irregularities which characterise the movement of the data through time" Discuss the statement, and describe briefly the different techniques of computing trend

(M A, Agra, 1958)

Practical

1 Explain the use of moving average in the analysis of time series Find out approximate moving average for the following series

Year	Series	Years	Series	Years	Series
1901	506	1906	696	1915	1276
1902	620	1907	1116	1916	898
1903	1036	1908	738	1917	814
1904	673	1909	663	1918	929
1905	588	1910	777	1919	1360
		1911	1189	1920	961
		1912	818	1921	926
		1913	745		
		1914	845		

(M. A Cal, 1936)

Ans Calculate 4 yearly moving average.

2 The following are the figures for the infantile mortality rate (deaths of infants under one year of age per 1000 live birth)

Year.	1922	1923	1924	1925	1926	1927	1928
Rate.	77	69	75	75	70	70	65
Year.	1929	1930	1931	1932	1933	1934	
Rate.	74	60	66	65	64	59	
Year	1935	1936	1937	1938	1939	1940	
Rate.	57	59	58	53	51	57	
Year	1941	1942	1943	1944	1945	1946	
Rate.	60	61	49	45	41	43	

Fit a simple moving average of five to the series and apply a further simple moving average of five to the result.

(Ans. 71, 70, 69, 68, 66 65, 64, 62, 60, 59. 58, 57, 56, 56, 55, 55, 53).

3. Business cycles in U. S. A. and England arranged in chronological order have had the following duration to the nearest year :—

U. S. A 6, 6, 3, 7, 3, 3, 5, 4, 3, 6, 1, 2, 6, 4, 3, 5, 5, 4, 9, 5, 3, 2, 3, 4, 3, 4, 2, 3, 5, 2, 3.

England 4, 6, 4, 3, 5, 4, 6, 4, 2, 6, 10, 7, 4, 8, 8, 9, 8, 10, 7, 6, 5, 2.

Tabulate the above figures in classes of one year each and calculate the average duration of the business cycle in each country separately. (B. Com., Luck., 1939)

(Ans. U. S. A. 4 years and in England 6 years)

4 The following table gives the bank clearing in the Bombay city for the years 1916 to 1940 in millions of rupees. Find the Trend.

Year.	Bank clearings.	Year	Bank clearings.	Year	Bank clearings.
1916	52.7	1925	103 6	1934	178 6
1917	79.4	1926	97 3	1935	235 8
1918	76.3	1927	92.4	1936	243.2
1919	66 0	1928	100 7	1937	194 4
1920	68.6	1929	94 6	1938	217 9
1921	93 8	1930	83 0	1939	214 0
1922	104.7	1931	110 0	1940	256.7
1923	87.2	1232	150 6		
1924	79.3	1933	177.4		

(B. Com. Alld., 1943)

(Hint :—Calculate 9 yearly moving average)

5 Assuming a ten-year cycle for the following series relating to the index numbers of the retail prices of wheat in India (1908 = 100), give the trend values and represent graphically the short time fluctuations with the trend removed.

Year	1906	1907	1908	1909	1910	1911
Annual Average	155	168	226	203	170	153
Year	1912	1913	1914	1915	1916	
Annual Average	170	177	200	227	193	
Year	1917	1918	1919	1920	1921	1922
Annual Average	205	270	341	310	360	315
Year	1923	1924	1925	1925	1927	
Annual Average	356	246	294	281	267	
Year	1928	1929				
Annual Average	264	262				

(M Com, Alld, 1944)

6 The number (in hundreds) of letters posted in a certain city in each day in a typical period of five weeks was as follows —

	Sun	Mon	Tues	Wed	Thurs.	Fri	Sat.	Total for each week
1st Week	18	161	170	164	153	181	76	923 "
2nd Week	18	165	179	157	168	165	85	967 "
3rd Week	21	162	182	153	139	185	82	911 "
4th Week	24	171	197	170	162	179	95	983 "
5th Week	27	162	186	170	170	182	120	1017 "
Total for all weeks	108	821	886	814	792	922	458	4801

Calculate the average fluctuations indices within a week.

(B Com, Andhra, 1943)

(Ans Average of weekly averages 137)

7 Study the short time fluctuations of the following temperatures measured in degree fahrenheit —

Date	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Temp	40	50	44	70	52	44	36	40	56	68
Date	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Temp	78	80	60	64	62	68	86	96	94	78

(B Com, Andhra, 1942)

(Hint —Take 7 years moving average and remove trend)

8. Using the data given below, explain clearly how you would determine seasonal fluctuations in a time series —

Year	Summer	Monsoon	Autumn	Winter.
1	30	81	62	119
2	33	104	86	171
3	42	153	99	221
4	56	172	129	235
5	67	201	136	302

(T. D C. II yr Raj 1961) (I C. S., 1940)

Prices for week ending 19th August 1935 as 100.

Month	Index	Month	Index	Month	Index
1941					
October	127 4	April	136.5	Oct.	167 2
November	127 9	May	144 7	Nov	172 4
December	127.5	June	152 3	Dec.	178 5
1942				1943	
January	128 4	July	155 8	January	190 8
February	132 3	August	158 9	February	270 0
March	130.5	Sept.	161 9		

Fit a straight line trend to the above data by the Method of Least Squares and exhibit the data with the trend

(M Com., Lucknow 1944)

Ans Average of the monthly index Numbers 156 6

(Growth 5 9)

13 Fit a straight line trend by the Method of Least Squares to the growth of the reserves of Cooperative Societies in India as given below and plot the series as well as the trend on a graph paper.

Year	1927–28	1928–29	1929–30	1930–31
Reserves (Lakhs of Rs.)	612	719	820	907
Year		1931–32	1932–33	1933–34
Reserves (Lakhs of Rs.)		1001	1106	1231

(M. A. Panjab 1951)

14 Convert the following yield of major food grains in India into index numbers with figures for 1938-39 equated to 100, and fit a straight line trend by the Method of Least Squares to the indices thus computed —

Year	1934–35	1935–36	1936–37	1937–38
Yield (In Million Tons)	52 7	49 9	55 5	54 3
Year	1938–39	1939–40		1940–41
Yield (In Million Tons)	49.6	53 0		50 2

(Hint —First prepare index numbers with 1938-39 as base and find Trend)

15 Fit straight line trend, by the Method of Least Squares to the following statistics of yield of sesamum in India .—

Year	Yield ('000)
1910–11	499
1911–12	367
1912–13	442
1913–14	378
1914–15	524
1915–16	460
1916–17	482
1917–18	363
1918–19	235
1919-20	225

Ans Equation — $Y = 386\ 8 - 21.4\ X$

Trend values — 494, 572, 451, 430, 408, 387, 365, 344, 322 and 301 (Taking 1915-16 as origin)

16 In an experiment designed to find the effect of seed rate on the yield of wheat, the following results were obtained —

Seed Rate (lbs per acre)	40	50	60	70	80
Average yield of wheat (lbs per acre)	850	862	888	817	768

Draw the graph Fit the Second Degree Parabola and sketch it

[M Sc Ag Agra, 1956, M A Raj 1950]

Ans. Taking 60 as origin the equation is

$$Y = 862 - 20\ 9\ X - 15\ 4\ X^2$$

Trend values are — 848, 873, 868, 832 and 764

17. Fit a Second Degree Parabola from the following data—

Year	Reserves (Lakh Rs)
1927-28	612
1928-29	719
1929-30	820
1930-31	907
1931-32	1001
1932-33	1106
1933-34	1231

Ans Equation — $Y = 908 + 100\ X + 1\ 5X^2$

Trend values — 621, 714, 809, 908, 1009, 114 and 1221

18 Fit the Second Degree Parabola from the following data by taking 1945 as origin.

Year	Profit in '000 Rs
1943	5
1944	8
1945	10
1946	17
1947	20
1948	30

Ans Equation — $Y = 10\ 744 + 4\ 104 + 696\ X^2$

Trend values — 5 320, 7 336, 10 744, 15 544, 21 736 and 29 320.

19 The following table gives the total milk consumption in the U K. from 1940 to 1948 —

Year	Milk consumption (Million gallons)
1940	102 3
1941	101·9
1942	105 8
1943	112 0
1944	114 8
1945	118 7
1946	124 5
1947	120 9
1948	134 8

Fit a straight line trend by the Method of Least Squares
(M. Com Raj 1954)

20 The following table gives the Index Numbers of Industrial Profits in India for the years 1939 to 1953 —

Year	Index Number
1939	100 0
1940	138 6
1941	187'0
1942	221 8
1943	245 0
1944	238 9
1945	233 6
1946	229 2
1947	191 6
1948	259 9
1949	181 5
1950	246 6
1951	310 5
1952	190 6
1953	261 2

Plot the above figures on a graph paper and fit a straight line trend by the Method of Least Squares (M Com Raj 1955)

21. Fit a straight line Trend by the Method of Least Squares in the following series

Year	1951	1952	1953	1954	1955	1956	1957	1958
Price (Rs)	107	110	114	112	115	113	118	115

(II Yr. T D C. Raj 1962)

Ans. 109 01, 110 15 111 29, 112 43, 113'57, 114 57, 115'85, & 116 99

22. Fit a straight-line trend by the Method of Least Squares in the following data

X	0	5	10	15	20	25
Y	12	15	17	22	24	30

Ans. 11 28, 14'78, 18 26, 21'74, 25 22, 28 77

Equation — $Y = 11'30 + 3'48 X$ (Taking O as origin)

23 In order to find quarterly seasonal indices, first of all, the quarterly wholesale price indices for five years (1930–34) were reduced as percentages of their centred moving averages of four quarters. These percentages are set out in the following table. From these data, derive the quarterly seasonal indices —

Year	I	II	III	IV
1930	—	—	127	134
1931	130	122	122	132
1932	120	116	118	128
1933	126	116	121	130
1934	127	118	—	—

(M. Com, Raj, 1961)

(Ans Seasonal indices are 101 0, 95'6, 98 1, 105'3 (Taking average = 100)

24 Analyse the following figures of output of Coal in Great Britain so as to arrive at the salient features of :—

(a) seasonal movement, and

(b) irregular fluctuations.

Great Britain

Output of Coal (In million tons)

Quantity Year	Quarters	Out put
1927	I	68 3
	II	62 6
	III	61 1
	IV	63 3
1928	I	65.4
	II	57 9
	III	56.4
	IV	61 5
1929	I	68 1
	II	62 7
	III	62 8
	IV	67 0
1930	I	70 1
	II	59 1
	III	56 3
	IV	61,6
1931	I	59.5
	II	54 8
	III	51.1
	IV	58 0

(M. A , Panjab 1951, M Com , Alld. 1947)

Hint · Add in fours and then add in pairs for centring the figures Divide the numbers thus obtained by 8 The unit would be quarterly moving average trend Deduct them from original and the result would be short-time fluctuations Obtain seasonal movements and put them against each quarter Deduct seasonal movements from short time fluctuations and the data would show irregular fluctuations

25 The following are the quarterly index numbers of Industrial production with 1930 = 100 (All items) published by the Board of trade U. K. By a moving average of four, calculate a quarterly index corrected for seasonal effects

Year	Quarter	Index
1928	I	106 0
	II	100 4
	III	97 1
	IV	105 1
1929	I	107 2
	II	108 6
	III	107 3
	IV	110 5
1930	I	107 6
	II	100 0
	III	96 5
	IV	96 0
1931	I	91·5
	II	89 1
	III	86·4
	IV	94·1
1932	I	91 7
	II	91 0
	III	84·4
	IV	91 7

(Hint . Calculate short period fluctuations as usual and then obtain normal corrected seasonal fluctuations For this add the seasonal fluctuations and find their average Then total the average and divide it by 4 The result would be the value to be adjusted in the seasonal fluctuations After making the adjustment put the data before each quarter From the index of production deduct normal seasonal corrected fluctuations and the result would be Index of production adjusted for seasonal changes)

अध्याय १७ *

सांख्यिकीय संगठन

(Statistical Organization)

अन्य देशो की भाति भारत म भी प्राचीन समय मे अक सग्रहण का कार्य राजाओं द्वारा राजकीय कामो के लिए किया जाता था। राजाओ तथा शासको को भूमि व्यवस्था अथवा कर-व्यवस्था के लिए अको की जानकारी की आवश्यकता पडती थी, इस प्रकार युद्धो के लिए सैनिक प्राप्त करने की अभिलाषा से भी वह अपनी जनशक्ति का अनुमान लगाने के लिये अक सग्रह करवाते थे। चन्द्रगुप्त मौर्य, अशोक तथा गुप्त वश के राजाओ ने आर्थिक तथा प्रशासन सम्बन्धी समस्याए सुलझाने के लिये अक एकत्रित करने की व्यवस्था कर रखी थी। कौटलीय अर्थशास्त्र मे चन्द्रगुप्त मौर्य के समय के अनेक क्षेत्रो सम्बन्धी अङ्क उपलब्ध हैं। बाद में अकबर के काल मे भूमि सुधार के लिये अङ्क सग्रह करवाया गया। तुज्के-बाबरी 'और' आयने-अकबरी मे भूमि, उत्पादन, अकाल, जनसख्या आदि के आकडे उपलब्ध हैं। ईस्ट इन्डिया कम्पनी ने भी अपनी शासन-व्यवस्था दृढ करने के लिए भूमि तथा उत्पत्ति सम्बन्धी अङ्क एकत्रित करने की ओर ध्यान दिया था।

अठारहवी शताब्दी के अन्त मे जब देश के अनेको भागो मे रैयतवाडी भूमि व्यवस्था लागू की गई तो माल विभाग के अन्तर्गत काम करने वाले अधिकारियो द्वारा भूमि, उत्पादन की लागत, कृषि मूल्य आदि के सम्बन्ध मे अङ्क सकलन तथा सग्रहण का कार्य किया गया क्योकि सरकार को उन आधारो पर ही कर वसूली करनी थी। उन्नीसवी शताब्दी मे अनेको अकालो के कारण अङ्क सग्रहण की ओर ध्यान दिया गया परन्तु शताब्दी के उत्तरार्द्ध तक भी भारत मे कोई सांख्यिकीय सगठन (Statistical Organization) नही था जो नियमित रूप से अङ्क सग्रहण कार्य करता रहे। सन् 1868 ई० मे प्रथम बार लदन से Statistical Abstract of British India (ब्रिटिश भारत का सांख्यिकीय वर्णन) प्रकाशित किया गया तथा यह 1922 तक लदन से ही प्रकाशित किया जाता रहा। तत्पश्चात् इसका प्रकाशन भारत से प्रकाशित कर दिया गया। सन् 1875 ई० में उत्तर प्रदेश मे वहा के राज्यपाल जानस्ट्रेची के अनुरोध पर कृषि तथा वाणिज्य विभाग की स्थापना की गई। इस विभाग का एक कार्य व्यापारिक समक एकत्रित कर देश के कृषि सम्बन्धी अङ्को की शुद्ध जानकारी प्राप्त करना था। कुछ समय पश्चात् ही भारतीय अकाल आयोग की सिफारिश पर देश के सब प्रांतो मे कृषि विभाग खोले गये। केन्द्रीय सरकार ने भी केन्द्रीय कृषि-विभाग आरम्भ कर दिया। इन कृषि विभागो मे कृषि सम्बन्धी महत्वपूर्ण अङ्को का सग्रहण किया गया।

सन् 1872 ई० मे भारत मे प्रथम जनगणना की गई परन्तु यह अधूरी थी अत

---

*भारतीय समक पर विस्तृत जानकारी करने के लिए "भारतीय सांख्यिकी" by L. S. Porwal पढ़िए।

इसे विशेष महत्व नहीं दिया जाता। जनगणना का कार्य अस्थाई कार्यकर्ताओं द्वारा किया गया था और कार्य समाप्त होते ही कार्यकर्ताओं ने अवकाश ग्रहण कर लिया। यह 1941 की जनगणना तक चलता रहा। सन् 1881 ई० में प्रथम बार इम्पीरियल गजेटीयर ऑफ इन्डिया (Imperial Gazetteer of India) प्रकाशित किया गया जिसमें देश के विभिन्न भागों की आर्थिक स्थिति सम्बन्धी आंकड़े थे। तत्पश्चात् भारत सरकार के कुछ विभागों ने भी अङ्क प्रकाशित करने आरम्भ किये और सर्व प्रथम 1894 ई० में गेहूँ की फसल का पूर्वानुमान (Forecast) प्रकाशित किया गया। इससे पूर्व 1886 ई० में Reports of Agricultural Statistics of British India (ब्रिटिश भारत के कृषि समंक विषयक ब्यौरा) प्रकाशित की जा चुकी थी। 1895 ई० में एक सांख्यिकीय संस्थान (Statistical Bureau) की स्थापना की गई जिसके प्रमुख सांख्यिकीय महा निर्देशक (Director General of Statistics) नियुक्त किये गये।

1905 में सांख्यिकीय महानिर्देशक का नाम डायरेक्टर जनरल ऑफ कर्मशियल इन्टेलिजेंस ने सम्भाला और वह इसी नाम के विभागाध्यक्ष बनाये गये। इस विभाग ने 1905 में प्रथम पत्रिका Indian Trade Journal निकाली। औद्योगिक विकास एवं आंकड़ों में सुधार करने के लिए 1916 में भारत सरकार ने एक औद्योगिक आयोग (Industrial Commission) की नियुक्ति की। कमीशन ने भारत सरकार को विविध आर्थिक एवं औद्योगिक आंकड़ों का सङ्कलन, विवेचन एवं विश्लेषण करने के लिये उत्तरदायी बनाया। लेकिन कुछ कठिनाइयों के कारण इसकी सिफारिशों को कार्यान्वित नहीं किया जा सका। 1922 में इस विभाग का नाम डायरेक्टर जनरल ऑव कर्मशियल इन्टेलिजेंस तथा स्टेटिस्टिक्स (Director General of Commercial Intelligence and Statistics) कर दिया गया। 1924 में श्री विश्वेश्वरैया की अध्यक्षता में नियुक्त आर्थिक समिति ने देश में विभिन्न सरकारी विभागों द्वारा एकत्रित सांख्यिकीय तथ्यों के संग्रह सम्बन्धी जांच की तथा सिफारिश की कि केन्द्र तथा प्रान्तीय सरकारों द्वारा संग्रहीत सब अङ्क केन्द्रीय अधिकार में आ जाने चाहियें और प्रत्येक प्रान्त में अलग अलग सांख्यिकीय संस्थान (Statistical Bureaux) होने चाहियें। रॉयल कमीशन ऑन एग्रीकल्चर (Royal Commission on Agriculture) ने भी आर्थिक समिति के इन विचारों से पूर्णतया सहमति प्रकट की। कमीशन ने यह सिफारिश भी की कि एक "इम्पीरियल कौन्सिल ऑफ एग्रीकल्चरल रिसर्च" (Imperial Council of Agricultural Research) की स्थापना की जानी चाहिये जो कृषि विभाग का शोध कार्य सम्भाल सके। कुछ समय पश्चात् 1934 में ही बाउले रॉबर्टसन समिति (Bowley-Robertson Committee) द्वारा भारत की आर्थिक स्थिति का अध्ययन किया गया। उन्होंने एक स्थाई आर्थिक कार्यालय की स्थापना की सिफारिश की जिसका अध्यक्ष सांख्यिकीय निर्देशक हो। इस समिति की सिफारिश पर तत्काल तो कोई कार्यवाही नहीं की गई परन्तु सन् 1938 में भारत सरकार के आर्थिक

सलाहकार का कार्यालय (an office of the Economic Advisor to the Government of India) स्थापित किया गया जिसमे 1933 मे खोला गया Statistical Research Bureau भी मिला दिया गया। इस आर्थिक सलाहकार के कार्यों मे आर्थिक समको का सग्रहण तथा विश्लेषण सम्मिलित किये गये।

द्वितीय महायुद्ध काल मे अनेको महत्वपूर्ण समस्याओ सम्बन्धी अङ्क सग्रहण की आवश्यकता पडी और तत्कालीन सरकारी प्रशासक उस कार्य को सम्भालने में सर्वथा असमर्थ सिद्ध हुए। अत केन्द्र तथा प्रातीय सरकारो के विभिन्न मत्रालयो में छोटे छोटे *साख्यिकीय विभाग स्थापित किये गये जो अपने क्षेत्रो से सम्बन्धित अङ्क इकट्ठे कर सकें।* औद्योगिक समकों के सग्रहण के लिये 1942 में एक औद्योगिक समक विधेयक (Industrial Statistics Act) पारित किया गया। इसके बाद 1945 में Census of Manufacturing Industries Rules पारित किये गये जिनके अनुसार निर्माण उद्योगो के लिये सरकार द्वारा वाछित अङ्क प्रस्तुत करना अनिवार्य कर दिया गया। भारत सरकार ने योजना के लिये समकों के महत्व को ध्यान मे रखते हुए पिछले वर्षों मे कई साख्यिकीय कार्यालय खोले है। 1944 मे औद्योगिक समक के संचालक का कार्यालय *(Directorate of Industrial Statistics) स्थापित किया गया जिसने 1946 से* 1956 तक वार्षिक निर्माण-उद्योग गणना (Annual Census of Manufactures) करवाई। 1959 से औद्योगिक समक सकलन सगणना एव न्यादर्श विधि द्वारा C S.O करवाता है। श्रम मंत्रालय के अधीन 1946 मे शिमला मे श्रम-संस्थान (Labour Bureau) *खोला गया जो श्रम-सम्बन्धी विविध प्रकार के आकडे एकत्र करता है।* 1947 में खाद्य और कृषि मत्रालय के अधीन आर्थिक एव साख्यिकी के सचालक का कार्यालय (Directorate of Economics & Statistics) खोला गया जो कृषि-*सम्बन्धी आकडे एकत्र करता है। 1949 मे राष्ट्रीय आय समिति* (National Income Committee) नियुक्त की गई जिसकी एक सिफारिश के अनुसार C.S O. में National Income Unit प्रति वर्ष राष्ट्रीय आय के अनुमान प्रकाशित करती है। 1948 में जन-गणना अधिनियम (The Indian Census Act) पास करके *जनगणना आयुक्त एव रजिस्ट्रार जनरल का कार्यालय स्थायी कर दिया गया जो जनगणना* एव जन्म-मरण के आंकडे (Vital Statistics) एकत्र करता है। 1950 से राष्ट्रीय निदर्शन पर्यवेक्षण (National Sample Survey) भी जारी है, जो मन्त्रि-मण्डल *सचिवालय* (Cabinet Secretariat) के अधीन कार्य करता है। इनके अतिरिक्त भारतीय साख्यिकीय सस्थान (Indian Statistical Institute) कलकत्ता, जिसे 1960 से राष्ट्रीय सस्था घोषित कर दिया गया है, रिजर्व बैंक ऑफ इण्डिया, Indian Council of Agricultural Research (I. C. A. R.) आदि सस्थाएं भी आकडे एकत्रित करने तथा तत्सम्बन्धी शोध-कार्य में महत्वपूर्ण योग दान दे रही है। 1953 मे Collection of Statistics Act (समक सग्रहण

विधेयक) पारित किया गया और 1942 के औद्योगिक समक विधेयक को इसी मे मिला दिया गया। 1949 मे भारत सरकार ने एक साख्यिकीय इकाई (Statistical Unit) स्थापित की थी जिसने मई 1951 मे केन्द्रीय साख्यिकीय सगठन (Central Statistical Organisation) का रूप धारण कर लिया और आज भी समंक एकत्रीकरण, विश्लेषण तथा निवचन का कार्य कर रही है।

वर्तमान में भारत के लगभग सभी राज्यों मे अपने अपने साख्यिकीय सगठन हैं जो समय समय पर अथवा नियमित रूप से तथ्य प्रकाशित करते हैं। राजस्थान राज्य मे डायरेक्टर ऑफ इकानामिक्स एण्ड स्टेटिस्टिक्स (Director of Economics and Statistics) के कार्यालय से एक त्रैमासिक पत्रिका Quarterly Bulletin of Statistics प्रकाशित होती है। इसके अतिरिक्त प्रतिवर्ष Basic Statistics of Rajasthan व Annual Statistical Abstract भी पिछले सात वर्षों से नियमित रूप से प्रकाशित हो रहे है। भारत सरकार के विभिन्न विभागो द्वारा प्रकाशित प्रमुख साख्यिकीय पत्रिकाए निम्नलिखित हैं —

कृषि तथा खाद्य मन्त्रालय —

(1) Agricultural Situation in India (मासिक)
(2) Indian Agricultural Statistics (वार्षिक)
(3) Estimates of Area and Production of Principal crops in India (वार्षिक)
(4) Indian Land Revenue Statistics (वार्षिक)
(5) Average Yield per acre of Principal crops in India (पचवर्षीय)
(6) Indian Agricultural Prices Statistics (वार्षिक)
(7) Indian Agricultural Wages Statistics (वार्षिक)
(8) Indian Live Stock Census (पचवर्षीय)
(9) Indian Forest Statistics (वार्षिक)
(10) Bulletin of Agricultural Prices (साप्ताहिक)

इनके अतिरिक्त कई फुटकर प्रकाशन हैं जो समय-समय पर प्रकाशित होते रहते हैं।

कृषि तथा खाद्य मन्त्रालयो से सम्बन्धित ही भारतीय कृषि शोध सस्था (Indian Council of Agricultural Research) है, जो कृषि मन्त्रालय को कृषि, पशु चिकित्सा तथा पशुपालन आदि विषयो सम्बन्धी अको के सम्बन्ध में शोध कार्य कर सूचना एवं सलाह देती है। दूसरे, यह सस्था कृषि-साख्यिकी के प्रशिक्षण का प्रबन्ध करती है और परीक्षाए लेकर प्रमाण पत्र देती है। इन कार्यों के अतिरिक्त फसलो के उत्पादन, पशु, मत्स्य, व्यवसाय, आदि में शोध तथा सुधार के लिये राज्य को सलाह देती है।

वित्त मन्त्रालय —वित्त मत्रालय मे कई विभाग ऐसे हैं जो शोध तथा प्रकाशन का काम करते हैं। सवप्रथम राष्ट्रीय निदर्शन अन्वीक्षण (National Simple Survey) है जो अर्थ-विभाग के अन्तर्गत था। 1957 से इसे C.S.O के अधीन कर दिया है। इसका कार्य उत्पादन तथा उपभोग सम्बन्धी अक एकत्रित करना है।

दूसरा, राष्ट्रीय आय इकाई (National Income Unit) है जो प्रति वर्ष देश की राष्ट्रीय आय के आगणन का प्रकाशन करती है। अब यह संस्था 1957 में C.S.O. में एक इकाई के रूप में कार्य कर रही है। तीसरा, आर्थिक सलाहकार का कार्यालय है जो विभाग से सम्बन्धित अंक एकत्रित करता है। चौथा, Statistical and Intelligence Branch (सांख्यिकीय तथा गुप्त विभाग) है जो आयकर सम्बन्धी अंक संग्रहण करता है। कम्पनी अधिनियम प्रशासन विभाग को 1957 से उद्योग मन्त्रालय के अधीन कर दिया था लेकिन अक्टूबर 1963 से इस विभाग को समाप्त कर दिया गया है अब इस विभाग का कार्य वित्त मन्त्रालय का राजस्व (revenue) विभाग देखेगा। हाल ही में एक कम्पनी प्रबन्ध बोर्ड (Corporate Management Board) बनाने का भी निश्चय किया गया है।

विभाग के अन्तर्गत सबसे महत्वपूर्ण प्रकाशन रिजर्व बैंक ऑफ इण्डिया के हैं जो अनेकों दिशाओं सम्बन्धी शोध अंक प्रस्तुत करता रहता है। इसके नियमित प्रकाशन निम्नलिखित हैं।

(1) Report on Currency and Finance (वार्षिक)

(2) Report on Trend and Progress of Banking in India (वार्षिक)

(3) Statistical Statements relating to Co-operative movement in India (वार्षिक)

(4) Statistical Tables relating to Banks in India (वार्षिक)

(5) Reserve Bank of India Bulletin (मासिक)

(6) Statement of affairs of the Reserve Bank of India (साप्ताहिक)

संख्या (5) में उत्पादन, श्रम, मुद्रा, व्याज, वाणिज्य, सहकारिता आदि के सम्बन्ध में अंक रहते हैं।

उद्योग मन्त्रालय :—

इनके प्रकाशन निम्न हैं।

1 Indian Trade Journal (साप्ताहिक)

2 Journal of Industry and Trade (मासिक)

3 उद्योग व्यापार पत्रिका (मासिक)

इनके अतिरिक्त देशी तथा विदेशी व्यापार सम्बन्धी पाँच मासिक पत्रिकाएं भी प्रकाशित की जाती हैं।

श्रम मन्त्रालय—श्रम संस्थान शिमला (Labour Bureau, Simla) के द्वारा निम्न पत्रिकाएं प्रकाशित होती हैं—

(1) Indian Labour Journal (मासिक)

(2) The Indian Labour Year Book (वार्षिक)

(3) Large Industrial Establishments in India (वार्षिक)

(4) Statistics of Factories (वार्षिक)
(5) Working of the Indian Trade Union Act (वार्षिक)
(6) Working of the Minimun Wages Act (वार्षिक)
(7) Working of the Workmen's Compensation Act– (वार्षिक)

उपरोक्त प्रकाशनों के अतिरिक्त खानों के मुख्य निरीक्षक (Chief Inspector of Mines, Dhanbad) धनबाद द्वारा निम्न पत्रिकाएं प्रकाशित की जाती हैं —

(1) Monthly Coal Bulletin
(2) Annual Report of the Chief Inspector of Mines
(3) Indian Coal Statistics (वार्षिक)

इन मंत्रालयों के अतिरिक्त अन्य मन्त्रालय भी अनेकों प्रकाशन प्रसारित करते हैं जिनमें विभागीय समंक दिये हुए होते हैं। उनका वर्णन सम्बन्धित स्थानों पर ही दिया जायगा।

केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (Central Statistical Organization)

जैसा कि ऊपर बतलाया जा चुका है, भारत सरकार ने आंकड़े एकत्र करने के लिए कई संस्थाएं, कार्यालय एवं विभाग खोले हैं। इन सब के कार्यों का समन्वय (Coordination) करने के लिए मई, 1951 में मन्त्रिमण्डल सचिवालय (Cabinet Secretariat) के अधीन केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन स्थापित किया गया। इसके मुख्य कार्य निम्न हैं।

(1) विभिन्न केन्द्रीय मन्त्रालयों, राज्यों के सांख्यिकीय संस्थानों एवं अन्य संस्थाओं को सांख्यिकीय मामलों पर सलाह देना व उनके कार्यों को देर व दुहरापन (Duplication) से बचने के लिए समन्वय (Coordination) स्थापित करना।
(2) सांख्यिकीय शब्दों की समानता के हेतु परिभाषा (Definition) तय करना व अन्तर्राष्ट्रीय तुलना के हेतु स्तरों (Standards) को बढ़ाना।
(3) सांख्यिकीय रेखा-चित्रों एवं बिन्दु-चित्रों का प्रदर्शन करना।
(4) विभिन्न मासिक एवं वार्षिक पत्रिकाएं प्रकाशित करना।
(5) प्रति वर्ष राष्ट्रीय आय के अनुमानों को प्रकाशित करना।
(6) योजना से सम्बन्धित सांख्यिकीय कार्य करना।
(7) सांख्यिकीय कार्यकर्त्ताओं को प्रशिक्षण देना।
(8) संयुक्त राष्ट्र सांख्यिकीय कार्यालय तथा अन्य अन्तर्राष्ट्रीय संस्थाओं को आंकड़े उपलब्ध कराना।
(9) अन्तर्राष्ट्रीय सम्मेलनों से सम्बन्धित सांख्यिकीय कार्य करना।
(10) केन्द्रीय एवं राज्य सरकारों के सांख्यिकीय विभाग के अधिकारियों की सभायें एवं वार्षिक सम्मेलन करवाना।

(11) औद्योगिक समंक एकत्र करना।

केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन (C. S. O.) द्वारा निम्न पत्रिकाएं प्रकाशित की जाती हैं —

(1) The Monthly Abstract of Statistics.
(2) The Annual Statistical Abstract
(3) The Weekly Supplement to the Monthly Bulletin of Statistics
(4) Monthly Statistics of the Production of Selected Industries in India.
(5) Annual Survey of Industries
(6) Statistical Handbook of Indian Union.

भारतीय समंक सरकारी भी होते हैं और गैर-सरकारी भी। हमारे देश में समंक एकत्र करने के लिए गैर-सरकारी संस्थाओं की भारी कमी है। अतः भारतीय समंक का अर्थ सामान्य रूप से सरकारी समंक (Official Statistics) से ही लिया जाता है।

जन गणना (Population Census)

भारत तथा संसार के लगभग सभी देशों में प्रति दसवें वर्ष जनगणना की जाती है। जनसंख्या वास्तव में किसी देश की आर्थिक प्रगति का आधार होती है और माल्थस जैसे व्यक्तियों ने तो जनसंख्या को बहुत अधिक महत्व दिया है। भले ही उनके सिद्धान्त वर्तमान समय में सम्पूर्ण सत्य नहीं हों तो भी जनसंख्या के शुद्ध अंकों की जानकारी की आवश्यकता प्राथमिक है। जनगणना का महत्व नीचे दिया जा रहा है।

जनगणना का महत्व.—सामान्य रूप से तो जनगणना प्रशासनिक कार्यों के लिए की जाती है, देश के अमुक विभाग में जनसंख्या कम है या अधिक है, वृद्धि की गति क्या है, आदि बातें जानने से सरकार वहां की प्रशासनिक व्यवस्था सुचारु रूप से चला सकती है तथा देश की जनसंख्या को, यदि कुछ भागों में वह बहुत घनी है और दूसरे भागों में बहुत बिखरी हुई है, सम करने का यत्न कर सकती है। साथ ही सुरक्षा प्रबन्ध, रेलें, सड़कें, नहरें, आदि बनाना जनसंख्या पर ही निर्भर करता है। जिन भागों में घनी तथा अधिक जनता बसती है वहां जीवन की मुख्य सुविधाओं का प्रबन्ध पहले तथा शीघ्र करना आवश्यक है। अतः प्रजातन्त्र के इस युग में जनसंख्या की वास्तविक स्थिति जाने बिना प्रशासन सुदृढ़ एवं सुचारु रूप से नहीं चलाया जा सकता।

प्रशासनिक व्यवस्था के अतिरिक्त सरकार को यह भी देखना होता है कि देश के कौन से भाग से लोक सभा अथवा राज्यसभा अथवा विधान सभा के कितने प्रतिनिधि चुनने हैं। जनसंख्या की जानकारी बिना सारे देश के विभिन्न भागों अथवा प्रदेशों को राजकीय कार्यों में उचित प्रतिनिधित्व देना असम्भव है। अतः बिना जनगणना किये प्रजातन्त्र का ढांचा खड़ा करना ही सम्भव नहीं है।

आर्थिक दृष्टि से जनगणना और भी अधिक महत्वपूर्ण है। क्योंकि इसके बिना यह जानना सम्भव नहीं कि देश में कितने व्यक्ति कौन सा व्यवसाय करते हैं, किन की आय बहुत कम है, कितकी अधिक है कितने व्यक्ति बेरोजगार हैं, कितने भूमि हीन कृषक हैं, आदि-आदि। इन सब बातो का उत्तर पाए बिना विकास की कोई योजना सफल नहीं हो सकती। आर्थिक विकास वास्तव मे जनसख्या सम्बन्धी विस्तृत जानकारी पर ही आधारित हो सकता है, उसके बिना योजना कितने व्यक्तियों के लिए बनानी है और कहां किस कार्य को प्राथमिकता दी जानी चाहिये, यह नही जाना जा सकता है। अत जन-गणना आर्थिक विकास की कुंजी है।

औद्योगिक तथा व्यापारिक दृष्टि से भी जनगणना का महत्व अत्यधिक है। माल की खपत, व्यक्तियो की रुचि आदि तथ्य जनगणना पर ही आधारित किये जा सकते हैं और विशेष स्थानो के व्यक्तियो के लिए विशेष प्रकार के माल की विशेष समय पर व्यवस्था की जा सकती है। अधिक आबाद प्रदेशो मे औद्योगिक तथा व्यापारिक विकास इसीलिए अधिक होता है कि वहा माल के लिए बडी-बडी मण्डियां है और विक्रय-व्यय कम से कम पडता है। मोटर कम्पनियां, वायुयान-संस्थान आदि जनसख्या के आधार पर अपनी योजनाए बनाती हैं।

समाजशास्त्री तथा समाज सुधारको के लिए भी जनसख्या मार्गदर्शक का काम देती है। बाल-विवाह कहा अधिक होते हैं, निर्धनता किस प्रदेश में अधिक है, भिक्षावृत्ति किन वर्गों में अधिक है, अन्धविश्वास किन क्षेत्रो मे जड पकड चुका है आदि अनेक बातें जन सख्या रिपोर्ट मे ज्ञात होती हैं और उनके आधार पर उन प्रदेशों में शिक्षा की विशेष व्यवस्था की मांग की जा सकती है तथा प्रचार द्वारा स्थिति सुधारी जा सकती है।

उपरोक्त सब बातो के अतिरिक्त शिक्षा प्रचार, स्वास्थ्य योजनाए, बीमा योजनाए उत्पादन वृद्धि की रीतिया, समाचार पत्रो का प्रसारण, आवास योजनायें तथा इसी प्रकार के अनेकों कार्य जनसंख्या की विस्तृत तथा गहन जानकारी के बिना न किये जा सकते हैं, और न सफल हो सकते हैं।

जनगणना द्वारा देश के प्रत्येक व्यक्ति की आयु, लिंग, आय, व्यवसाय आदि जीवन-सम्बन्धी लगभग सभी विषयो पर जानकारी प्राप्त की जाती है।

जनगणना की रीतियां —जनगणना दो रीतियो द्वारा की जाती है, एक तो जन्म-मरण सम्बन्धी अंको (Vital Statistics) द्वारा तथा दूसरे प्रत्येक व्यक्ति के विषय में व्यक्तिगत रूप में अलग अलग जानकारी द्वारा। जन्म-मरण के अंक साधारण तया सभी म्युनिसिपल समितियां तथा पंचायतें रखती हैं, उनका शुद्ध योग ले लिया जाता है। जैसे जितने व्यक्ति वर्ष मे जन्मे, उनमें से मृतकों को घटा कर पिछली जनसख्या में जोड़ दिया जाता है। यह वर्तमान जनसंख्या होगी। यह रीति सरल है पर इसमें केवल व्यक्तियों की सख्या मिलती है और जानकारी प्राप्त नही होती।

दूसरी रीति के अनुसार प्रत्येक व्यक्ति के लिए एक प्रश्नावली होती है उसे भरना पडता है। इन सब प्रश्नावलियो को इकट्ठा कर तथ्यों को वर्गीकृत कर लिया जाता है।

भारत में जनगणना

भारत में प्रति दसवें वर्ष जनगणना की जाती है। सबसे पहली जनगणना सन् 1872 में ली गई थी। लेकिन वह अधूरी थी। सन् 1881 से नियमित रूप से प्रति दस वर्ष गणना की जाती रही है। जनगणना करने से पूर्व एक सगणना अधिनियम (Census Act) पारित किया जाता है जिसके अनुसार जनगणना अधिकारी को यह अधिकार मिल जाता है कि वह देश के प्रत्येक व्यक्ति से जनगणना सम्बन्धी जो भी जानकारी प्राप्त करना चाहे, प्राप्त कर सकता है और प्रत्येक नागरिक जनगणना अधिकारी को उसके द्वारा पूछे गये प्रश्नो के उत्तर सही-सही देने के लिए बाध्य होता है। इसके लिए समय से पूर्व ही प्रचार द्वारा जनता को नियमो की जानकारी करवा दी जाती है ताकि वह जनगणना अधिकारियो को अधिक से अधिक सहयोग दें।

जनगणना आयुक्त (Census Commissioner) तथा महा पजीयन अधिकारी (Registrar General) द्वारा देश के प्रत्येक राज्य मे एक एक जनगणना निरीक्षक (Census Superintendent) नियुक्त कर दिया जाता है। जनगणना निरीक्षको द्वारा प्रत्येक जिले के लिए एक जिला जनगणना अधिकारी (District Census Officers) नियुक्त किए जाते हैं जो अपने जिलो को कई-कई क्षेत्रो में बाट लेते है। फिर प्रत्येक-क्षेत्र के लिए एक-एक क्षेत्र निरीक्षक (Charge Superintendent) नियुक्त करते हैं। क्षेत्र निरीक्षक अपने क्षेत्र को कई भागों मे बाट कर उनके लिए एक-एक पर्यवेक्षक (Supervisor) नियुक्त कर देते है और पर्यवेक्षक अपने क्षेत्र के प्रत्येक गली या मुहल्ले के लिए गणक (Enumerators) या गिनने वाले व्यक्तियो की नियुक्ति करते हैं।

नियुक्तया सम्पूर्ण होने के साथ ही जनगणना सम्बन्धी प्रशिक्षण की व्यवस्था की जाती है। उच्च अधिकारी अपने अधीन कार्य करने वाले सभी अधिकारियो को बुला कर गणना सम्बन्धी सब बातें अच्छी तरह समझा देते हैं और जो पर्चिया गणको द्वारा घर-घर जाकर भरनी होती है उनमें दिए गए प्रत्येक प्रश्न पर विस्तार से प्रकाश डाल देते हैं। वास्तविक कार्य गणको का ही होता है अत उन्हे सारी कार्य रीति समझाने के अतिरिक्त नमूने की पर्चिया भर कर भी दी जाती है।

जब गणना कार्य समाप्त हो जाता है तो पर्चियों मे भरे गये तथ्यो तथा अङ्कों का वर्गीकरण तथा सारणीयन किया जाता है। इस प्रकार प्रत्येक राज्य के जनगणना सम्बन्धी अङ्क एकत्रित हो जाते है। इन्हे प्रत्येक राज्य का जनगणना-निरीक्षक प्रकाशित कर देता है। वर्गीकरण, सारणीयन, विश्लेषण आदि मे बहुत अधिक समय लगता है। साथ ही केन्द्रीय जनगणना अधिकारी अर्थात् जनगणना-आयुक्त सारे राज्यो के अङ्क तथा तथ्यों के आधार पर अपनी रिपोर्ट प्रकाशित करता है जिसमे केवल अक तथा तथ्य अपने मूल रूप मे ही नही होते बल्कि उनका विश्लेषण, तथा निर्वचन करके भविष्य के लिये सरकार की किस क्षेत्र में क्या नीति होनी चाहिये, इस सम्बन्ध मे ठोस सुझाव दिये जाते है।

भारतीय जनगणनाएं

1931 तक भारत मे प्रति दसवें वर्ष जनगणना की जाती रही है। जनगणना

करवाने से पूर्व एक जनगणना अधिनियम पारित किया जाता था, इसके अनुसार एक जनगणना आयुक्त नियुक्त किया जाता था। जनगणना आयुक्त की सहायता के लिए प्रान्तीय अधिकारी, जिला अधिकारी, क्षेत्र निरीक्षक, पर्यवेक्षक तथा गणक नियुक्त किये जाते थे। यह सब व्यक्ति सरकारी कार्यालयों से इस कार्य के लिये अस्थाई रूप से नियुक्त कर दिये जाते थे और साधारणतया माल विभाग तथा शिक्षा विभाग का इसमें सर्वाधिक सहयोग होता था।

वास्तविक कार्य मकानों की संख्या अंकन से आरम्भ होता था जो जनगणना से कई सप्ताह पूर्व सम्पन्न कर लिया जाता था। इसके पश्चात् गणकों को प्रश्नावलियां दे दी जाती थीं जो गणक गली मोहल्लों में जाकर स्वयं भर लेते थे। वास्तविक जनगणना के लिये एक रात निश्चित की जाती थी जबकि एक ही समय पर प्रत्येक व्यक्ति को जो जहां होता सत्तासिद्ध (De facto) गिनने की व्यवस्था की जाती थी। फिर गाड़ियां, प्लेट-फार्म, घर, वन आदि सभी स्थानों पर एक साथ एक समय गणना करली जाती थी। यह काम प्रायः अगले दिन प्रातः ६ बजे किया जाता था जिससे की रात्रि को की हुई गणना से मिलान किया जा सके। तत्पश्चात् गणकों द्वारा अंकों के विवरण तैयार कर लिये जाते थे और अधिकारियों को भेज दिए जाते थे।

दोष—इस प्रकार की गणना में एक दोष तो यह था कि बहुत से व्यक्ति तो दोबारा गिन लिये जाते थे और बहुत से गिनने से रह जाते थे। इसके अतिरिक्त राजनैतिक अधिकारों की लालसा के कारण गिनती अधिक होने की सम्भावना अधिक रहती थी। इसके अतिरिक्त एक ही रात्रि को सारा कार्य होने कारण बहुत अधिक गणकों की आवश्यकता पड़ती थी, रात्रि भी ऐसी चुननी पड़ती थी जब न अधिक गर्मी हो न अधिक सर्दी, जब कोई त्योहार न हो तथा चांदनी वाली हो।

1941 में परिवर्तन—1941 में जनगणना पद्धति में बहुत से परिवर्तन कर दिये गये। इसके अनुसार जनगणना के लिये एक निश्चित अवधि (एक सप्ताह) निश्चित कर दी गई जिसके बीच में जो व्यक्ति सामान्य रूप से जहां था या रहने का विचार रखता था विधिसिद्ध (De Jure) वहीं गिन लिया जाने लगा। इससे अधिक गणकों की आवश्यकता नहीं रही।

दूसरे, अब तक पहले प्रश्नावलियों में सारे तथ्य भरे जाते थे, फिर उन्हें अलग अलग पर्चियों पर उतार कर सारणीबद्ध किया जाता था परन्तु 1941 में अलग-अलग विषयों की पर्चियां ही बनाई गई जिन्हें छांट कर सरलता से सारणियां भरी जा सकती थीं। अतः बहुत सा कागज छपाई तथा श्रम-व्यय बच गया।

तीसरा परिवर्तन यह किया गया कि मकान का संख्यांकन करते समय ही व्यक्तियों की संख्या, आयु, लिंग आदि का ब्योरा लिखा जाने लगा जिससे कि वास्तविक जनगणना होने पर उससे मिलान किया जा सके।

1951 की जनगणना—स्वतन्त्र भारत की प्रथम जनगणना होने के नाते 1951 की जनगणना का विशेष महत्व है। इसके अन्तर्गत जो प्रश्नावलियां या पर्चियां

तैयार की गई वह बहुत संक्षिप्त किन्तु अधिक सूचना प्राप्त करने वाली थी। इन में से अनेक व्यर्थ के प्रश्न हटा कर महत्वपूर्ण प्रश्नों का समावेश किया गया। इसलिये इसमें सब पुरानी जनगणनाओं से अधिक सूचना संग्रहीत है। कुल गणना के अंक तथा तथ्य सत्रह भागों में प्रकाशित किये गये हैं जिनके कुल 93 उपविभाग हैं। सारी जनगणना पर लगभग 1.49 करोड़ रुपया व्यय हुआ तथा लगभग सात लाख व्यक्तियों ने कार्य किया।

इस जनगणना की निम्नलिखित विशेषताएं थी —

(1) इस जनगणना की पहली विशेषता तो यह थी कि गणना अवधि एक सप्ताह से तीन सप्ताह कर दी गई। इसमें अंक एकत्रित करने के लिये अधिक समय मिल गया।

(2) एक राष्ट्रीय नागरिक रजिस्टर की व्यवस्था की गई। पर्चियों से व्यक्तियों सम्बन्धी सूचना रजिस्टरों में दर्ज कर दी गई। प्रत्येक गांव तथा नगर के मोहल्लों में एक एक रजिस्टर रख दिया गया जो कि राष्ट्रीय नागरिक रजिस्टर का अंश माना जाता है। इस रजिस्टर से स्थानीय जनगणना सम्बन्धी तथ्य प्राप्त किये जा सकते हैं तथा सामाजिक तथा आर्थिक पर्यवेक्षणों के लिये इसकी उपयोगिता अत्यन्त महत्वपूर्ण है।

(3) 1951 की जनगणना एक स्थाई जनगणना अधिनियम 1948 के अन्तर्गत की गई है और जनगणना आयुक्त तथा रजिस्ट्रार जनरल का पद स्थाई कर दिया गया है। इससे स्वाभाविक लाभ यह है कि पिछली जनगणनाओं के अनुभव से लाभ उठाया जा सकेगा और 1951 की जनगणना में भी जो कमियां रह गई हैं, गणना आयुक्त उन में भविष्य में सुधार कर सकेगा।

(4) 1951 की जनगणना में जाति सम्बन्धी प्रश्न हटा दिया गया और विस्थापितों सम्बन्धी प्रश्न जोड़ दिया गया। भारत सरकार जाति भेद को समाप्त करना चाहती है। अतः जाति-भेद के प्रश्न को समाप्त करना ही उचित था। दूसरी ओर पिछड़े वर्गों तथा पिछड़ी जातियों को संविधान में कुछ संरक्षण दिये गये हैं अतः उनके सम्बन्ध में सम्बन्धित स्थानों में जानकारी प्राप्त की गई है। विस्थापितों की समस्या नई खड़ी हुई थी तथा उनके पुनर्वास की व्यवस्था करनी थी अतः विस्थापितों-सम्बन्धी तथ्य इकट्ठे करने आवश्यक थे।

(5) 1951 की जनगणना में आर्थिक समस्याओं, विशेषतः व्यवसाय, बेकारी यातायात तथा अन्य सेवाओं सम्बन्धी तथ्यों का अधिक विस्तार से संग्रह किया गया है। पंचवर्षीय योजना के समारम्भ के लिये इन तथ्यों से अत्यधिक सहयोग मिला है।

(6) रोजगार और आश्रितता तथा जीविका के मुख्य एवं गौण साधनों पर महत्वपूर्ण तथ्य संग्रहीत किए गए। निम्न प्रश्न पूछे गए (1) धन्धे में नौकर रख कर रोजगार चलाने वाला, (2) नौकरी कर रोजगार चलाने वाला, (3) खुद मुख्तियारी से धन्धा करने वाला। खेती की आमदनी वाले लोगों को चार श्रेणी में विभाजित किया गया —(1) जमींदार खुद काश्त, (2) काश्तकार लगानी, (3) मजदूर काश्त, (4) जमींदार गैर काश्त।

भारतीय जनगणना (1951) सम्बन्धी कुछ तथ्य —नीचे भारतीय जनगणना सम्बन्धी तथ्यों का संक्षिप्त ब्यौरा दिया जाता है।

(1) कुल जनसंख्या—आसाम के आदिवासी क्षेत्र को छोड़कर भारत की जनसंख्या 36.13 करोड़ थी की गई। इसमें जम्मू तथा कश्मीर की जनसंख्या भी सम्मिलित है यद्यपि इस राज्य में जनगणना नहीं की गई थी।

(2) 1951 में विश्व जनसंख्या 240 करोड़ थी अतः संसार की जनसंख्या के सातवें भाग से भी अधिक व्यक्ति भारतीय थे।

(3) भारत में सबसे अधिक जनसंख्या उत्तर प्रदेश की थी। उत्तर प्रदेश की 6.3 करोड़ जनसंख्या के पश्चात् क्रमशः मद्रास की 5.7 करोड़, बिहार की 4.02 करोड़ तथा बम्बई की 3.59 करोड़ थी। अब मद्रास में से आन्ध्र अलग हो चुका है, बिहार के क्षेत्रफल में भी कुछ परिवर्तन हुआ है।

(4) समस्त भारत का जनसंख्या घनत्व 303 व्यक्ति प्रति वर्ग मील था जबकि ट्रावनकोर कोचीन का 1,015 व्यक्ति, पश्चिमी बंगाल का 806 व्यक्ति, बिहार का 572 व्यक्ति तथा उत्तर प्रदेश का घनत्व 557 व्यक्ति प्रति वर्ग मील आंका गया।

(5) भारत की लगभग 70 प्रतिशत जनसंख्या कृषक थी तथा 83 प्रतिशत जनसंख्या ग्रामवासी थी।

(6) पुरुषों तथा स्त्रियों की संख्या में 1000 तथा 947 का अनुपात था। साधारणतया चावल खाने वाले राज्यों में स्त्रियों की संख्या पुरुषों से अधिक पाई गई। इन राज्यों में मद्रास में प्रति 1000 पुरुषों के पीछे 1066 स्त्रियां, उड़ीसा में 1022, ट्रावनकोर कोचीन में 1008, कच्छ में 1097 तथा मनीपुर में 1036 स्त्रियां थीं।

(7) 1951 में एक लाख या इससे अधिक जनसंख्या वाले नगरों की जनसंख्या 75 हो गई।

(8) कलकत्ता की जनसंख्या भारत में सर्वाधिक अर्थात् 45.78 लाख, बम्बई की 28.39 लाख, मद्रास की 14.16 लाख तथा दिल्ली की 13.84 लाख थी।

इनके अतिरिक्त अनेकों प्रकार के अन्य तथ्य दिये गये हैं जिनका यहां ब्यौरा देना सम्भव नहीं है।

1961 की जनगणना—यह जनगणना स्वतन्त्र भारत की द्वितीय और सम्पूर्ण रूप में दसवीं दस-वर्षीय जनगणना थी। यह 10 फरवरी 1961 से 28 फरवरी 1961 अर्थात् 19 दिन तक की गई। बाद में पांच दिन तक गणकों ने दुबारा प्रत्येक घर जाकर एकत्रित तथ्यों की अन्तिम जांच की। जनगणना की तारीख 1 मार्च 1961 थी। इस बार गणना पर्ची (Enumeration slip) में निम्न 13 प्रश्न थे—

1 (क) नाम
  (ख) कर्त्ता से सम्बन्ध
2 पिछले जन्म दिन पर उम्र
3 वैवाहिक स्थिति
4. (क) जन्म स्थान
  (ख) जन्म गांव/नगर
  (ग) निवास काल, यदि जन्म अन्यत्र हो

5 (क) राष्ट्रीयता
(ख) धर्म
(ग) अनुसूचित जाति/अनुसूचित जन जाति
6 साक्षरता
7 (क) मातृभाषा
(ख) अन्य भाषाएं
8 यदि खेतिहर
9 यदि खेतिहर मजदूर
10 यदि पारिवारिक उद्योग मे { (क) काम का ब्यौरा (ख) पारिवारिक उद्योग (ग) नौकरी का ब्यौरा
11 8,9,या 10 को छोड़ कर अन्य काम { (क) काम का ब्यौरा (ख) उद्योग, पेशा, व्यापार या नौकरी का ब्यौरा (ग) काम करने वाले का वर्ग (घ) कारोबार या संस्था का नाम
12. काम नही करते तो क्या करते है
13 लिंग

1961 की जनगणना की कुछ विशेषताएं

भारतीय जनगणनाएं

(1) प्रश्न 4 के द्वारा यह तथ्य एकत्र किए गए हैं कि गाव से नगर और नगर से गाव को जनता का किस गति से प्रव्रजन (Migration) हो रहा है। इससे यह अनुमान लगाया जा सकेगा कि यदि गाव से जनता नगर मे बसने लगी है तो किस गति से और क्यों। हमारे देश मे 5,64,718 गाव है। हमें जनता को गावो मे रख कर ही इन्हे वे सब सुविधाएं प्रदान करनी होंगी जो शहरो मे उपलब्ध हैं।

(2) विस्थापितो के सम्बन्ध मे जो सूचना 1951 की जनगणना मे एकत्र की गई, वो 1961 मे उसे नही पूछा गया क्योंकि अब हमारे देश मे यह समस्या नही हैं।

(3) 'जाति' पर इस बार भी प्रश्न नही पूछा गया, केवल अनुसूचित जाति और अनुसूचित जन-जाति के सम्बन्ध मे ही प्रश्न पूछे गए।

(4) 1961 की जनगणना की एक मुख्य बात यह है कि इस गणना मे "काम करने वाला "और काम नही करने वाला" से सम्बन्धित प्रश्न पूछे गए जब कि 1951 में कमाऊ और बे कमाऊ पर प्रश्न पूछे गए थे। बेरोजगारी समस्या को हल करने के लिए यह आवश्यक समझा गया।

(5) प्रश्न न० 12 मे "काम नही करने वाला' में निम्न व्यक्तियों को सम्मिलित किया गया —

(अ) विद्यार्थी

(आ) गृहणी

(इ) रोग या वृद्ध अवस्था के कारण सदा के लिए अशक्त व्यक्ति।

(ई) अवकाश प्राप्त व्यक्ति जिसने दुबारा नौकरी नहीं की हो, लगान वसूल करने वाला आदि।

(उ) भिखारी आदि।

(ऊ) सजा प्राप्त कैदी, अपराधी, पागल आदि।

(ए) जिस व्यक्ति ने कभी रोजगार नहीं किया हो, और जो पहली बार रोजगार की तलाश मे हो।

(ऐ) जो व्यक्ति पहले काम करता हो किन्तु अब बेकार बैठा हो, और रोजगार की तलाश मे हो।

(6) पहली बार "मकान-सूची" को सम्पूर्ण देश मे एक ही प्रकार की रक्खा गया। मकान-सूची में निम्न प्रश्न पूछे गए —

(अ) भवन नम्बर (म्युनिसिपल या स्थानीय या गणना नम्बर)

(आ) भवन नम्बर (हर एक गणना मकान के बटा नम्बर के साथ)

(इ) सम्बन्धित मकान का उपयोग किस प्रकार होता है, जैसे निवास, दुकान, दुकान-व-निवास, व्यापार, फैक्ट्री कारखाना, स्कूल, जेल, होस्टल, होटल आदि।

(ई) कारोबार या मालिक का नाम।

(उ) वस्तुओ का नाम जो तैयार होती हैं अथवा मरम्मत, सफाई व देखभाल होती हो।

(ऊ) पिछले हफ्तो मे प्रतिदिन काम पर लगाए हुए व्यक्तियो की औसत सख्या।

(ए) यदि मशीन से काम किया जाता हो तो ईधन या शक्ति-साधन का ब्यौरा

(प्रश्न ई से ए तक उस दशा मे पूछे गए जबकि सम्बन्धित मकान कारखाना, फैक्ट्री कारोबार या दुकान हो।)

गणना-मकान का विवरण— (प्रश्न ऐ और ओ)

(ऐ) किस पदार्थ से दीवार बनी है।

(ओ) किस पदार्थ से छत का ऊपरी भाग बनाया गया है।

(औ) परिवार के कर्त्ता का नाम।

(अ) परिवार के कुल कमरो की सख्या।

(अ) क्या परिवार अपने या किराये के मकान मे रहता है?

(7) 1961 की जनगणना की एक नई विशेषता "परिवार की पर्ची" (House hold Scheduled) थी। इसका मुख्य उद्देश्य परिवार की आर्थिक गतिविधियो के सम्बन्ध में तथ्य एकत्र करना था। गति-विधिया खेती और परिवारिक उद्योग में बाटी गई। खेती के सम्बन्ध मे निम्न सूचनाए प्राप्त की गईं —

(अ) परिवार की जोत की जमीन — क्षेत्रफल एकडो मे

(1) अपनी या सरकार से प्राप्त

(ii) अन्य लोगो से या सस्थाओ से
नकदी, जिन्स या बटाई पर प्राप्त . . . ,,

(आ) *अन्य लोगो को खेती के लिए नकदी, जिन्स या*
बटाई पर दी गई जमीन ... . .

पारिवारिक उद्योग का ब्यौरा और साल मे कितने महीने चलता है, यह भी ज्ञात किया गया।

साथ ही खेती या पारिवारिक उद्योग या दोनो में काम करने वाले परिवार के सदस्य—कर्ता, अन्य पुरुष, अन्य स्त्रियो—और भाडे के मजदूरों की सख्या भी एकत्रित की गई।

इसी पर्ची के पिछले भाग पर परिवार के प्रत्येक सदस्य का नाम, लिंग, कर्त्ता से सम्बन्ध, उम्र, वैवाहिक स्थिति, काम करने वाले है तो उनका विवरण अकित किया गया।

1961 की जनगणना के आधार पर निम्न आंकडे उपलब्ध हुए हैं —

कुल जनसख्या—43 92 करोड
ग्रामीण जनसख्या—35 94 करोड }
शहरी जनसख्या—7 88 करोड }
प्रति 1000 पुरुषो पर स्त्रियो की सख्या—941
जीवन प्रत्याशा—42 वर्ष
साक्षरता—24 प्रतिशत
जनसख्या में वार्षिक वृद्धि—2 15 प्रतिशत
पुरुष—22 62 करोड
स्त्री—21 29 करोड
अशोधित मृत्युदर—18 प्रति हजार }
अशोधित जन्मदर—40 प्रति हजार }

जनगणना आयुक्त ने बताया कि पिछले 50 वर्षों मे भारत की जनसख्या में 74 05 प्रतिशत वृद्धि हुई है।

इस दस वर्षीय अवधि मे आसाम मे सब मे अधिक (34'30%) वृद्धि हुई। जनगणना मे कुल दस लाख कर्मचारियो ने कार्य किया।

हाल ही मे (सितम्बर 1963) रजिस्ट्रार जनरल ने 1961 की गणना के सम्बन्ध मे Paper No 1 of 1963 (Religion) प्रकाशित किया है जिसमें राज्यानुसार, क्षेत्रानुसार व सम्पूर्ण भारत के धर्म सम्बन्धी बहुमूल्य आकडे दिए गए हैं।

भारतीय जनगणना की कमिया —

(1) *भिन्नता* —1951 व 1961 की *जनगणना मे जो प्रश्नावलिया तथा* गणना क्षेत्र रखे गये वह पुरानी जनगणनाओं से सर्वथा भिन्न हैं। अत सब जनगणनाओ के अड्को की पारस्परिक तुलना वैज्ञानिक रूप से नहीं की जा सकती। विभिन्न व्यवसायो में कार्य करने वाले व्यक्तियो सम्बन्धी अक भी अपूर्ण तथा अव्यवस्थित हैं क्योंकि उनका वर्गीकरण वैज्ञानिक ढग से नही किया गया।

(2) आयु सम्बन्धी प्रश्न भारत में आयु के सम्बन्ध में लोगों की बहुत विचित्र धारणाएं हैं। अविवाहित बालिकाओं की आयु कम तथा विवाहितों की आयु अधिक बतलाई जाती है। वृद्ध पुरुष अपनी आयु अधिक बताते हैं। लड़कियों की आयु कम या अधिक बताने का कारण तो शारदा एक्ट है जिसके अन्तर्गत 14 वर्ष से कम की लड़की तथा 18 वर्ष से कम के लड़के का विवाह नहीं किया जा सकता। प्रौढ़ व्यक्ति केवल मानसिक सन्तुष्टि के लिए ही अपनी आयु अधिक बताते हैं। इन कारणों से आयु सम्बन्धी प्रश्नों के शुद्ध होने की सम्भावना बहुत कम रहती है।

दूसरा कारण यह है कि अधिकांश व्यक्ति अशिक्षित हैं तथा वे अपनी आयु सम्पूर्ण वर्षों में जो दस या पांच के गुणक होते हैं बतलाते हैं। 15 वर्ष, 20 वर्ष, या 25 वर्ष, इन अंकों में ही आयु बतलाई जाती है। अतः यह प्रश्न शुद्ध नहीं होते।

(3) नियुक्त कार्य भारतीय जनगणना का कार्य मुख्यतया सरकारी अथवा अर्द्धसरकारी अधिकारियों तथा कार्य कर्ताओं द्वारा किया जाता है जिसके लिए उनको कुछ शुल्क नहीं दिया जाता। विशेषकर गणना करने वालों को जिन्हें बहुत परिश्रम करना पड़ता है, कुछ नहीं मिलता। नियुक्त होने के कारण बहुधा काम को बेगार समझ कर लापरवाही से किया जाता है। अनेकों गणक बिना पूछताछ किये ही पत्रिका भर देते हैं और उनमें काल्पनिक अंकों तथा तथ्यों का समावेश होता है। परिणामस्वरूप सारा काम ही एक काल्पनिक तथ्य समूह मात्र होता है। दूसरे देशों में गणकों को कार्य शुल्क दिया जाता है जिससे वह कार्य में यथेष्ट रस लेते हैं। भारत में कार्य बहुत बड़ा होने के कारण ही सम्भवतया शुल्क देने की व्यवस्था नहीं की गई। अच्छा कार्य करने वालों को प्रमाण पत्र दिये जाते हैं परन्तु यथासम्भव कुछ शुल्क देने की व्यवस्था की जानी चाहिए। अमेरिका में प्रति 1000 व्यक्ति पर 700 डालर व्यय किया जाता है जब कि भारत में 41 रुपये अर्थात् वहां का व्यय हमारे यहां से 85 गुना है। पंच वर्षीय चुनावों में हम 5.50 करोड़ रुपये व्यय करते हैं जबकि दस वर्षीय जनगणना पर केवल 2 करोड़ रुपए। राजनैतिक स्वतन्त्रता ही हमारा लक्ष्य है जिसके लिए पर्याप्त आंकड़े उपलब्ध होना नितान्त आवश्यक है।

(4) गणकों की योग्यता एक ओर गणकों को शुल्क देने की व्यवस्था नहीं है दूसरी ओर गणक भी अधिकतर अल्पशिक्षित अध्यापक या पटवारी आदि होते हैं जो जनगणना के महत्वपूर्ण प्रश्नों तथा तथ्यों के महत्व को पूरी तरह नहीं समझते। अतः यह पत्रिकाओं में जो प्रविष्टियां करते हैं वह सर्वथा शुद्ध ही होती है यह कहना अत्युक्ति ही होगी।

(5) सामाजिक स्थिति विवाह तथा आयु सम्बन्धी प्रश्नों के अतिरिक्त जनता अपने व्यवसाय तथा आय के सम्बन्ध में भी शुद्ध प्रश्न नहीं बतलाती। अनेक व्यक्ति यह समझ कर कि सरकार अच्छा काम दिला देगी अपना नाम बेकारों की श्रेणी में लिखवा देते हैं, अपनी आय कम बतलाते हैं कि कहीं कर लगाने के लिए यह सूचना नहीं मांगी जा रही हो, अथवा कम आय बतलाने से कुछ सहायता मिलने की सम्भावना है, आदि।

इस प्रकार भारतीय जनगणना की शुद्धता में यहाँ की जनता की अशिक्षा, अज्ञानता एवं अन्धविश्वास बाधक है परन्तु सन्तोष की बात है कि इसमें क्रमशः सुधार होता जा रहा है। जनता में जागरूकता बढ़ी है तथा शिक्षा का प्रकाश भी अधिकाधिक फैल रहा है। 1951 तथा 1961 की जनगणनाओं से प्राप्त अनुभव द्वारा आगे की जनगणनाओं के अधिक वैज्ञानिक एवं शुद्ध होने की आशा रखनी चाहिए।

जन्म मरण सम्बन्धी अंक (Vital statistics) - इन समंकों के अन्तर्गत जन्म, मृत्यु, विवाह तथा बीमारियों सम्बन्धी अंकों का समावेश रहता है। प्रत्येक परिवार में जो भी मृत्यु, जन्म अथवा विवाहादि होते हैं उन्हें दर्ज करवा दिया जाता है। नगरों में दर्ज करने का कार्य नगरपालिका तथा गाँवों में पटवारी करते हैं वहाँ एक रजिस्टर रखा रहता है जिसमें सूचना प्राप्त होते ही प्रविष्टि करदी जाती है।

जीवन मरण सम्बन्धी अंकों के लेखन से स्वभावतः ही नगर की जनसंख्या की वृद्धि अथवा कमी ज्ञात होती रहती है। क्योंकि प्रविष्टि करते समय जिस रोग से मृत्यु हुई उसका भी उल्लेख किया जाता है यह जानकारी भी मिल जाती है कि कौन से भाग में किन रोगों से अधिक मृत्यु होती है तथा उन रोगों के उपचार की विशेष व्यवस्था की जा सकती है। इसके अतिरिक्त कुछ छूत के रोग होते हैं जिनके बचाव के लिए टीके लगाने का प्रबन्ध किया जाना आवश्यक है। जन्म के अंकों द्वारा नगरपालिका, पंचायत या पटवारी यह जान सकता है कि किन बच्चों के अभी तक टीका नहीं लगाया गया। चेचक से बचने के लिए शैशवावस्था में ही टीका लगवा लिया गया है इस विषय का ध्यान नगरपालिका अथवा पंचायत के अधिकारी रखते हैं। इस प्रकार जन्म मरण सम्बन्धी अंकों का दर्ज करवाना बहुत लाभदायक है।

भारत में जन्म–मरण सम्बन्धी अंकों की प्रविष्टि 1886 के अधिनियम के अन्तर्गत करवाना अनिवार्य है। केवल कुछ राज्यों की नगरपालिकाओं ने अपने नागरिकों के लिए इस प्रकार की सूचना देना अनिवार्य कर रखा है और बड़े–बड़े नगरों की नगरपालिकाएं तो इन अंकों को प्रतिदिन प्रकाशित भी करती रहती हैं। अनिवार्य न होने के कारण यह अंक अपूर्ण रहते हैं जिससे न स्वास्थ्य का उचित ध्यान रखा जा सकता है, न छूत के रोगों की समुचित रोकथाम की जा सकती है। अंकों में इतना अल्प-प्रगणन हुआ है कि उसका अनुमान लगाना सम्भव नहीं है।

भारतीय जनता अधिकतर अशिक्षित है तथा वह इन तथ्यों की प्रविष्टि का कोई महत्व नहीं समझती। अतः बहुधा परिवार में होने वाले जन्म अथवा मृत्यु का उल्लेख नहीं करवाया जाता। यह तभी सम्भव है जबकि नगरपालिकाएं इसके लिए व्यापक आन्दोलन करें तथा जनता को इन अंकों का महत्व समझाया जाय। तत्पश्चात् कानून बना कर जन्म, मृत्यु तथा विवाह सम्बन्धी अंकों की प्रविष्टि कर देना अनिवार्य कर देना चाहिये।

दूसरा कारण यह है कि बहुधा लोग छूत के रोगों के सम्बन्ध में तथ्यों को छिपाने की चेष्टा करते हैं क्योंकि टीके अथवा इन्जेक्शन का भय अब भी विद्यमान है। इससे प्लेग, चेचक आदि संक्रामक रोग फैल जाते हैं। सूचना देने पर इस प्रकार के रोगों का निवारण किया जा सकता है। नगरपालिकाओं को चाहिए कि वह अपने कर्मचारियों को इस सम्बन्ध

में स्पष्ट आदेश दें कि कहीं भी छूत अथवा अन्य रोग फैलने से पूर्व ही उसकी सूचना स्वास्थ्य अधिकारी को देकर उसका निवारण करने में सहायक हो।

अब जन्म मरण के अंकों के संग्रहण करने की रीति में सुधार करने के लिए भारत के जनगणना विभाग के रजिस्ट्रार जनरल ने एक द्व वर्षीय योजना तैयार की है जिसे 1963–64 से लागू कर दिया गया है। योजना दीर्घ कालीन एवं लघुकालीन है। दीर्घकालीन योजना में ५ परियोजनाएं कार्यान्वित की जावेंगी। लघुकालीन योजना के अनुसार 1963 में गावों और कस्बों में एक प्रतिशत न्यादर्श चुनकर जन्म, मृत्यु एवं प्रव्रजन (migration) सम्बन्धी आकड़ों को एकत्र किया गया है। हाल ही में भारत सरकार द्वारा आमन्त्रित अमरीकी विशेषज्ञ डा० लिन्डर ने सुझाव दिया है कि प्रत्येक राज्य के स्वास्थ्य विभाग या सांख्यिकी निदेशालय में जन्म–मृत्यु सम्बन्धी आकड़े एकत्र करने के लिए प्रथक प्रशासनिक इकाई स्थापित की जानी चाहिए। भारत सरकार ने इस सम्बन्ध में उचित कार्यवाही शुरू कर दी है। जन्म–मृत्यु आदि सबंधी आँकड़े एकत्र करने के लिए शीघ्र ही एक अधिनियम बनाने वाली है। विदेशों में मृत्यु होने पर शव को जलाने से पहले मृत्यु प्रमाण–पत्र (Death Certificate) प्राप्त करना अनिवार्य होता है। जन्म–मरण आदि की सूचना देने के लिए विकसित देशों में निशुल्क पोस्टकार्डों की व्यवस्था होती है। हमें भी उक्त सुविधाएं प्रदान करने की दिशा में कदम उठाने चाहिए।

कृषि समंक (Agricultural Statistics)

कृषि समंकों से तात्पर्य, कृषि क्षेत्र, उत्पादन, वन, पशु, मत्स्य पालन, कृषि मूल्य आदि से है अर्थात् जिन तत्वों का कृषि से प्रत्यक्ष या परोक्ष सबंध है वह सभी कृषि समंकों के अन्तर्गत आते हैं। कृषि समंक भारतवर्ष में कौटिल्य के समय से एकत्र किए जाते रहे हैं।

क्षेत्र समंक कृषि–क्षेत्र को दो भागों में बांटा गया है (१) स्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्र तथा (२) अस्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्र। अस्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्र उत्तर प्रदेश, पंजाब, मद्रास आदि हैं। इन क्षेत्रों में भूमि सम्बन्धी अंक पटवारी अथवा लेखपाल रखते है। पटवारी गाव के सब क्षेत्रों में घूमकर अलग–अलग फसल के आधीन क्षेत्र की जानकारी प्राप्त करते हैं। क्योंकि इन सब प्रदेशों का सर्वेक्षण हो चुका है अतः इनके फसल सम्बन्धी क्षेत्रों के अङ्क प्राप्त करना अत्यन्त सरल है।

वैसे तो यह कहा जा सकता है कि इस प्रकार एकत्रित अंक सर्वथा शुद्ध होंगे परन्तु पटवारी बहुधा स्वयं निरीक्षण न कर लोगों के कहने से ही कृषि सम्बन्धी प्रविष्टियां कर लेते हैं जिससे सारे लेख अशुद्ध हो जाते हैं। इस असावधानी का निवारण इस प्रकार किया जा सकता है कि कानूनगो जो लगभग पचास गांवों का निरीक्षक होता है समय समय पर पटवारियों के काम की जाच करे। दूसरा सुझाव यह है कि पटवारी या लेखपाल का कार्य कुछ हल्का किया जाय ताकि वह भूमि कार्य की ही ठीक देखरेख कर सके।

स्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्रों (बिहार, बगाल, उड़ीसा, उत्तर प्रदेश के पूर्वी भाग

आदि) में कृषि सम्बन्धी अकों की लगान आदि की वसूली के लिए तो आवश्यकता पडती नही है अत गाव का लम्बरदार या पटेल (मुखिया) ही प्रारम्भिक अक एकत्रित करता है। गाव का मुखिया इच्छानुसार अङ्क एकत्रित करके परगनाधीश (S. D. O) को भेज देता है जो अपने अनुभवानुसार उनमें फेर-बदल कर जिलाधीश को भेज देता है और जिलाधीश अपने अनुभव के अनुसार उनमें सशोधन कर अ तिम रूप दे देता है।

इस दृष्टि से क्षेत्र सम्बन्धी अङ्को मे बहुत कमी रह जाती है। सब कार्य बिना किसी उत्तरदायित्व तथा बिना व्यक्तिगत देखभाल के होता है। परिणामस्वरूप सब अङ्क काल्पनिक होते है। इनके आधार पर फसल का अनुमान लगाना केवल मानसिक सतुष्टि के लिए ही यथेष्ट हो सकता है अन्यथा शुद्धता की कोई सभावना इन अङ्को मे नही है।

अस्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्रो मे जो पद्धति चालू है उसे स्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्रो मे भी लागू करना चाहिये और निरीक्षण अधिकारी प्रतिष्ठित होने चाहियें ताकि वह अपने आधीन काम करने वालो को भी समक एकत्रित करने की उचित रीति एव महत्व समझा सकें।

उत्पादन समंकः परम्परागत रीति (Traditional Method).

इस रीति के अन्तगत कृषि निर्देशक (Director of Agriculture)) द्वारा कुछ क्षेत्रो मे होने वाली फसलो के अङ्क लिये जाते हैं और उनकी औसत निकाल कर उसे पाच वर्षो की औसत मान लिया जाता है। अब इस औसत से सारी भूमि को गुणा कर देते हैं और सारी भूमि की पैदावार के अक प्राप्त हो जाते हैं। सामान्य पैदावार से तात्पर्य है कि "औसत भूमि पर औसत वर्ष मे औसत उत्पत्ति"। परन्तु "औसत भूमि" तथा "औसत उत्पत्ति" दोनो का ही निश्चय करना कठिन है। व्यवहार मे ऐसा होता है कि कृषि निर्देशक अपनी बुद्धि तथा विचार के अनुसार चाहे जिस भूमि के टुकडों पर उत्पन्न होने वाली फसल कटवा कर देख लेता है और पाच वर्षों की औसत निकाल लेता है। यह अवैज्ञानिक, अनुचित तथा भ्रामक है।

इसके अतिरिक्त औसत तो पाच वर्ष की निश्चत की जाती है परन्तु भारत मे तो पाच में से साधारणतया एक या दो वर्ष ही अच्छे होते है शेष में अकाल या बहुत साधारण फसल की ही सम्भावना रहती है। साथ ही भूमि के टुकडो का चुनाव बिना किसी आधार के किया जाता है। अत यह औसत वास्तविक स्थिति का प्रतिनिधित्व नही करती।

किसी वर्ष में सामान्य वर्ष से कम फसल होने पर पटवारी यह तय करता है कि यह फसल सामान्य फसल का कौनसा भाग है। इसे आनो में तय किया जाता है। किसी वर्ष मे बारह आना फसल है इसका तात्पर्य यह है कि सामान्य फसल तो सोलह आना होती है और इस वर्ष बारह आना फसल है। कुछ स्थानों के लिए भी आनो द्वारा फसल का निर्धारण होता है। इस पद्धति को आनावारी अनुमान (Annawari Estimates) कहते हैं। यहा भी अनुमान कर्ताओं के पक्षपात के कारण परिणाम शुद्ध नहीं कहे जा सकते।

अब नई विधि के अनुसार उपज ज्ञात की जाती है। दैवनिदर्शन रीति मे फसल

(2) अकृषीय भूमि—भवन, सड़कें, रेलें, नहर आदि के उपयोग में ली गई भूमि

(3) बंजर एवं कृषि के अयोग्य भूमि—पहाड़, रेगिस्तान आदि

(4) स्थायी चरागाह और दूसरी चराने की भूमि

(5) विविध पेड़ एवं उद्यानों के उपयोग में लाई गई भूमि

(6) कृषि योग बेकार (Cultivable waste) भूमि

(7) चालू पर्ती (Current fallows) भूमि

(8) दूसरी पर्ती भूमि (Other fallow lands)

(9) शुद्ध क्षेत्रफल जिसमें खेती की जाती है।

कृषि-उत्पादन के सूचनांक (Index Numbers of Agricultural Production)

(1) आर्थिक एवं सांख्यिकीय सचालक (कृषि एवं खाद्य मन्त्रालय) के कार्यालय द्वारा 1949–50 को आधार वर्ष मानकर 28 वस्तुओं के जो 2 वर्ग—खाद्यान्न और अखाद्यान्न—में विभाजित हैं, मासिक सूचनांक तैयार किये जाते हैं और मन्त्रालय की मासिक पत्रिका "Agricultural Situation in India" और रिज़र्व बैंक की वार्षिक रिपोर्ट (Report on Currency & Finance) में माला के रूप में प्रकाशित किए जाते हैं।

(2) अन्तर्राष्ट्रीय खाद्य एवं कृषि संगठन (F.A O.) भी भारत सहित विभिन्न देशों में कृषि-उत्पादन के सूचनांक (1934–38) को आधार मानकर अपनी पत्रिका में प्रकाशित करता है। इससे विभिन्न देशों के कृषि-उत्पादन की तुलना हो जाती है।

(3) दिल्ली से प्रकाशित होने वाली गैर सरकारी साप्ताहिक पत्रिका ईस्टर्न ईकानामिस्ट (Eastern Economist) भी 1936–37 से 1938–39 के कृषि उत्पादन के औसत को आधार मानकर 14 वस्तुओं पर आधारित प्रति वर्ष कृषि-उत्पादन सूचनांक प्रकाशित करता था।

(4) रिज़र्व बैंक भी 1948–49 को आधार मानकर 17 वस्तुओं पर आधारित वार्षिक कृषि-उत्पादन सूचनांक प्रकाशित करता है।

पशुधन सम्बन्धी अंक—पशुओं सम्बन्धी अङ्क पचवर्षीय गणना द्वारा ज्ञात किए जाते हैं। पशुधन गणना का कार्य सब प्रथम 1919–20 में किया गया था। गणना द्वारा जो अङ्क प्राप्त होते हैं उन्हें Indian Live Stock Census) भारतीय पशुधन गणना) में प्रकाशित किया जाता है। इस प्रकाशन में विभिन्न राज्यों द्वारा प्रयोग में लाये जाने वाले कृषि सम्बन्धी यन्त्रों का भी आगणन दिया जाता है। पशुओं की गणना करने का कार्य भी अस्थाई बन्दोबस्त क्षेत्रों में पटवारी तथा स्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्र में विशेष सरकारी कार्यकर्ताओं द्वारा किया जाता है। नगरों में नगरपालिकाएं यह कार्य करती है।

1961 की पशु गणना के अनुसार भारत में 33,65,000 पशु थे, जिनमें 17,57,000 बैल-गाय आदि, 5,11,000 भैंस आदि व 10,97,000 भेड़े, बकरियां,

घोड़े, खच्चर आदि थे। 1956 व 1961 में भारत में पशु संख्या क्रमशः 30,65,000 व 29,60,000 थी

Indian Livestock Statistics नामी प्रकाशन में दूध, मक्खन, घी, मांस, अण्डे आदि तथा ऊन के सम्बन्ध में भी अङ्क प्रकाशित किए जाते हैं। इस प्रकाशन में पशुओं का तीन वर्गों में विभाजित किया जाता है–(1) Bovines-गाय भैंस बैल आदि।

(2) Ovines—भेड़, बकरी, घोड़े, गधे, ऊंट, खच्चर, सूअर आदि।

(3) अन्य—मुर्गी, बत्तखें, चिड़िया आदि।

वन समंक 1947-48 से वनों सम्बन्धी अङ्क Indian Forest Statistics में प्रकाशित किए जाते हैं। इनमें वनों के उत्पादन, लकड़ी तथा सम्बन्धित उद्योग, भाव व्यय तथा वनों सम्बन्धी वस्तुओं के विदेशी व्यापार सम्बन्धी अंक उपलब्ध होते हैं।

वन-उत्पादन को निम्न वर्गों में विभाजित किया जाता है —

(1) Timber, (2) Round wood, (3) Pulp and Matchwood (4) Firewood, (5) Charcoal wood, (6) Minor forest produce बाँस, बेंत, गोंद, लाख आदि।

क्षेत्रफल (Area) के अनुसार वनों को निम्न तीन वर्गों में विभाजित किया जाता है —

(1) रक्षित वन, (2) सुरक्षित वन, और (3) वर्गीयकृत वन।

कृषि समंकों की कमियां-कृषि समंकों की निम्नलिखित कमियां हैं—

(1) अशुद्धता —कृषि समंक अधिक शुद्ध नहीं होते क्योंकि उनके संग्रहकर्ता इस कार्य के लिए उपयुक्त नहीं है। साथ ही प्रारम्भिक अंकों के विश्लेषण के लिए वैज्ञानिक रीतियों का प्रयोग भी नहीं किया जाता।

(2)अपूर्णता —कई प्रकार के अंक कई स्थानों पर प्रकाशित होते हैं और उनमें एकता नहीं होती। उदाहरण स्वरूप वनों सम्बन्धी अंक Indian Forest Statistics तथा Indian Agricultural Statistics दोनों पत्रिकाओं में प्रकाशित होते हैं परन्तु उनमें अन्तर होता है कारण कि अन्तिम पत्रिका में वह अपूर्ण हैं। इसके अतिरिक्त बहुधा कुछ क्षेत्रों के अंक बहुत समय तक प्रकाशित ही नहीं किये जाते।

(3) प्रकाशन में देर —बहुधा जब अंक प्रकाशित होते हैं तब तक वह बहुत पुराने तथा तुलना के अयोग्य रह जाते हैं। दो तीन वर्ष के पश्चात् प्रकाशित होने वाले अंकों का महत्व कम हो जाना स्वाभाविक ही है।

(4) इन कमियों के अतिरिक्त क्षेत्रफल तथा पशुओं के सम्बन्ध में अनुमान बहुधा भ्रामक एवं काल्पनिक होते हैं क्योंकि वह शुद्ध तथ्यों पर आधारित नहीं होते।

उपरोक्त कमियों के अतिरिक्त मापणीयन में कमी, परिभाषा और वर्गीकरण में समानता की कमी, प्राथमिक सूचक-संस्था, समन्वय की कमी, आयोजन एवं समन्वय की कमी भी ध्यान देने योग्य हैं।

गत वर्षों में भारतीय कृषि शोध संस्था, भारत सरकार के कृषि विभाग तथा

भारतीय सांख्यिकीय विद्यालय द्वारा कृषि-ग्रकों का प्रकाशन अधिक वैज्ञानिक आधारों पर होने लगा है।

औद्योगिक समंक (Industrial Statistics)

एक कृषि प्रधान देश होने के नाते भारत में औद्योगिक विकास सम्बन्धी अंक के प्रकाशन की ओर कभी विशेष ध्यान नहीं दिया गया। द्वितीय महायुद्ध से पूर्व लगभग एक दर्जन उद्योगों के सम्बन्ध में अंक एकत्रित किये गये थे और वह उद्योगों द्वारा स्वेच्छा से दी गई सूचनाओं पर आधारित थे।

भारत में औद्योगिक समंकों की पूर्ण जानकारी के लिए इन्हें निम्न तीन वर्गों में विभाजित किया जा सकता है —

(1) उत्पादन और लागत के समंक

(2) शक्ति (Power) उपभोग के समंक

(3) सामान्य समंक (General Statistics)

(1) उत्पादन और लागत (Output and Cost) —के समंक 1942 से पहिले तो बहुत ही अपर्याप्त थे। 1946 में निर्मित माल की वार्षिक गणना चालू होने के बाद स्थिति में काफी सुधार हुआ है। सूती-कपड़ा मिलों के उत्पादन समंक सबसे पुराने हैं। इन समंकों को सूती उद्योग (समंक) अधिनियम, 1926 के अन्तर्गत एकत्रित किया जाता है। औद्योगिक समंकों को सचालक के कार्यालय के द्वारा प्रति मास Monthly Statistics of Cotton Spinning and Weaving in Indian Mills में प्रकाशित किया जाता है।

C S O के द्वारा प्रकाशित मासिक पत्रिका Monthly Statistics of Production of Selected Industries in India में जूट, कागज, इस्पात, चीनी, सीमेंट, पैट्रोल, माचिस, मिट्टी का तेल, गेहूं, आटा, रागेन आदि के उत्पादन समंक दिए रहते हैं। इसमें 91 उद्योगों के समंक स्वेच्छा से प्रकाशित होते हैं।

Annual Statistical Abstract, जो C S O के द्वारा निकाला जाता है, में भी उपरोक्त उत्पादन समंकों का सारांश दिया जाता है।

D G C I & S कलकत्ता से प्रकाशित साप्ताहिक The Indian Trade Journal में भी औद्योगिक समंक का विवरण दिया जाता है। प्रत्येक राज्य में चीनी का कितना उत्पादन व कितना रहतिया (Stock) है, इस पत्रिका में दिया जाता है।

(2) शक्ति उपभोग के समंक —धनबाद से खानों के मुख्य निरीक्षक के द्वारा प्रकाशित Monthly Survey of Business Conditions in India में दिये जाते हैं (1951 से इसे उद्योग-व्यापार पत्रिका "में मिला दिया गया है) इसके अतिरिक्त उपरोक्त पत्रिका में सूती, कटगोस, जूट, चीनी व लोहा एवं इस्पात निर्माण के समंक भी दिए जाते हैं। शक्ति का कुल उत्पादन और कुल उपयोग दिया रहता है। लेकिन शक्ति के समंक पर्याप्त नहीं होते हैं। कई संस्थाओं द्वारा उत्पादित शक्ति के अंक

इसमे सम्मिलित नही किए जाते है। शक्ति उपभोग के समक भारत सरकार के विद्युत ग्रायुक्त द्वारा भेजे जाते है।

(3) सामान्य समक —इसमे हम फैक्ट्रयो की सख्या, विनियोजित पूजी आदि के समको का अध्ययन करते हैं। यह सब सूचना निम्न प्रकाशनो मे वार्षिक रूप से प्रकाशित की जाती है —

(अ) श्रम सस्थान (Labour Bureau) द्वारा प्रकाशित Large Industrial Establishments in India

(ब) श्रम सस्थान द्वारा प्रकाशित Statistics of Factories in India

(स) केन्द्रिय साख्यिकीय सगठन (C S O) द्वारा प्रकाशित Statistical Abstract

(द) वित्त मत्रालय द्वारा प्रकाशित (Report on the working of Joint Stock Companies in India)

1942 मे भारत सरकार ने Industrial Statistics Act (औद्योगिक समक अधिनियम) पारित किया जिसके द्वारा भारत सरकार को उद्योगो से अङ्क एकत्रित करने का अधिकार मिल गया। इस अधिनिय के द्वारा सरकार विभिन्न उद्योगो को प्रश्नावलिया भेज सकती थी और उद्योगो के लिए उनका उत्तर देना अनिवार्य था। उत्तर न देने पर जुरमाने की व्यवस्था थी। इसी नियम के अनुसार 1946 से निर्मित माल की गणना (Census of Manufactures) करवाई गई। 1959 से औद्योगिक समक C S O के निदर्शन मे N S S द्वारा सगणना एव निदर्शन रीति से एकत्र किए जा रहे हैं। इन्हे वार्षिक पत्रिका A S I मे प्रकाशित किया जाता हैं।

इस प्रकार की गणना अब प्रतिवर्ष प्रकाशित की जाती है। सगठित निर्माण उद्योगो को 63 वर्गो मे विभक्त किया गया हैं इनमे से 29 वर्गों मे देश के प्रमुख वृहदाकार उद्योग हैं जिनका विवरण प्रकाशन मे दिया जाता है। अक सग्रहण सम्बन्धी अधिनियम ऐसे समस्त कारखानो पर लागू हैं जिनमे 20 या अधिक व्यक्ति काम करते हैं। दूसरी दशा मे यह उन कारखानो पर भी लागू है जिन मे 10 या अधिक व्यक्ति काम करते हो और कारखाने मे शक्ति का प्रयोग किया जाता हो।

प्रत्येक उद्योग की राज्य अनुसार सूचना मिलती हैं क्योकि राज्य सरकारो द्वारा ही अङ्क सकलित करवाये जाते है। इसमे सम्बन्धित सरकारी प्रकाशन मे उद्योगो की पूजी, श्रम, कच्चा माल, ईधन या शक्ति उत्पादन आदि अनेक प्रकार की सूचनाओ का समावेश रहता है। इस प्रकार उद्योगो सम्बन्धी महत्वपूर्ण सामग्री इस प्रकाशन से उपलब्ध होती है। परन्तु सबसे बडी कमी यह थी कि अभी तक केवल 29 उद्योगो का ही समावेश इस प्रकाशन मे किया गया था।

औद्योगिक उत्पादन सम्बन्धी समंक —उद्योगो का वार्षिक सर्वेक्षण (A.S I) वर्ष मे एक बार प्रकाशित होती है परन्तु केन्द्रीय साख्यिकीय सगठन C S O प्रतिमास लगभग 90 उद्योगो के उत्पादन सम्बन्धी अक प्रकाशित करता है। यह अक उद्योगो द्वारा स्वेच्छा पूर्वक दिये हुए होते हैं। Monthly Statistics of Produc-

tion of Selected Industries of India मे दिये गये 90 उद्योगो को तीन भागो मे बाटा गया है —(1) खान खादना (2) माल निर्माण सेवा (3) विद्युत प्रकाश और शक्ति। परन्तु, क्योंकि यह स्वेच्छापूर्वक दिए हुए ग्रक होते हैं ग्रत इनकी विश्वसनीयता सदिग्ध है।

भारतीय व्यापारी विश्वसनीय ग्रक प्रकाशित होने नही देना चाहते। इसका एक प्रमाण भारत सरकार को तब मिला जब 1952 मे सरकार ने विभिन्न उद्योगो से देशी तथा विदेशी कर्मचारियो के सम्बन्ध मे व्यौरा मागा। बहुत कम उद्योगो ने यह व्यौरा दिया। ग्रत 1953 मे भारत सरकार ने Collection of Statistics Act (समक सग्रहण अधिनियम) पारित किया जिसके द्वारा सरकार किसी भी उद्योग से निम्नलिखित विषयो पर सूचनाए माग सकती है। इस अधिनियम को लागू करने के लिए नियम (rules) 1959 मे बन कर तैयार हुए और इन्हे 1960 मे लागू किया गया।

(1) किसी उद्योग सम्बन्धी कोई विषय।

(2) किसी व्यापारिक ग्रथवा ग्रौद्योगिक सस्थान सम्बन्धी कोई विषय।

(3) वस्तुग्रो के मूल्य, उपस्थिति, पारिश्रमिक, बेरोजगारी, कार्य घन्टे, विवाद, श्रम कल्याण सम्बन्धी कोई विषय।

इस अधिनियम मे 1942 का ग्रौद्योगिक समक ग्रधिनियम मिला दिया गया है। इस ग्रधिनियम द्वारा सरकार ग्रब देश विदेश से व्यापार करने वाली किसी भी सस्था, चाहे वह बैक हो या स्टोक एक्सचेंज, कोई भी सूचना माग सकती है।

ग्रौद्योगिक सूचनाक (Industrial Index Numbers)

ग्रौद्योगिक सूचनाक सरकारी एव गैर सरकारी सस्थाग्रो द्वारा तैयार किए जाते है। सरकारी सूचनाक C.S.O द्वारा तैयार किए जाते हैं और गैर सरकारी सूचनाक साप्ताहिक पत्रिकाए Eastern Economist और Capital द्वारा।

I—सरकारी ग्रौद्योगिक उत्पादन का सूचनाक—C.S.O द्वारा यह सूचनाक 1956 के ग्राधार-वर्ष पर प्रति माह तैयार किया जाता है। इसमे 201 वस्तुए शामिल है जो 3 समूहो ग्रौर 20 विभागो मे बाटी गई है। यह Monthly Statistics of Production of Selected Industries in India मे प्रकाशित सामग्री के ग्राधार पर तैयार किया जाता है। उद्योगो का वर्गीकरण भी वही है जो वार्षिक निर्मित माल की गणना का है।

II—'ईस्टर्न इकॉनामिस्ट' का ग्रौद्योगिक उत्पादन सूचनाक—ग्रगस्त 1948 मे, ग्रगस्त 1939 मे समाप्त होने वाले वर्ष के ग्राधार पर प्रतिमास तैयार किया गया उद्योगो का वर्गीकरण व भार निम्नलिखित थे।

उद्योग	भार
(क) वस्त्र	
(i) भारत मे कपास-उपभोग	40
(ii) जूट-निर्मित माल	17

(ख) ईंधन एवं शक्ति	10
(ग) अन्य	
(i) इस्पात-पिण्डक (Steel Ingots)	8
(ii) कच्चा लोहा	7
(iii) कागज	1
(iv) माचिस	2
(v) रग लेप	1
(vi) गन्धक का तेजाब	1
(vii) सीमेन्ट	3
(viii) चीनी	10
	100

सूचनाक के बनाने मे भारित गुणोत्तर मध्यक का उपयोग किया गया। तीनो समूहो के लिए व सामान्य सूचनाक अलग अलग बनाए जाते थे। केवल १३ वस्तुओ पर आधारित सूचना समस्त वस्तुओ का प्रतिनिधित्व नही कर सकती अत वस्तुओ की सख्या बढानी चाहिए।

III 'कैपिटल का औद्योगिक क्रियाशीलता (Industrial Activity) सूचनाक—कलकत्ता से प्रकाशित साप्ताहिक पत्रिका "कैपिटल" मार्च 1938 से से प्रतिमाह औद्योगिक क्रियाशीलता का सूचनाक प्रकाशित करता आ रहा है। विभिन्न मद व उनके भार निम्नलिखित हैं—

(अ) औद्योगिक उत्पादन	भार
(i) कपास निर्मितिया	9
(ii) जूट निर्मितिया	6;
(iii) इस्पात पिण्डक (Steel Ingots)	
(iv) कच्चा लोहा (Pig Iron)	8
(v) सीमेन्ट	5
(vi) कागज	3
(आ) खनिज उत्पादन	
(i) कोयला	7
(इ) भारित वेगनो की सख्या	24
(ई) वित्तीय समक	
(i) बैक समाशोधन	20
(उ) परिचलन मे पत्र मुद्रा	6
(ऊ) विद्युत उपभोग	7
	100

उपरोक्त सीमेन्ट सूचनाक 1938-39 से 1946-47 तक बन्द हो गया था।

अब जनवरी 1948 के आधार पर फरवरी 1948 से यह फिर चालू कर दिया गया है। यह खेदजनक है कि सरकार द्वारा औद्योगिक क्रियाशीलता का कोई सूचनाक तैयार नहीं किया जाता है।

(IV) औद्योगिक लाभ के सूचनाक—वित्त मत्रालय के कम्पनी प्रशासन विभाग द्वारा 1955 को आधार वर्ष मान कर समस्त उद्योगो को 6 वर्गों मे विभक्त करके यह सूचनाक तैयार किया जाता है।

मूल्य समंक
(Price statistics)

भारत मे मूल्यो सम्बन्धी समको का प्रकाशन कई सरकारी तथा अनेकों निजी पत्रिकाओ द्वारा किया जाता है।

फसल के मूल्य—कृषको को फसल के समय जो विक्रय मूल्य मिलता है वह थोक मूल्य है जो क्रेता द्वारा दिया जाता है। कुछ राज्यों मे तो यह मूल्य कुछ चुने हुए बाजारो के मूल्य माने जाते थे तथा कुछ राज्यो मे थोक मूल्य और कही कही फुटकर मूल्यो को महत्व दिया जाता था। उदाहरणात आसाम मे फसल के समय के चार मण्डियो के थोक मूल्य, बम्बई मे फुटकर मूल्य तथा बगाल मे दो तीन मण्डियो के फुटकर मूल्य, लिये जाते थे। यह मूल्य 1946-47 तक Indian Agricultural Statistics मे, जो अर्थ सांख्यिकीय निदेशक प्रकाशित करता था, मे दिये जाते थे। यह समान आधार पर सग्रहीत न होने के कारण वास्तविक मूल्यो का प्रतिनिधित्व नही करते थे। अत 1950 में एक नई योजना बनाई गई।

इस योजना के अनुसार फसली मूल्य (Harvest Prices) वह औसत थोक मूल्य है जो उत्पादक को अपनी फसल गाव मे ही फसल के समय बेचने से प्राप्त होते है। औसत निकालने की रीति यह है कि जिले के कुछ प्रतिनिधि गांवो मे बिके हुए लगभग एक ही प्रकार के माल के मूल्य हर शुक्रवार को एकत्रित कर उनकी औसत ले लेते हैं। यह जिले का प्रतिनिधि या औसत मूल्य होता है। प्रत्येक जिले के औसत मूल्य को उस जिले के उत्पादन के अनुपात मे भार देकर सारे जिलो की औसत निकाल लेते है। यह राज्य का सम्बन्धित कृषि पदार्थ का औसत मूल्य है। कुछ राज्यो ने इस पद्धति का प्रयोग आरम्भ कर दिया है।

इस पद्धति में सबसे बडी कमी यह है कि कृषि वस्तुओं मे प्रकार भिन्नता (Variety) बहुत है अत जो मूल्य लिये जाते हैं वह प्रत्येक प्रकार का उचित प्रतिनिधित्व नही कर सकते। दूसरी कठिनाई यह है कि इन मूल्यो के अक एकत्रित करने का कार्य करने वाली कोई सुगठित सस्था प्रत्येक राज्य मे नही है। अत अक सग्रहण शुद्ध एव विश्वसनीय नहीं हो सकता। इसके अतिरिक्त इन अको के पर्याप्त सारणीयन, विश्लेषण तथा प्रकाशन की कोई व्यवस्था अनेकों राज्यो मे नही है। कुछ राज्यों ने अवश्य ही सांख्यिकीय विभाग आरम्भ किये हैं परन्तु उनका गठन सुदृढ एव वैज्ञानिक आधार पर करने की आवश्यकता है।

इसके अतिरिक्त औद्योगिक तथा निर्मित माल के मूल्याक भी अनेक पत्र पत्रिकाओ

मे प्रकाशित होते हैं। उद्योग–व्यापार पत्रिका तथा रिजर्व बैंक बुलेटिन (मासिक) मे कच्चे माल, निर्मित माल, चाय, तम्बाकू, चीनी आदि अनेक वस्तुए तथा सोना, चादी, अनेक कम्पनियो के अ शो एव सरकारी प्रतिभूतियो के मूल्य प्रकाशित किये जाते हैं। कई राज्यो के गजट तथा अन्य प्रकाशन भी राज्यो के कृषि पदार्थों, प्रतिभूतिया आदि के मूल्य प्रकाशित करते हैं।

देशनाक—रिजर्व बैंक बुलेटिन प्रतिमास उत्पादन, मूल्य, बैंकिंग व्यवस्था आदि के सम्बन्ध मे अनेक प्रकार के देशनाक प्रकाशित करती है। इनके साथ ही जीवन निर्वाह देशनाक तथा थोक मूल्य देशनाक भी प्रकाशित किये जाते हैं। यहा हम महत्वपूर्ण देशनाको का ही वर्णन करेंगे।

इकॉनॉमिक एडवाइजर का थोक मूल्य देशनाक (Economic Advisor's Wholesale Price Index Number)—इकॉनॉमिक एडवाइजर द्वारा 1947 मे पूर्व 23 वस्तुओ के मूल्य समाविष्ट कर एक देशनाक तैयार किया जाता था जिसका आधार वर्ष अगस्त 1939 था, परन्तु इसमे कुछ महत्वपूर्ण मदो के सम्मिलित न किये जाने के कारण इसमे परिवर्तन कर दिया गया और जनवरी 1947 से एक नइ योजना के अनुसार एक नया देशनाक प्रस्तुत किया जाने लगा जिसमे खाद्य पदार्थों का भी समावेश किया गया। यह देशनाक पाच भागो मे बटा हुआ है जिसमे 78 वस्तुए सम्मिलित है। यह प्रति सप्ताह प्रकाशित किया जाता है। साप्ताहिक मूल्यो का आधार शुक्रवार अथवा कोई समीप का दिन रहता है। देशनाक को अधिक प्रतिनिधि बनाने के लिए इसमे एक ही वर्ग की अनेको वस्तुए सम्मिलित कर फिर उनकी गुणोत्तर मध्यक निकाल ली जाती है। यह गुणोत्तर मध्यक ही देशनाक तैयार करने मे उस वर्ग का प्रतिनिधित्व करती है। देशनाक तैयार करने मे कुल 225 मूल्य उद्धरणो (Quotations) का समावेश किया जाता है।

इस देशनाक मे निम्नलिखित वर्ग तथा भार दिये जाते थे।

वर्ग	भार
1–खाद्य पदार्थ	31
2–औद्योगिक कच्चा माल	18
3–अर्द्ध निर्मित माल	17
4–निर्मित माल	30
5–विविध	4

इस देशनाक के सर्वोत्तम होते हुए भी इसकी तीव्र आलोचना की गई। यह कहा गया कि इसमे वस्तु वर्गों को जो भार दिए गए वह बहुत पुराने तथा अनुपयुक्त हैं। युद्ध काल के बाद उद्योगो का विकास बहुत हो गया है। कृषि मूल्यो मे भी बहुत परिवर्तन हुए हैं और उनका महत्व भी बढा है। वस्तुओ की सख्या का चुनाव भी ठीक नही किया गया है। खाद्य पदार्थों को अन्य वस्तुओ से अधिक महत्व देने की भी आलोचना की गई।

इन सब बातो को ध्यान में रख कर इकानामिक एडवाइजर ने कुछ समय पूर्व ही

देशनाक मे कुछ परिवर्तन कर दिया है। पहला परिवर्तन तो यह है कि आधार वर्ष 1939 के स्थान पर 1952-53 मान लिया गया है। नए देशनाक में 78 की जगह 112 वस्तुए रहेगी तथा उनके अलग अलग 555 मूल्य उद्धरण लिये जायेंगे। नये देशनाक मे वर्ग विभाजन मे भी परिवर्तन कर दिया गया तथा भार भी बदल दिए गए है।

इकानामिक एडवाइजर का नवीन
थोक मूल्य देशनाक

वर्ग		भार
(1) खाद्य पदार्थ		504
(2) शराब तथा तम्बाखू		21
(3) ईंधन, शक्ति, प्रकाश तथा तेल आदि		30
(4) औद्योगिक कच्चा माल		*155*
(5) निर्मित माल		290
(अ) माध्यमिक औद्योगिक उत्पादन	249	
(ब) तैयार माल	41	
		1000

नई श्रृंखला मे गुणोत्तर मध्यक के स्थान पर भारित समान्तर मध्यक का प्रयोग किया गया है और विविध वर्ग को हटा दिया गया है।

उक्त देशनाक के अतिरिक्त भारतीय Labour Bureau द्वारा श्रमिको के जीवन निर्वाह सम्बन्धी देशनाक प्रकाशित किये जाते है। रिजर्व बैंक आफ इंडिया द्वारा प्रति मास निर्वाह देशनाक, वस्तु मूल्य देशनाक, उत्पादन देशनाक, प्रतिभूति मूल्य देशनाक, विदेशी व्यापार देशनाक, श्रमिक वर्ग निर्वाह व्यय देशनाक तथा अन्य अनेक क्षेत्रो से सम्बन्धित देशनाक रिजर्व बैंक बुलेटिन मे प्रकाशित किये जाते हैं। वस्तु मूल्यो सम्बन्धी देशनाक उद्योग व्यापार पत्रिका (मासिक) मे भी प्रकाशित होते हैं।

फुटकर मूल्य (Retail prices)

निम्न केन्द्रो के देशनाक आधार वर्ष 1949 पर दो भागो मे तैयार किए जाते हैं—

लेबर ब्यूरो माला	20 केन्द्र
राज्य माला	14 केन्द्र

(अ) लेबर ब्यूरो माला (Series)

राज्य	केन्द्र
आसाम	1 गोहाटी
	2. सिलचर
	3. तिनसुखिया

बिहार	4. जमशेदपुर
	5. देहरी सोन पर
	6 मुंगेर
	7. झरिया
महाराष्ट्र	8 अकोला
मध्य प्रदेश	9. जबलपुर
	10 भोपाल
	11. सतना
मद्रास	12. चाय केन्द्र (Plantation Centres)
मैसूर	13. मरकारा
उडीसा	14 बरहामपुर
	15 कटक
पजाब	16 लुधियाना
राजस्थान	17 अजमेर
	18. ब्यावर
प० बगाल	19. खड़गपुर
दिल्ली	20. दिल्ली

(ब) राज्य माला (State series)

राज्य	केन्द्र
आन्ध्र प्रदेश	1. हैदराबाद
महाराष्ट्र	2 बम्बई
	3. शोलापुर
	4. जलगाव
	5 नागपुर
सौराष्ट्र	6 अहमदाबाद
मद्रास	7. मद्रास
मैसूर	8 मैसूर शहर
	9. बैंगलोर
	10 कोलार स्वर्ण क्षेत्र
केरल	11. त्रिचूर
	12. इर्नाक्यूलम
उत्तर प्रदेश	13 कानपुर
प० बगाल	14. कलकत्ता

उपरोक्त देशनांकों की सबसे बडी कमी यह है कि इनके आधार वर्ष अलग-अलग हैं, जिससे एक सामान्य व्यक्ति गलत अर्थ लगा सकता है। अलग-अलग केन्द्रों में वस्तुओं की

सख्या भी भिन्न-भिन्न है। मूल्य उद्धरण (Quotations) प्राप्त करने के तरीके भी समान नहीं है। इन कारणों से इन देशनांकों की तुलना करना कठिन है। अब प्रयत्न किए जा रहे है कि इनका आधार वर्ष एक ही हो।

लेबर ब्यूरा का अखिल भारतीय अन्तरिम श्रौसत श्रमिक वर्ग उपभोग मूल्य देशनाक (Labour Bureau Interim Series of all India Average Working Class Consumer Price Index Number) – 1944 से 1945 के आधार वर्ष पर ही आधारित लेबर ब्यूरो द्वारा औद्योगिक श्रमिक वर्ग के लिए अखिल भारतीय उपभोग मूल्य देशनाक तैयार किया जाता है। अब इस देशनाक का आधार वर्ष 1949 कर दिया गया है ताकि इसकी लेबर ब्यूरो द्वारा ही तैयार किए गए अखिल भारतीय श्रमिक मजदूरी देशनाक से तुलना की जासके। इन देशनाक को तैयार करने में 15 लेबर ब्यूरो के केन्द्र तथा राज्य शृखला के 9 केन्द्र सम्मिलित किये गए हैं। इस देशनाक को बनाने की प्रणाली भी सरल है। प्रत्येक केन्द्र के अन्तिम देशनाक को जोड़कर उनका भारित समान्तर मध्यक निकाल लिया जाता है। भार प्रत्येक केन्द्र में औद्योगिक श्रमिक संख्या के आधार पर दिए जाते है।

अखिल भारतीय श्रमिक वर्ग के उपभोग मूल्य देशनाक का कोई विशेष महत्त्व नहीं है क्योकि इसमे पृथक् मूल्यो के आधार पर देशनाक तैयार किया जाता है और अलग अलग केन्द्र पर श्रमिकों का खान-पान, रहन सहन भिन्न भिन्न होता है। उपरोक्त भिन्नताओं के कारण इस देशनाक का प्रयोग सीमित होजाता है। शीघ्र ही यह देशनाक 1950 के आधार वर्ष पर तैयार किया जाने लगेगा।

लेबर ब्यूरो के द्वारा मरकारा (कुर्ग) के चाय बागानो के श्रमिको के लिए एक अन्तरिम जीवन निर्वाह देशनाक 1949 के आधार वर्ष पर भी तैयार किया जाता है —

लेबर ब्यूरो के अतिरिक्त कुछ राज्य सरकारें भी अपने अपने राज्यो के श्रमिकों का जीवन निर्वाह देशनाक तैयार करती है जिनमें बम्बई व कानपुर के श्रमिक वर्ग के जीवन निर्वाह देशनाक उल्लेखनीय है।

बम्बई श्रमिक वर्ग का जीवन निर्वाह देशनाक—बम्बई राज्य के श्रम विभाग द्वारा यह देशनाक 1921 से तैयार किया जाता है अब इसका आधार वर्ष अगस्त 1949 कर दिया है। इस में वस्तुओं के वर्गों व भार की सख्या निम्न प्रकार है—

वर्ग	वस्तुओं की सख्या	भार
१. खाद्यान्न	23	47
२. ईंधन व प्रकाश	4	7
३. वस्त्र	6	8
४. मकान किराया	1	13
५ विविध	7	14
	46	89

बम्बई शहर के कुल श्रमिक निवासों की संख्या का २ प्रतिशत न्यादर्श लेकर चुने हुए

प्रत्येक परिवार के आय व्ययक का सर्वेक्षण किया गया है। बम्बई शहर की 12 श्रमिक बस्तियों में प्रत्येक में से दो चुनी हुई दुकानों से फुटकर भाव प्राप्त किए जाते हैं। कपड़े के मूल्य बम्बई की चार चुनी हुई मिलों से प्राप्त किये जाते हैं और मछली, बैंगन, लौकी के भाव म्यूनीसिपैलिटी से प्राप्त होते हैं।

कानपुर श्रमिक वर्ग का जीवन निर्वाह देशनांक —

उत्तर प्रदेश के श्रम विभाग द्वारा यह देशनांक अब 1949 के आधार पर तैयार किया जाता है। कुल वस्तुएं 5 वर्गों में विभाजित हैं जिनके भार निम्न हैं।

वर्ग	वस्तुओं की संख्या	भार
1 खाद्यान्न	11	42
2 ईंधन का प्रकाश	2	6
3 वस्त्र	2	8
4 मकान किराया	1	7
5 विविध	5	6
	21	69

प्रत्येक शनिवार को कानपुर की श्रमिक बस्तियों में से चुनी गई 10 दुकानों से फुटकर भाव प्राप्त किये जाते हैं।

निम्न राज्य-सरकारें भी अपने यहां के श्रमिक-वर्गों का जीवन-निर्वाह देशनांक तैयार करती हैं जो Indian Labour Journal में प्रकाशित किए जाते हैं।

	न्यून-वेतन प्राप्त कर्मचारियों के केन्द्रों की संख्या	ग्रामीण जनता के केन्द्रों की संख्या
मैसूर	1	×
मद्रास	4	8
केरल	1	1
आन्ध्र प्रदेश	2	4

उपरोक्त के अतिरिक्त निम्न राज्य सरकारें उपभोक्ता मूल्य देशनांकों की अभिनव (recent) शृंखला प्रकाशित करती हैं —

पंजाब—पटियाला, सूरजपुर

मध्य प्रदेश-इन्दौर, ग्वालियर

बंगाल — कलकत्ता-श्रमिक वर्ग और मध्यम वर्ग-आसनसोल।

हावड़ा और मिदनापुर क्षेत्र, बीरभूम क्षेत्र, मालदा, प. दिनाजपुर क्षेत्र, नादिया, मुर्शिदाबाद क्षेत्र, आसनसोल और रानीगंज क्षेत्र-श्रमिक वर्ग

आसाम— चाय-बागानों के श्रमिक वर्ग-चावल व आटा-मिलों के श्रमिक।

आधार वर्ष 1952-53 पर आधारित भारत सरकार (उद्योग एवं वाणिज्य मन्त्रालय) के आर्थिक सलाहकार द्वारा 28 वस्तुओं के थोक मूल्य देशनांक भी प्रति सप्ताह प्रकाशित किए जाते हैं।

हाल ही में श्रम ब्यूरो द्वारा औद्योगिक श्रमिकों के लिए उपभोक्ता मूल्य देशनाक की नवीन श्रृंखला 1960 के आधार वर्ष पर चालू की गई है। यह देशनाक 50 केन्द्रों के लिए तैयार किए जाते है जिसमें 32 कारखाना केन्द्र, 8 खनिज केन्द्र व 10 रोप-वन केन्द्र हैं।

मजदूरी समंक (Wages Statistics)

मजदूरी सम्बन्धी अङ्को को दो भागो मे बाटा जा सकता है (1) कृषि मजदूरी समक तथा (2) औद्योगिक मजदूरी समक।

कृषि मजदूरी समक—1905 से पूर्व मजदूरी सम्बन्धी अङ्क कुशल तथा अकुशल श्रमिको के लिये अलग-अलग राजकीय राजपत्रो मे छापे जाते थे। यह कुछ चुने हुए जिलो से सम्बन्धित होते थे और छ माही प्रकाशित किये जाते थे। कभी-कभी मजदूरी सम्बन्धी अङ्क सामाजिक तथा ग्रामीण जाच समितियो द्वारा भी उपलब्ध कराये जाते थे। 1905 के पश्चात् अर्द्धवार्षिक पारिश्रमिक अङ्क प्रकाशित करना बद करने का निश्चय किया गया और भारत सरकार के आदेश पर मद्रास, उत्तर प्रदेश तथा पजाब ने ग्रामीण तथा नागरिक मजदूरी के पचवर्षीय अङ्क प्रकाशित करने आरम्भ किये तथा बम्बई और मध्य प्रदेश ने वार्षिक अङ्को का प्रकाशन आरम्भ किया। यह अङ्क भी अधिक विश्वसनीय नहीं थे। अत 1919 मे इनमें सुधार किये गये।

1950 मे खाद्य तथा कृषि मन्त्रालय के अधीन आर्थिक तथा सांख्यिकीय निर्देशक (Director of Economics and Statistics) ने राज्य सरकारो के परामर्श से एक नई योजना बनाई। इस योजना के मुख्य तत्व निम्नलिखित हैं—

(1) कृषि मजदूरो को निम्नलिखित वर्गों में विभाजित किया गया है.—
  (i) कुशल श्रमिक
    (अ) बढई (आ.) लोहार (इ) चमार
  (ii) खेतिहर मजदूर
  (iii) अन्य कृषि मजदूर
  (iv) गडरिये

(2) वर्ग (ii), (iii), (iv) मे स्त्री, पुरुष तथा बच्चो की मजदूरी अलग अलग दी जाती है।

(3) ऐसे व्यक्तियो से सम्बन्धित मजदूरी दी जाती है जो दैनिक पारिश्रमिक पर नियोजित किये गये हो तथा नगद अथवा सामग्री के रूप में भुगतान प्राप्त करते हो।

(4) मासिक अङ्क एकत्रित किये जाते हैं और सम्बन्धित मास की सर्वाधिक प्रचलित मजदूरी ली जाती है।

(5) मजदूरी जिलावार गिनी जाती है तथा प्रत्येक जिले के एक ऐसे भाग की कृषि मजदूरी के अङ्क लिये जाते है जो सब का प्रतिनिधित्व कर सकें।

(6) जिलों से प्राप्त अङ्क एकत्रित करने के पश्चात् आर्थिक तथा सांख्यिकीय निर्देशक को सौंप दिये जाते हैं।

Indian Agricultural Wage Statistics (1950) के पहले अङ्क में इस योजना के अनुसार 14 राज्यों से प्राप्त अङ्क प्रकाशित किये गये।

1950–51 में एक कृषि मजदूरी जाँच समिति की नियुक्ति की गई। केन्द्रीय श्रम मन्त्रालय के तत्वाधान में निर्मित इस समिति ने सारे देश को 23 इकाइयों में बाटा तथा दैव निदर्शन द्वारा चुने गये ८13 गावों में जाच की गई। इसकी जाच का परिणाम Agricultural Wages in India vol I में प्रकाशित किया गया। समिति के प्रतिवेदन के अनुसार 'अ' भाग के राज्यों ने उड़ीसा में कृषि मजदूरी सबसे कम अर्थात् बारह आना (75 नए पैसे) प्रतिदिन थी। इस प्रकाशन में कृषि मजदूरों की आय, निर्वाह व्यय, ऋण आदि के सम्बन्ध में विस्तार से विवरण दिया गया है। 1956–57 की द्वितीय कृषि-मजदूर जाच समिति की सिफारिशें भी अब उपलब्ध हैं। 1962–63 में तृतीय जाच भी सम्पन्न की गई है।

औद्योगिक मजदूरी समंक (Industrial Wages Statistics)

यद्यपि औद्योगिक मजदूरों में अधिक सगठन है और उद्योगों के कार्यालय से भी मजदूरी सम्बन्धी विवरण प्राप्त हो सकता है फिर भी औद्योगिक मजदूरी समक सन्तोषजनक नहीं हैं क्योंकि भिन्न भिन्न कारखानों में मजदूरी देने की अवधि भिन्न है, यहा तक कि एक ही कारखाने में कुछ मजदूरों को सातवें तथा कुछ को दसवें दिन मजदूरी मिलती है। दूसरी कठिनाई यह है कि मजदूरी देने की पद्धति कहीं समयानुसार तथा कहीं कार्यानुसार है। इसमें भी कहीं कहीं समय तथा कार्य दोनों के अनुसार मजदूरी दी जाती है और एक ही वर्ग के मजदूरों में भी कुछ मजदूरी समयानुसार तथा कुछ को कार्यानुसार दी जाती है। तीसरी कठिनाई यह है कि विभिन्न मजदूरों के पद या नाम में अन्तर है। एक कारखाने में काम करने वाले मजदूर को जो नाम दिया गया है दूसरे में वह नाम किसी दूसरे काम के लिए दिया गया है। अन्य कामों के नाम में भी एकरूपता नहीं है। इन सब कठिनाईयों के कारण औद्योगिक मजदूरी के अङ्कों में गड़बड़ रहती है। इनमें शुद्धता तभी आ सकती है जबकि नामों तथा मजदूरी की अवधि के प्रमाप निश्चित कर दिये जाय।

उद्योगों में काम करने वाले श्रमिकों की मजदूरी सम्बन्धी कुछ अङ्क भारतीय फैक्टरी एक्ट के वार्षिक कार्य की रिपोर्टों में मिलते हैं जो राज्यों द्वारा प्रकाशित की जाती हैं। वार्षिक निर्मित माल की गणना में भी विविध उद्योगों में दी जाने वाली मजदूरी के समक एकत्र किए जाते हैं। राज्यों के श्रम-राजपत्र भी कुछ अङ्क प्रकाशित करते हैं। कुछ समय से लेबर ब्यूरो (Labour Bureau) ने भारतीय फैक्टरियों में काम करने वाले श्रमिकों की मजदूरी के देशनाक प्रकाशित करना आरम्भ किया है। फरवरी 1953 में यह देशनाक सर्व प्रथम इन्डियन लेबर गजट में प्रकाशित किये गये। राज्य सरकारों द्वारा भी इसी प्रकार के देशनाक औद्योगिक श्रमिकों, मध्य वर्गीय जनता तथा राजकीय कर्मचारियों के सम्बन्ध में प्रकाशित किए जाते हैं।

उपरोक्त देशनाक वार्षिक हैं तथा तीन वर्गों में विभाजित हैं, जो निम्न हैं :—

(1) प्रत्येक राज्य के सब उद्योग

(2) सब राज्यो के प्रत्येक उद्योग, तथा

(3) सब राज्यो के सब उद्योग,

इस देशनाक का आधार वर्ष अब 1949 है। लेबर ब्यूरो इसमे सम्बन्धित तथ्य Payment of Wages Act 1959 के अन्तर्गत एकत्रित करता है। अत. यह उन फैक्टरियो सम्बन्धी अक ही देता है जिन पर मजदूरी भुगतान अधिनियम लागू है। अब लेबर ब्यूरो ने जीवन निर्वाह व्यय देशनाको के लिए आधार वर्ष 1949 नियत कर दिया है ताकि श्रमिको की आय व व्यय की तुलना की जा सके।

व्यापार समंक (Trade Statistics)

व्यापार समक अन्य समको की भाति दोषपूर्ण नहीं है, इनका सग्रहण Department of Commercial Intelligence and Statistics, Calcutta द्वारा किया जाता है। व्यापार सम्बन्धी अक निम्नलिखित प्रकाशनो में उपलब्ध हो सकते हैं :—

(1) Monthly Statistics of the Foreign Trade of India (मासिक)

(2) Annual Statement of the Foreign sea-borne Trade of India (वार्षिक)

(3) Statistics of Foreign sea-borne Trade of India by countries and currency areas (मासिक)

(4) Customs and Excise Revenue Statements of Indian Union (मासिक)

(5) Accounts relating to the coasting Trade and Navigation of India मासिक

(6) Accounts relating to the Inland (Rail and Riverborne) Trade of India (मासिक)

(7) Statistical Abstract of India

उपरोक्त प्रकाशनो के अतिरिक्त Raw Cotton Trade Statistics, Review of Trade of India आदि अन्य सरकारी प्रकाशनों में भी व्यापारिक समंक उपलब्ध होते है। रिजर्व बैंक बुलेटिन (मासिक) तथा उद्योग व्यापार पत्रिका और, Indian Trade Journal भी महत्वपूर्ण अंक प्रकाशित करते है। अपने नामानुसार कुछ प्रकाशन तो विशेष प्रकार के व्यापार के अक ही देते है जैसे सख्या 5 तथा 6 के प्रकाशनो में क्रमश तटीय व्यापार तथा आन्तरिक व्यापार सम्बन्धी अक प्रकाशित करते हैं।

व्यापार-समकों को हम अध्ययन के लिए दो भागों मे विभाजित कर सकते हैं— 1 विदेशी व्यापार समक और 2. आन्तरिक व्यापार समक। विदेशी व्यापार समक

में जल, थल एव वायु द्वारा हुए विदेशो से व्यापार के समक सम्मिलित किये जाते हैं व आन्तरिक व्यापार समक में तटीय (Coastal) एव देश के अन्दर जल, रेल व सडक से होने वाले व्यापार के समक सम्मिलित होते हैं।

विदेशी व्यापार समंक—पहले वैदेशिक-व्यापार समक Accounts Relating to the Foreign, Sea and Air-borne Trade Navigation of India और Accounts Relating to the Trade of India by land with Foreign Countries नामक पत्रिकाओं मे प्रकाशित किये जाते थे। अप्रेल 1952 से भारत के ईरान, वर्मा पाकिस्तान और अफगानिस्तान से होने वाले स्थलीय व्यापार के समक भी उपरोक्त (प्रथम) पत्रिका में मिलाकर उसका नाम Accounts Relating to the Foreign (Sea, Air and land) Trade and Navigation of India कर दिया। अप्रेल 1956 से पत्रिका के नाम में (Sea, Air and Land) शब्द भी भी हटा दिए गए।

वैदेशिक व्यापार समको को प्रकाशित करने की विधि में 1957 में निम्न मुख्य परिवर्तन किए गए है।

(1) पत्रिका का नाम Accounts Relating to the Foreign Trade and Navigation of India मे बदल कर Monthly Statistics of the Foreign Trade of India कर दिया गया है।

(2) पहिले वैदेशिक व्यापार समक वित्तीय वर्ष (अप्रेल-मार्च)के अनुसार प्रकाशित किए जाते थे, लेकिन 1957 से केलेण्डर वर्ष (जनवरी-दिसम्बर) अपना लिया गया।

(3) व्यापार-वर्गीकरण मे भी परिवर्तन कर दिए गए। पहिले केवल 1717 वस्तुओं का वर्गीकरण किया जाता था, लेकिन जनवरी 1957 से 4850 वस्तुओ का वर्गीकरण भारतीय-व्यापार-वर्गीकरण (Indian Trade Classification) जो प्रमापित अन्तर्राष्ट्रीय-व्यापार-वर्गीकरण (Standard International Trade Classification) पर आधारित है, के अनुसार कर दिया गया।

(4) पत्रिका मे सब देशो से होने वाले व्यापार सम्बन्धी समक प्रकाशित किए जाते हैं लेकिन नेपाल, तिब्बत, भूटान, सिक्किम, अडमन-निकोबार लक्कादीवी, मिनीकोय व आमिनदेवी द्वीप समूहो से किया व्यापार उपरोक्त पत्रिका में न दिखा कर Indian Trade Journal साप्ताहिक पत्रिका मे मासिक रूप से प्रकाशित किया जाता है। नेपाल से वायु मार्ग द्वारा होने वाले व्यापार के समक तो Monthly Statistics of the Foreign Trade of India मे ही प्रकाशित किये जाते हैं।

(5) पहले सम्बन्धित मास के समक, वर्ष के शुरू होने से सम्बन्धित मास तक के व्यापार के समक व पिछले दो वर्षों में तत्सम्बधी मास में हुए व्यापार के समंक प्रकाशित किये जाते थे, लेकिन जनवरी 1957 से नया वर्गीकरण होने के कारण उपरोक्त प्रथम दो प्रकार के समक ही प्रकाशित किए गये। अब तीसरी प्रकार के समक भी प्रकाशित होने लगे हैं।

(6) पहले Accounts Relating to the Foreign Trade and Navigation of India नामक पत्रिका एक ही भाग में निकाली जाती थी, लेकिन

जनवरी 1957 से Monthly Statistics of the Foreign Trade of India दो भागो मे प्रकाशित की जाती है और उसके साथ एक पूरक पत्रिका (Supplement) भी होती है। प्रथम भाग में निर्यात और पुन. निर्यात के समक दिए जाते है और द्वितीय भाग में आयात के समक।

आयात उस देश से माने जाते हैं जहा से कि माल वास्तव मे भेजा गया है और निर्यात उस देश के माने जाते हैं जहा के लिए माल वास्तव मे प्रेषित किया गया है। आयात जकात-अधिकारियो द्वारा मजूर Bills of Entry मे मालूम किये जाते हैं और निर्यात Shipping Bills से। केवल व्यापार के लिए आयात और निर्यात माल के ही समक प्रकाशित किये जाते हैं। शुद्ध माल का तोल (बारदाना को घटा कर) अनुसार दिया जाता है और उसका मूल्य निकटतम बडी मन्डी में उस दिन के नकदी थोक भाव के लगाया जाता है।

आन्तरिक व्यापार (Inland Trade)

आन्तरिक व्यापार रेल, सडक व नदियो द्वारा किया जाता है। यह खेद की बात है इन दिनो सडको पर ट्रको द्वारा माल लाने व ले जाने की मात्रा मे प्रचुर वृद्धि हो जाने पर भी सरकार इन समको को प्रकाशित नही करती हैं। रेल व नदी से होने वाले व्यापार के समक मासिक पत्रिका Accounts Relating to the Inland (Rail and River borne) Trade of India मे प्रकाशित होते हैं। रेल से होने वाले व्यापार के लिए सम्पूर्ण भारत को 36 व्यापारिक खण्डो मे विभाजित किया गया है। नदी से होने वाले व्यापार के निम्न खण्ड बनाए गये हैं—कलकत्ता, आसाम, प० बगाल (कलकत्ता के अलावा) बिहार व उत्तर प्रदेश। उपरोक्त पत्रिका से निम्न व्यापारिक समक ज्ञात किए जा सकते हैं।

अ—एक राज्य दूसरे राज्य के व्यापार के आकडे।

ब—एक बन्दरगाह के दूसरे बन्दरगाह से व्यापार के आकडे।

स—एक राज्य के बन्दरगाह से व्यापार के आकडे।

तटीय व्यापार समक मासिक पत्रिका Accounts Relating to the Coasting Trade and Navigation of India मे प्रकाशित होते हैं।

राष्ट्रीय आय समंक (National Income Statistics)

किसी देश की राष्ट्रीय आय मे वहा की आर्थिक प्रगति का अनुमान लगता हैं क्योंकि यदि राष्ट्रीय आय क्रमश बढ रही है तो स्वाभाविक रूप में देश का आर्थिक विकास हो रहा है। यहा केवल यह देख लेना होगा कि उसी काल में मुद्रा प्रसार बहुत अधिक तो नहीं हो गया है। वास्तव मे राष्ट्र की एक निश्चित अवधि में उत्पादित समस्त वस्तुओं तथा सेवाओं का योग ही राष्ट्रीय आय होता है। इसमे से दोहरी गणना वाली वस्तुए तथा सेवाएं निकाल देनी चाहिए।

राष्ट्रीय आय की जानकारी भारत सरीखे अविकसित देश के लिए अत्यधिक महत्वपूर्ण है क्योंकि राष्ट्रीय आय की मात्रा के आधार पर आर्थिक नीति का निर्माण

करना होता है। राष्ट्रीय आय क्योंकि अनेक तत्वों का योग फल होता है अत यह भी जानना आवश्यक है कि कौन से वर्गों में निरन्तर वृद्धि हो रही है और कौन से वर्गों में आय का विस्तार गिर रहा है। इस जानकारी के आधार पर विशेष ध्यान दिया जा सकता है तथा देश की सर्वांगीण उन्नति की जा सकती है। कर व्यवस्था का आधार भी आय है। जिन वर्गों में आय का बाहुल्य है उन पर कर-भार बढ़ा कर दूसरे वर्गों का भार हल्का करना ही प्रजातन्त्र की सफलता है। अत राष्ट्रीय आय की जानकारी राष्ट्रीय हितों के लिए अनिवार्य है।

राष्ट्रीय आय ज्ञात करने की विधियाँ—राष्ट्रीय आय ज्ञात करने की चार रीतियाँ हैं—

(1) उत्पादन गणना विधि (Products Method)

(2) आय गणना विधि (Incomes Method)

(3) व्यय गणना विधि (Expenditure Method)

(4) सामाजिक लेखा विधि (Social Accounting Method)

प्रथम विधि यह है कि देश के वार्षिक उत्पादन का योग लगा कर उसमें से ह्रास (Depreciation) घटा दिया जाता है। विदेशों से प्राप्त आय भी इसमें जोड़ना आवश्यक है। कुल उत्पादन की मात्रा विभिन्न उद्योगों के उत्पादनों को एकत्रित करने से ज्ञात हो सकती है और व्यापार सतुलन से कुल विदेशी आय का ज्ञान हो सकता है। मार्शल तथा उनके सहयोगी अर्थशास्त्रियों ने राष्ट्रीय आय जानने की इसी पद्धति का अनुसरण किया है।

दूसरी विधि यह है कि व्यक्ति की आय को जोड़ लिया जाय, वह राष्ट्रीय आय होगी। प्रत्येक व्यक्ति की आय का योग जानना बहुत कठिन है परन्तु व्यवसाय के अनुसार आय जानने में उतनी कठिनाई नहीं होगी। दैव निदर्शन द्वारा विभिन्न व्यवसायों के व्यक्तियों की आय जानी जा सकती है। इसके अलावा आय कर विभाग को आयकर देने वालों की जानकारी रहती है। साथ ही आयकर न देने वालों की आय का वह अनुमान लगाते हैं। अत यदि इन दोनों वर्गों की आय जोड़ दी जाय तो वह राष्ट्रीय आय होगी। परन्तु इन सब विधियों में ही एक कठिनाई उत्पन्न होती है। इनमें अवश्य ही कुछ आय दो बार गिन ली जायगी। यदि एक वकील 2000 रु० कमाता है और वह व्यक्तिगत काय के लिये एक नौकर को 50 रु० मासिक देता है तो कुल आय यदि अलग अलग गिनेंगे तो 2050 रु० होगी परन्तु यह अशुद्ध है। दोहरी गणना किये बिना ही सम्पूर्ण आय का योग राष्ट्रीय आय है।

तीसरी विधि के प्रतिपादक फिशर महोदय हैं जिनका कहना है कि वास्तव में प्रति वर्ष देशवासियों द्वारा जितना व्यय और विनियोग एव बचत किया जाता है उसका योग ही राष्ट्रीय आय है। परन्तु व्यय का अनुमान लगाना आय की जानकारी प्राप्त करने से कहीं अधिक कठिन है। इन विधियों में पहली और दूसरी विधि का ही अधिक प्रयोग किया जाता है।

सामाजिक लेखा विधि (Social Accounting Method) के जन्मदाता

कैम्ब्रिज विश्वविद्यालय के प्रोफेसर रिचार्ड स्टोन (Richard Stone) हैं। इस विधि मे किसी देश के वासियो के सब लेन देन को कई वर्गों में विभाजित कर लिया जाता है। फिर सभी वर्गों मे होने वाली लेन देन सम्बन्धी रखे खातो को जोड़ कर राष्ट्रीय आय ज्ञात करली जाती है। भारत में इस विधि का प्रयोग अभी सम्भव नहीं है। यह तभी सम्भव हो सकेगा जब कि प्रत्येक व्यक्ति शिक्षित हो और लेन-देन का पूर्ण लेखा रखता हो।

राष्ट्रीय आय की जानकारी करने में केवल उन मदों का ही लेखा किया जाता है जो मुद्रा मे नापी जा सकती है। नि शुल्क सेवाओ को राष्ट्रीय आय आगणन मे कोई स्थान नही है। इसके अतिरिक्त अवैधानिक अथवा चोर-बाजारी द्वारा प्राप्त आय को राष्ट्रीय आय मे सम्मिलित नही किया जाता। तीसरी महत्वपूर्ण बात यह है कि कभी कभी यह निर्णय करना कठिन होता है कि कुछ विशेष मदों से प्राप्त आय को कौन से वर्ग की आय मे सम्मिलित किया जाय क्योकि राष्ट्रीय आय तो प्रति वर्ष ही ज्ञात की जाती है। राष्ट्रीय आय मे देश सेवा, राजनैतिक कार्य, तथा अन्य कार्य, जो महत्वपूर्ण तो है परन्तु नि शुल्क हैं, सम्मिलित नहीं किये जाते।

भारत मे राष्ट्रीय आय ज्ञात करने सम्बन्धी समस्याएं—

(१) अपूर्ण समक—भारत में औद्योगिक तथा कृषि समक अत्यन्त न्यून मात्रा में उपलब्ध है तथा अनेक क्षेत्र ऐसे हैं जिनके सम्बन्ध मे अक प्राय- नगण्य हैं। कुछ वृहदाकार उद्योगो के समक अवश्य ही व्यवस्थित रूप से प्राप्य है परन्तु लघुकाय अनगिनत उद्योग हैं जो ग्रामो में स्थित हैं तथा जिनके उत्पादन की मात्रा तथा समस्याओ के विषय मे कोई लिखित अक नहीं मिलता हैं। इन सब कठिनाइयो के कारण राष्ट्रीय आय की वास्तविक जानकारी करना बहुत कठिन है।

(२) वस्तु विनिमय—भारतीय ग्रामों में अब भी क्रय-विक्रय बहुत कुछ वस्तु द्वारा होता है। अत इस प्रकार की आय को जो वस्तु विनिमय द्वारा प्राप्त हुई है राष्ट्रीय आय मे सम्मिलित करना तो आवश्यक हैं परन्तु ऐसा करना बहुत कठिन है। उन सेवाओ का मूल्यांकन करना कठिन होता है जहा पारिश्रमिक मुद्रा के रूप में नही दिया जाकर भोजन, वस्त्रादि के रूप मे दिया जाता है।

(३) व्यावसायिक विभाजन —भारत में व्यावसायिक विभाजन करना अत्यन्त कठिन है। कुछ व्यक्ति एक से अधिक व्यवसाय करते हैं। लघुकाय उद्योगों में सलग्न व्यक्ति अधिकतर खेतिहर है। अत प्रत्येक व्यवसाय की आय के सम्बन्ध में अक एकत्रित करना बहुत कठिन है क्योकि कितनी आय को किस वर्ग में रखा जाय यह निर्णय करना टेढी खीर है।

(४) जनता का असहयोग —भारत में बहुत कम उपभोक्ता आय व्यय का हिसाब रखते है। व्यापारियो की भी अलग अलग क्षेत्र मे हिसाब रखने की पद्धति अलग अलग है। भाषाओ की भिन्नता तथा रीति-रिवाजों की बाधाए भी हैं। अधिकाश व्यक्ति अपने हिसाब प्रकाशित नही करना चाहते, प्रश्नावलियो को समझते नही तथा उत्तर देने की चेष्टा नही करते। इन सब कारणो से समक सकलन अत्यधिक कठिन है।

भारत की राष्ट्रीय आय के अनुमान —भारत मे समय-समय पर भिन्न-भिन्न व्यक्तियों द्वारा राष्ट्रीय आय का अनुमान किया गया है। राष्ट्रीय आय आगणन सम्बन्धी कुछ अंक नीचे दिये जाते हैं।

भारत की प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय

अनुमान कर्ता	वर्ष	आय (रु० में)
1 दादा भाई नौरोजी	1867 – 68	20
2. क्रोमर और बारबर	1882	27
3 विलियम डिगबी	1898 – 99	17 5
4 लार्ड कर्जन	1900	30
5 वी एन शर्मा	1911	50
6 वकील तथा मुरंजन	1910 – 14	58 5
7. वाडिया और जोशी	1913 – 14	44 5
8. शाह और खम्बाता	1921 – 22	67
9 फिन्डले शिराज	1922	107
10. डा वी. के आर वी राव	1931 – 32	65
11. डा वी के आर. वी राव	1942 – 43	114

उपरोक्त तथ्य तुलना के लिये उपयुक्त नही है क्योकि इनके अनुमानो के आधार भिन्न-भिन्न रहे हैं तथा विभिन्न वर्षो मे वस्तुओ के भावो मे भी बहुत अंतर रहा है। इन सब अनुमानों मे डा० राव के अनुमान अधिक वैज्ञानिक तथा विश्वसनीय माने जाते रहे हैं क्योकि डा० राव ने आय गणना रीति का प्रयोग किया जिसमें उन्होंने आयकर सबंधी अंको का प्रयोग करने के अतिरिक्त निजी स्रोतो से भी अंक इकट्ठे किये और उन्हें परिस्थितियो के अनुसार सुधार कर आय गणना करने में काम मे लिया।

अगस्त 1949 मे भारत सरकार ने एक राष्ट्रीय आय समिति नियुक्त की। इसकी अंतरिम रिपोर्ट अप्रेल 1949 मे और अंतिम रिपोर्ट फरवरी 1954 में प्रकाशित हुई। इसकेद्वारा 1948–49, 1949–50 और 1950–51 की राष्ट्रीय आय का अनुमान लगाया गया और इसने साधारणतया डा० राव की आय आगणन की पद्धति को ही कुछ संशोधित रूप मे अपनाया है।

राष्ट्रीय आय समिति ने 1948-49 की कुलकार्य शक्ति का अनुमान लगाया तथा यह ज्ञात किया कि यह किन–किन व्यवसायो मे बटी हुई है। उद्योगो का वर्गीकरण किया गया और कृषि तथा सेवाओ को भी उद्योग की परिभाषा के अन्तर्गत लिया गया। समिति ने उद्योगो का उत्पादन अलग ज्ञात किया तथा घरेलू सेवाओ तथा व्यवसायो का अलग। इस प्रकार राष्ट्रीय आय के समस्त स्रोतो को भिन्न भिन्न वर्गों मे बाटा गया है। उत्पादन-विधि का प्रयोग, समिति ने निम्न साधनो की आय ज्ञात करने के लिए किया–(1) उद्योग, (2) कृषि, (3) पशु–पालन, मत्स्य–पालन और वन–उद्योग और (4) खनिज उद्योग। आय-विधि का प्रयोग निम्न साधनो की आय जानने के लिए किया –(1) यातायात (2)

व्यापार (3) सरकारी प्रशासन और अन्य सेवाएं (4) कलाएं और (5) अन्य व्यवसाय एवं घरेलू सेवाएं ।

अभी अन्य देशो की भांति हमारे देश में इतने आंकडे उपलब्ध नही हैं कि आय अनुमान की विविध रीतियो से अलग-अलग अनुमान लगा कर उनकी एक दूसरे से पुष्टि की जा सके। सब विधियो को मिलाकर ही आय का अनुमान कर पाना संभव है। लेकिन अब इस दिशा मे उचित प्रयत्न किए जा रहे हैं।

नीचे राष्ट्रीय आय समिति द्वारा प्रकाशित अन्तिम अंक दिये गए हैं जिनमे उद्योगो के वर्गीकरण का भी ज्ञान हो सकेगा और आय की भी जानकारी प्राप्त हो जायगी।

औद्योगिक आधार पर भारत की राष्ट्रीय आय

(100 करोड रु० = एक अब्जा मे)

मद	आय (1960-61)	योग
कृषि		
(1) कृषि, पशुपालन और सहायक काम	66 60	
(2) वन	1 20	
(3) मत्स्य पालन	0 70	68 50
खनन, निर्माण तथा घरेलू धन्धे—		
(1) खनन	1 70	
(2) फैक्टरी अधिष्ठान	14 60	
(3) लघु उद्योग	11 70	28 00
वाणिज्य, यातायात और संवहन—		
(1) संवहन	0 70	
(2) रेलें	3 80	
(3) संगठित अधिकोषण तथा बीमा	1.80	
(4) अन्य व्यवसाय तथा यातायात	14 80	24.70
अन्य सेवाएं—		
(1) पेशे और स्वतन्त्र कला	7 90	
(2) राजकीय सेवाएं	10 20	
(3) घरेलू सेवाएं	2.10	
(4) गृह सम्पत्ति	5 50	25.70
कुल आय	146 90	
विदेशो से कुल आय	– 0 60	
कुल आय	146.30	
प्रति व्यक्ति कुल आय		329 7 रुपये

राष्ट्रीय आय समिति व केन्द्रीय सांख्यिकीय संगठन द्वारा वार्षिक श्वेत पत्रों में भारत की राष्ट्रीय आय के निम्न अनुमान लगाए गए हैं—

वर्ष	कुल आय (करोड़ रु० में)	प्रति व्यक्ति आय (रु० में)
1948–49	8,650	245.3
1949–50	8,820	250.6
1950–51	8,850	247.5
1951–52	9,100	251.3
1952–53	9,460	255.7
1953–54	10,030	266.2
1954–55	10,280	257.8
1955–56	10,480	257.8
1956–57	11,000	275.6
1957–58	10,890	257.3
1958–59	11,650	280.1
1959–60	11,860	279.2
1960–61	12,750	293.7
1961–62	13,020	293.4

उपरोक्त अनुमान 1948–49 के मूल्यों के अनुसार हैं। चालू मूल्यों के अनुसार 1961–62 की प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय का अनुमान 323.7 रुपए है।

निम्न तालिका में दी गई भारत की राष्ट्रीय आय की अन्य विकसित देशों की राष्ट्रीय आय से तुलना करने पर ज्ञात होता है कि हमें हमारे जीवन-स्तर बढ़ाने के लिए भरसक प्रयत्न करने चाहिएं।—

देश	वर्ष	प्रति व्यक्ति आय (रु० में)
भारतवर्ष	1961 – 62	323
पाकिस्तान	1958 – 59	240
बर्मा	1958	216
लंका	1957	557
जापान	1957	1,290
न्यूज़ीलैंड	1958	4,683
आस्ट्रेलिया	1958	5,021
इंगलैंड	1958	4,711
कनाडा	1958	7,112
संयुक्त राज्य अमेरिका	1959	10,901
स्वीडन	1958	6,870
स्विट्ज़रलैंड	1958	6,137
फ्रान्स	1958	3,925

राष्ट्रीय आय समिति की लगभग सभी सिफारिशें कार्यान्वित की जा चुकी हैं और कुछ समय पहले ही एक राष्ट्रीय आय सलाहकार समिति की नियुक्ति की गई है जो

राष्ट्रीय आय सम्बन्धी तकनीकी मामलो पर सलाह देती है। राज्यो (States) की वार्षिक आय के अनुमान भी ग्रब किए जा रहे तथा अन्य शोधकार्य भी हुआ है। एक राष्ट्रीय आय सस्था (National Income Institute) बनाने की भी योजना है।

राष्ट्रीय निदर्शन अधीक्षण (National Sample Survey)

भारत मे समक का अभाव सदा से रहा है। पचवर्षीय योजना के लिये समको के अत्यधिक महत्व को देखते हुए भारतीय प्रधान मत्री श्री जवाहरलाल नेहरू के सकेत पर प्रो० प्रशान्तचद्र महालनोबिस ने एक राष्ट्रीय निदर्शन अधीक्षण की योजना बनाई जो भारत सरकार द्वारा जनवरी 1950 मे स्वीकार कर ली गई। तदनुसार वित्त मत्रालय के अन्तर्गत एक राष्ट्रीय निदर्शन अधीक्षण निर्देशालय (Directorate of National Sample Survey) की स्थापना की गई जिसका काम दैव निदर्शन के आधार पर सामाजिक तथा आर्थिक समक एकत्रित करना है।

अधीक्षण द्वारा जनता से बातचीत द्वारा सूचना एकत्रित की जाती है। प्रत्येक जाच करने वाले को घर घर जाना पडता है और प्रत्यक्ष जाच करनी पडती है। फसल आदि के सम्बन्ध मे जांचकर्ता अपने प्रत्यक्ष अनुभव से तथ्याक एकत्रित करते हैं। अधीक्षण की विशेषता यह है कि इसमें सहयोग देने वाले गणक, निरीक्षक तथा अन्य अधिकारी सरकार के स्थायी कर्मचारी हैं और साल भर काम करते रहते हैं। इस क्षेत्र मे कार्य करने वाले कुल कर्मचारियो की सख्या 600 है जो वित्त मन्त्रालय के आर्थिक कार्य विभाग के प्रत्यक्ष नियत्रण मे कार्य करते हैं।

सस्था ने अपने पहले पर्यवेक्षण में देश भर से 1833 गाव चुने तथा मार्च 1951 मे यह काम समाप्त किया। जाच के लिये दो प्रश्नावली समूह बनाये गये। एक इण्डियन स्टेटिस्टिकल इन्स्टीट्यूट कलकत्ता द्वारा तथा दूसरी गोखले इन्स्टीट्यूट ऑफ पॉलिटिक्स एण्ड इकानामिक्स पूना द्वारा तैयार की गई। सर्वेक्षण की रीति यह है कि सारा देश 250 स्तरो मे विभाजित किया गया है। प्रथम तीन जाचो मे तो 1000 गाव प्रत्यक्ष रूप से चुन लिए गए थे। लेकिन बाद में प्रत्येक स्तर मे से 2 तहसील और प्रत्येक तहसील मे से 2 गाव चुने गए। प्रत्येक गाव को 2 उप स्तर-कृषीय और -अकृषीय मे विभाजित किया गया और सूचना प्राप्त करने के लिए 80 परिवारो को चुना गया। कृषीय और अकृषीय प्रत्येक उप-स्तर मे से 8 परिवारो को चुना गया जिनसे परिवार-सूचियो की सामान्य विशेषताओ का अध्ययन किया गया। 8 कृषीय मे से 2 और 8 अकृषीय उपस्तरो मे से 3 परिवारो को घरेलू उद्योगो के अध्ययन के लिए चुना गया। बचे हुए 6 कृषीय मे से एक और 5 अकृषीय मे से 2 परिवारो को चुनाव उपभोक्ता व्यय अध्ययन करने के लिए किया गया।

दूसरे अधीक्षण (अप्रैल जून 1951) मे भी गावो को ही सम्मिलित किया गया और तीसरे अधीक्षण (अगस्त-नवम्बर 1951) मे नगरों को सम्मिलित किया गया। इसके पश्चात् चतुर्थ, पचम तथा छठे दौर मे उद्योग उपभोक्ता व्यय, घरेलू व्यय, भूमि, पशु, उत्पादन शक्ति, जन्म मरण, लघु उद्योग आदि अनेको विषयो को लिया गया है। अब तक

18 सर्वेक्षण समाप्त हो चुके हैं। 19 वा दौर चालू है। उपरोक्त आंकड़ों के अतिरिक्त इस संस्थान ने केन्द्रीय मन्त्रालयों के लिए कई तदर्थ (ad-hoc) सर्वेक्षण भी सम्पन्न किए हैं।

अधीक्षण द्वारा किये गये प्रयोगों की विशेषता यह है कि यह दैव निदर्शन पर आधारित हैं, अत इनमें होने वाली त्रुटियां सरलता से ठीक की जा सकती है। निदर्शन अधीक्षण द्वारा बहुत मूल्यवान तथ्यांक एकत्रित किये गये हैं जिनमें से संक्षेप में कुछ नीचे दिये जाते हैं —

(1) भारत में प्रत्येक ग्रामीण गृहस्थी में सामान्यत 5.21 व्यक्ति हैं जिनमें से 25% कमाने वाले, दप्टाश कमाने वाले परन्तु निर्भर (dependent) तथा शेष न कमाने वाले निर्भर व्यक्ति हैं।

(2) ग्रामों में व्यय का $^2/_3$ भाग भोजन पर, $^1/_{10}$ भाग वस्त्र पर तथा शेष अन्य मदों पर होता है। त्यौहारों तथा रीति रिवाजों पर लगभग 7% व्यय होता है।

(3) देश भर में प्रतिमास प्रति व्यक्ति दूध का उपयोग 2 सेर प्रति मास है।

(4) देश भर में वस्त्र का औसत वार्षिक व्यय 21 रुपये प्रति व्यक्ति है।

उपरोक्त कार्य के अतिरिक्त C S O की देख-रेख में N S S औद्योगिक समक एकत्र करती है। राज्य सरकारों को कृषि समक एकत्र करने में तकनीकी सलाह भी N S S देती है।

निदर्शन अधीक्षण द्वारा भविष्य में और भी महत्वपूर्ण अक प्रकाशित किए जाने की सम्भावना है जो देश की योजनाओं तथा आर्थिक विकास के लिए बहुत उपयोगी होंगे।

उपसंहार (Conclusion)

आयोजक तथा समङ्क—भारत में योजना काल चल रहा है। देश के चतुर्मुखी विकास के लिए प्रथम एवं द्वितीय पंचवर्षीय योजनाएं बनाई गई जो सफल हुई। अब तृतीय योजना के अनुसार कार्य हो रहा है। परन्तु कोई भी आयोजन यदि सुदृढ़ एवं शुद्ध तथ्यों पर आधारित नहीं है तो वह सफल नहीं हो सकता है।

आर्थिक योजना बनाने से पूर्व यह जानना आवश्यक है कि देश के विभिन्न क्षेत्रों में कितना विकास हुआ है, वास्तविक स्थिति क्या है। अन्न का वास्तविक उत्पादन कितना है और वह आवश्यकता से कितना कम है। विदेशी व्यापार की स्थिति क्या है तथा विभिन्न क्षेत्रों में घरेलू उत्पादन कितना है। यह सब बातें जाने बिना कितनी कमी की पूर्ति करनी है यह जानना सर्वथा असम्भव है और योजना केवल कल्पना की वस्तु रह जायगी।

योजना बनाने के लिए भोजन, वस्त्र, मकान, आवागमन, रोजगार आदि सब विषयों से सम्बन्धित अङ्कों का शुद्धतम ज्ञान होना चाहिये। योजना चालू करने पर भी विभिन्न क्षेत्रों में उत्पादन कितना हुआ है तथा कितना अभी करना शेष है यह ज्ञान प्राप्त करना आवश्यक है अन्यथा योजना की सफलता संदिग्ध ही रहेगी।

अङ्कों से यह भी ज्ञान हो जाता है कि किन क्षेत्रों में योजना असफल रही है और बहुधा उसकी असफलता के कारण भी ज्ञान हो जाते हैं। अत अंक योजना के आधार हैं क्योंकि अङ्कों की जानकारी बिना योजना का प्रारम्भ, गति तथा सफलता का ज्ञान नहीं हो सकता। संक्षेप में अङ्कों को जानना आयोजन के लिए उतना ही महत्वपूर्ण है जितना कि रोग का इलाज करने से पूर्व रोग का ज्ञान होना

भारत मे गत वर्षों मे सांख्यिकीय तथ्यों के संग्रहण सम्बन्धी महत्वपूर्ण सुधार किए गए हैं। सांख्यिकीय प्रशिक्षण की अधिकाधिक व्यवस्था, राष्ट्रीय निदर्शन सर्वेक्षण की स्थापना तथा विभिन्न राज्यो द्वारा सांख्यिकीय तथ्यो का प्रकाशन आरम्भ करना तथा केन्द्रीय सांख्यिकीय सगठन (C S O) की स्थापना इस दिशा मे महत्व-पूर्ण कदम हैं। योजना युग मे, तथ्यांकों का शुद्धतम, शीघ्रतम, तथा महत्तम संग्रह एव संकलन ही राष्ट्रीय विकास के गतिमान चरण चिन्हों की ओर स्पष्ट संकेत कर सकता है। अत सम्बन्धित अधिकारियो को इस दिशा मे अधिकतम सतर्क रहने की आवश्यकता है।

साराश
(Summary)

इतिहास—राजाओ द्वारा अङ्क संग्रह करवाया जाता था। चन्द्रगुप्त, अशोक,गुप्त वश, अकबर, द्वारा अङ्क संग्रह करवाया गया। ईस्ट इन्डिया कम्पनी ने लगान के लिए भूमि नपवाई। 1868 मे Statistical Abstract of British India छपा, 1881 मे पहली जनगणना हुई, 1894 मे गेहू की फसल का पूर्वानुमान प्रकाशित हुआ तथा 1895 मे सांख्यिकीय सस्थान (ब्यूरो) स्थापित हुआ।

1906 मे Indian Trade Journal निकाला। 1938 मे आर्थिक सलाह-कार की नियुक्त हुई। 1942 मे Industrial Statistics Act तथा 1953 मे Collection of Statistics Act पास हुआ, 1951 में केन्द्रीय सांख्यिकीय सगठन स्थापित हुआ।

जन गणना —प्रशासनिक, योजना, आर्थिक, व्यापारिक तथा सामाजिक कार्यों के लिए जनगणना महत्वपूर्ण है।

रीतिया —(1) जन्म-मरण सम्बन्धी अंको द्वारा (2) सम्पूर्ण गणना द्वारा।

भारत मे जनगणना —अधिनियम पास किया जाना, आयुक्त की नियुक्ति, राज्य निरीक्षको, पर्यवेक्षको तथा गणको की नियुक्ति होना। फिर प्रशिक्षण दिया जाता है। पर्चिया एकत्रित कर उनका सारणीयन और विश्लेषण कर प्रकाशित कर दिया जाता है।

(1) भारत मे 1948 तक अस्थाई जनगणना आयुक्त काम करता था अब स्थाई आयुक्त नियुक्त हो गया है।

(2) 1951 व 1961 की जनगणना स्थाई अधिनियम पर आधारित है।

(3) अवधि 21 दिन कर दी गई, 1931 मे एक रात्रि तथा 1941 मे सात दिन दिए गए थे।

(4) राष्ट्रीय नागरिक रजिस्टर 1951 मे रखा गया।

(5) 1951 से जाति सम्बन्धी प्रश्न हटाया गया।

(6) आर्थिक समस्याओ पर अधिक ध्यान दिया गया। 'कार्य करने वाला' और 'कार्य नही करने वाला' पर बल दिया गया।

कमिया —(1) भिन्नता (2) आयु सम्बन्धी अक अशुद्ध (3) नि शुल्क कार्य (4) अयोग्य-गणक तथा भ्रामक उत्तर।

जन्म-मरण अङ्क —नगरपालिकाओं, पंचायतों द्वारा एकत्रित किये जाते हैं। सूचना देनी अनिवार्य होनी चाहिये।

कृषि समक —चेत्र समक, अस्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्रों मे अधिक शुद्ध है क्योंकि पटवारी आदि एकत्रित करते हैं। स्थाई बन्दोबस्त के क्षेत्रों मे मुखिया इकट्ठे करता है और जिलाधीश उनमे अन्तिम संशोधन कर देता है।

उत्पादन समक सामान्य पैदावार की औसत द्वारा निकाले जाते हैं तथा आनावारी पद्धति लागू है। दैव निदर्शन रीति लागू करनी चाहिये।

पशुधन सम्बन्धी अंक (Indian Live Stock Statistics) प्रकाशित किये जाते है।

कमियाँ —(1) अशुद्ध (2) अपूर्ण (3) देर से प्रकाशन (4) भ्रामक पूर्वानुमान।

औद्योगिक समक — 1942 मे इन्डस्ट्रियल स्टेटिस्टिक्स एक्ट तथा 1953 में कलेक्शन आफ स्टेटिस्टिक्स एक्ट पास किये गये। प्रति वर्ष सैन्सस ऑफ मैन्युफैक्चर्स प्रकाशित होती हैं जिसमे 29 बड़े उद्योगों सम्बन्धी अंक दिये जाते थे। अब यह कार्य C S O द्वारा किया जाता है।

मूल्य तथा देशनांक —मूल्य समक रिजर्व बैंक बुलेटिन, उद्योग व्यापार पत्रिका तथा ईस्टर्न इकॉनामिस्ट आदि मे प्रकाशित होते हैं। इकानामिक एडवाईजार के देशनांक मे पहले 78 वस्तुओं का समावेश था तथा पांच वर्गों मे बटा हुआ था, आधार वर्ष 1939 था अब 112 वस्तुएं सम्मिलित हैं तथा 1952–53 आधार वर्ष मान लिया गया है व 6 वर्ग कर दिए गए हैं।

मजदूर समक —Indian Agricultural Wage Statistics तथा लेबर गजट में प्रकाशित होते है।

व्यापार समक —Indian Trade Journal, उद्योग व्यापार पत्रिका, रिजर्व बैंक बुलेटिन तथा अन्य पत्रों मे देशी, विदेशी, सामुद्रिक, भूमि मार्गीय व्यापार अङ्क छपते हैं।

राष्ट्रीय आय —वस्तुओं तथा सेवाओं का वार्षिक कुल उत्पादन राष्ट्रीय आय है। चार विधियां प्रचलित हैं (1) गणना विधि (2) आय विधि (3) व्यय विधि (4) सामाजिक लेखा विधि।

समस्याएं —(1) अपूर्ण समक (2) वस्तु विनिमय (3) व्यावहारिक विभाजन (4) जन असहयोग। भारत की प्रति व्यक्ति राष्ट्रीय आय 1961–62 के अनुसार 329 7 रु० है।

राष्ट्रीय निदर्शन अधीक्षण—1950 में बनाया गया, उपभोग, उद्योग, व्यय, घरेलू धन्धे, भूमि, पशु, जन्म, मरण, आदि के सम्बन्ध मे महत्वपूर्ण अंक प्रकाशित करता है।

भारतीय समकों की कमियां—(1) अपर्याप्त (2) अप्रामाणिक (3) अनेकता

(4) [illegible] देरी।

EXERCISE XVII

1 What statistical data would you utilise for framing the next Five year plan of your state? Do you think that the available data for this purpose are adequate and reliable?

2 Examine the adequacy and accuracy of either labour or agricultural statistics in India

3 Discuss the main features of the population statistics in India What suggestions would you offer to make them more reliable and useful (M A. Alld 1951)

4 Define a normal yield and describe the official method of determining it What do you consider to be the defects of the method and how would you remove them? (M A Raj 1950)

5 What do you understand by the term "Indian Agricultural statistics"? Outline their shortcomings and give concrete suggestions to remedy them (M A Raj 1951)

6 Why are agricultural statistics in the temporarily settled area in India said to be comparatively more reliable than those in the permanently settled areas? (M A Punjab 1952)

7 Write a lucid note on either the system of crop forecasting in India or the adequacy and reliability of data available on agricultural prices and wages in India (M A Punjab, 1952)

8 What important statistics of food production are available in India? How are they compiled and in what official publications are they found? (M Com Alld. 1952)

9 Examine critically the construction of either the Economic Adviser's Index of wholesale prices or the working class cost of living Index number as compiled by the Government (M A. Alld 1952)

10 Examine critically the Economic Adviser's Index number of wholesale prices and suggest ways to improve it (M Com Alld. 1951)

11 What are special problems of National Income estimation in India? Describe briefly the various methods followed for the calculation of Indian Income (M Com Alld 1952)

12 "Census is not merely the counting of heads but it also gives a found of other valuable information" Comment on this statement in the light of the census of 1951 (B Com Agra 1952)

13 What methods are mainly used for estimating the national income of a country? How far are the recent estimates of national income in India reliable? (B Com Agra 1952)

14 What information is available regarding the following —

(a) Foreign trade of India
(b) Agricultural prices in U P
(c) Industrial production in Bombay (B Com Raj 1949)

15 Give the names of any three Government publications of statistical nature with which you are accquainted with a brief note of their contents and say in what ways you consider them defective.

(B Com Raj 1949)

16. What changes were made in the method of holding the population census in the year 1951 and 1961 ? What new suggestions can you give for the next census

17 Examine the adequacy and accuracy of either Agricultural statistics or price statistics in India. (B Com Raj 1950)

18 Define National Income. How will you calculate National Income of India. (B Com Raj 1951)

19 Describe the special features of the population Census of India held in 1951 (B Com. Raj 1952)

20 Describe briefly mentioning sources, what statistical material is available in India relating to any two of the following —

(a) Price statistics

(b) Wage statistics

(c) Statistics of foreign Trade (B Com. Raj 1955)

21 For any three of the following items of information indicate the name, periodicity and the authority publishing it of at least one publication from which you can get the information

(a) Number of factories in Rajasthan in 1950 (b) Quantity of minerals exported from Rajasthan in 1953 (c) Index Number of wholesale prices in India for the week ended 3rd September 1955 (d) Value of the import of merchandise from U. S A in 1952-53 (e) The value of Tea exported from India in 1953-54

(B Com Raj 1956)

22 Write short notes on —

Trade statistics, Annawari Estimates, Calcutta Wholesale Price index Number, C S. O, N S S, N I U, D G C I. & S.

23 Comment upon —

Adequacy of Agricultural Statistics in India, Shortcomings in compilation of Indian statistics and National Income of India

24. Describe the organisation and functions of the Central Statistical Organisation [C. S O] in India. [M Com Raj 1962]

25 Describe the method that was adopted by the National Income Committee to frame and estimate of the national income of India What reasons led the Committee to adopt this method

[M Com Raj. 1961]

25. What economic data was collected in india at the 1951 population census ? What changes have been made in the economic classifi[illegible] the 1[illegible]1 population census schedule ? (M Com Raj 1951)

27 Discuss the adequacy of statistics in India for estimating the national income Explain why the main aggregates in the national income account are revalued at the fixed (1949) prices.

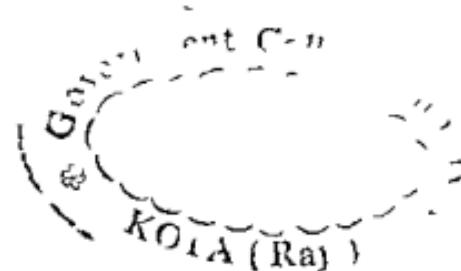
[M Com Raj. 1962]

28 Describe any index number in use in India at present for measuring changes in the wholesale price level and discuss its strong and weak points [M Com Raj 1962]

29 Write a brief critical note of the aims and achievements of the National Sample Survey [M Com Raj 1957]

30 Discuss the Registrar General's scheme for the improvement of population data particularly in regard to the collections of vital statistics T D C Final Raj 1962]

31 What are the salient features of the foreign trade statistics of India ? What changes in their presentation have been made since 1957 ? [M Com. Raj 1960]

32 What is meant by census of production ? Give an account of the statistical information collected under the Industrial Statistics Act ? [M Com. Raj 1963]

परिशिष्ट

लघुगुणकों (Logarithms) का प्रयोग—

लघुगुणों के प्रयोग से बड़े–बड़े आकलन बहुत सरल हो जाते हैं। विशेष रूप से जटिल गुणा–भाग, वर्ग या मूल निकालते समय तो इनका प्रयोग नितांत आवश्यक हो जाता है।

लघुगुणक का आधार 10 है। किसी भी दी हुई संख्या का लघुगुणक वह Power होती है जो 10 के ऊपर लिखी जाती है ताकि यह दी हुई संख्या के बराबर हो जाए। जैसे- $100 = 10^2$ इसमें 10 की Power 2 है अर्थात् 100 का लघु गुणक 2 है। इसी प्रकार $1000 = 10^3$, इसमें 10 की Power 3 है अर्थात् 1000 का लघु गुणक 3 हुआ। इसी प्रकार 10,000 का लघुगुणक 4, 100000 का लघुगुणक 5,10 का लघुगुणक 1 और 1 का लघुगुणक 0 होगा।

ऊपर बताया जा चुका है कि 100 का लघुगुणक 2 और 1000 का लघुगुणक 3 है। यदि कोई संख्या 100 से अधिक और 1000 से कम हो तो उसका लघुगुणक 2 से अधिक और 3 से कम होगा। अर्थात् 2 होगा। इसका तात्पर्य यह हुआ कि लघुगुणक में बहुधा दशमलव के बाए और पूर्ण संख्या होती है और कुछ अंश (Fraction) भी जो दशमलव के दाए और लिखा जाता है। जैसे 670 का लघुगुणक 2·8261 है। लघुगुणक का जो भाग दशमलव के बाए और लिखा होता है उसे Characteristic कहते हैं और जो भाग दशमलव के दाए और होता है उसे Mantissa कहते हैं। Characteristic एक छोटे से सूत्र द्वारा ज्ञात किया जाता है और Mantissa लघुगुणक सारणियों (Logarithm tables) के द्वारा।

Characteristic ज्ञात करना

Characteristic ज्ञात करने के लिए हम संख्याओं को दो भागों में विभाजित कर देते हैं—प्रथम वे संख्याएं जो एक या एक से अधिक हों अर्थात् इन संख्याओं में दशमलव के बाए और भी (0 के अलावा) अंक अवश्य होने चाहिए, द्वितीय वे संख्याएं जो एक से कम हैं अर्थात् वे संख्याएं जो दशमलव के दाए और ही लिखी जाती हैं। दशमलव के बाए और 0 के अलावा कुछ भी नहीं लिखा होगा।

प्रथम प्रकार की संख्याओं के Characteristic निकालने का सूत्र (n-1) है, जहां n का अर्थ दशमलव के बाए और लिखी संख्या के अंकों (Digits) का योग है, जैसे—

संख्या	Characteristic
6556	3
345	2
23	1
4	0
25 34	1
286 45	2
6350 23	3

द्वितीय प्रकार की संख्याओं में Characteristic निकालने का सूत्र (n+1) है, जहां n का अर्थ दशमलव के बाद लेकिन प्रथम महत्त्वपूर्ण (Significant) अंक (digit) के पहिले शून्यों (zeros) की संख्या है। महत्त्वपूर्ण अंक 0 के अलावा 1 से 9 तक होते हैं, जैसे—

संख्या	Characteristic
024	$\bar{2}$
00304	$\bar{3}$
0 821	$\bar{1}$
0 0802	$\bar{2}$
0008	$\bar{4}$

द्वितीय प्रकार की संख्याओं में Characteristic के सिर पर ऋण (—) का निशान लगा देते हैं जिसका यह अर्थ होता है कि दी हुई वास्तविक संख्या एक से कम है। जोड़ने के लिए प्रथम प्रकार के (Characteristic) धनात्मक (+) व दूसरे प्रकार के Characteristic ऋणात्मक (–) माने जाते हैं।

Mantissa ज्ञात करना—

Mantissa लघुगुणक-सारणियों से देखा जाता है और यह सदा धनात्मक (+) होता है। इसलिए यदि दी हुई संख्या ऋणात्मक हो तो उसका लघु गुणक नहीं निकाला जा सकता है। Mantissa निकालने में दशमलव चिन्ह का कोई ध्यान नहीं रखा जाता है जबकि Characteristic निकालने में संख्या का वह भाग, जो दशमलव के बाएं ओर लिखा होता है, ही काम में आता है। Mantissa सारिणियों में अक्सर चार अंक (Digit) तक ही देखा जा सकता है, अतः यह संख्या जिसका (Mantissa) देखना हो, चार अंकों से बड़ी हो तो उसका उपगादन (Approximation) चार अंकों तक कर लेना चाहिए और यदि वह संख्या चार अंकों से कम है तो आवश्यकतानुसार 0 बढ़ा कर उसे तीन अंकों वाली संख्या कर लेना चाहिए जैसे 345 का लघुगुणक देखना हो तो इसका Characteristic 2 होगा और Mantissa देखने के लिए प्रथम दो अङ्क यानी 34 का अङ्क Logarithm table के प्रथम खाने में देखिए और उसके सामने जिस खाने में 5 का Mantissa हो, उसे ज्ञात कर लिखिए। इस प्रकार 345 का लघुगणक २ ५३७८ होगा।

यदि दी हुई सख्या 68 56 है तो characteristic तो 1 होगा और Mantissa 6856 का देखा जायगा। Logarithm table मे 68 के सामने 5 वे खाने में 8357 लिखा है। इसमें चौथे अङ्क 6 का Mantissa भी 68 के सामने 6 ठे खाने में (Proportional parts में) देखिए। वहा 4 लिखा है, इसे 8357 मे जोड़िए तो Mantissa 8361 होगा। अर्थात् 68 56 का लघुगुणक 1·8361 हुआ। यदि दी हुई सख्या 6846 89 हो तो Mantissa के लिए 6846 89 का उपसादन कर चार अको तक सख्या को छोटा कर लेना चाहिए अर्थात् 6847 का Mantissa देखने पर उपरोक्त सख्या का लघुगुणक 3 8355 होगा। इसी प्रकार यदि दी हुई सख्या 5 हो तो Mantissa देखने के लिए 5 के आगे दो शून्य और लगाकर 500 बना लेना चाहिए। 500 का Mantissa 6990 है अत 5 का लघुगुणक 0 6990 हुआ। 46 के लघुगुणक के लिए भी Mantissa देखने के लिए एक 0 और बढाकर सख्या 460 बनाली जायगी, इस प्रकार 46 का लघुगुणक 1 6628 हो।

प्रति लघुगुणक (Anti logarithm) ज्ञात करना—

प्रति-लघुगुणक निकालने की प्रणाली लघुगुणक ज्ञात करने की प्रणाली से बिलकुल उलटी है। पहिले प्रति लघुगुणक सारणी में दशमलव के दाए और लिखी सख्या का प्रति लघुगुणक देखा जाता है। Characteristic तो केवल दशमलव बिन्दु लगाने के काम आता है। जिसके लिए सूत्र यदि Characteristic धनात्मक हो तो (n +1) होता है, जहा n का अर्थ Characteristic की सख्या से है। यदि (n+1) = 3 है तो दशमलव बिन्दु के बाए और तीन अङ्क होगे और यदि (n + 1) = 1 है तो दशमलव बिन्दु बाए और एक ही अङ्क होगा।

यदि Characteristic ऋणात्मक है, अर्थात् उसके सिर पर (–) का चिन्ह है तो सूत्र (n–1) होगा, जहा n का अर्थ Characteristic की सख्या से है। यदि (n–1) = 1 है तो दशमलव के बिलकुल बाद और प्रथम महत्वपूर्ण (Significant) अङ्क के पहिले एक शून्य (Zero) लिख दिया जाएगा। यदि (n–1) = 2 है तो दशमलव के बिलकुल बाद मे याने दाए और दो शून्य लिख दिए जाएगे और यदि (n–1) = 0 हो तो दशमलव के दाए और एक भी शून्य नहीं लिखा जायगा।

उदाहरण के लिए

लघुगुणक	प्रति-लघुगुणक
2·5378	344 9 = 345
1 8361	68 57
3 8355	6847
0.6990	5·000
1 6628	46 01
$\bar{1}$ 2433	1751
$\bar{3}$ 843	006966
$\bar{2}$ 300	·01995

प्रति-लघुगुणक निकालने मे जो भी थोडा सा अन्तर आता है वह उपसादन (Approximation) के कारण होता है।

लघुगुणक और प्रति लघुगुणक का मुख्य प्रयोग गुणा, भाग या वर्ग घनमूल आदि निकालने मे होता है।

गुणा —यदि दो या अधिक सख्याओ को गुणा करना हो तो उन सब का लघुगुणक निकाल कर उनका योग ले लिया जाता है और योग का प्रति लघुगुणक ज्ञात कर लिया जाता है।

सूत्र —$a \times b \times c = A\ L\ (\log a + \log b + \log c)$

उदाहरण —

(485 × 89 × 3456) का मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल —

$= A\ L.\ (\log 485 + \log 89 + \log \cdot 3456)$

$= A\ L.\ (2\ 6857 + 1\ 9494 + \overline{1}\ 5386)$

$= A\ L\ 4\ 1737$

$= 14910$

नोट —लघुगुणको को जोडने मे यह ध्यान रखना चाहिए कि Mantissa हमेशा धनात्मक (+) माने जाए और Characteristic (+) या (–) जैसे भी उनके चिन्ह हो। Mantissa को जोडने पर जो हासिल आवे उसे धनात्मक Characteristic मे जोड देना चाहिए।

भाग —यदि दो सख्याओ मे भाग देना है तो दोनो का लघुगुणक निकाल कर उन्हें घटा देना चाहिए और प्राप्त सख्या का प्रति लघुगुणक निकाल लेना चाहिए।

सूत्र —$a - b = A\ L\ (\log a - \log b)$

उदाहरण 1

(485 – 89) का मान निकालिए

हल —

$= A\ L\ (\log 485 - \log 89)$

$= A\ L\ (2 \cdot 6857 - 1\ 9494)$

$= A\ L\ (1 + 1 \cdot 6857 - 1\ 9494)$

$= A.\ L\ (0\ 7363)$

$= 5\ 449$

उदाहरण 2

(89 – 485) का मान निकालिए

हल —

$= A.\ L.\ (\log 89 - \log 485)$

$= A.\ L.\ (1\ 9494 - 2\ 6857)$

$= A.\ L\ (\overline{1}\ 2637)$

$= \cdot 1835$

उदाहरण 3

प्रश्न—28·63 ÷ 758 का मान बताइए।

हल—A. L (log. 28·63 − log. 758)

= A. L. (1·4569 − 2·8797)

= A. L. (0 + 1·4569 − 2·8797)

= A. L. $\overline{2}$·5772

= ·03778

उदाहरण 4

प्रश्न—1847 ÷ 2056 का मान निकालिए।

हल—A. L (log 1847 − log. 2056)

= A L (3·2665 − 3·3131)

= A L. (2 + 1·2665 − 3·3131)

= A. L. $\overline{1}$·9534

= ·8982

उदाहरण 5

प्रश्न—·0005 ÷ ·003 का मान निकालिए।

हल— A.L (log. ·0005 − log ·003)

= A.L ($\overline{4}$·6990 − $\overline{3}$·4771)

= A.L $\overline{1}$·2219

= ·1666

उदाहरण 6

प्रश्न—·0005 ÷ ·007 का मान निकालिए।

हल—A L (log ·0005 − log. ·007)

= A. L ($\overline{4}$·6990 − $\overline{3}$·8451)

= A. L ($\overline{5}$ + 1·6990 − $\overline{3}$·8451)

= A. L. ($\overline{2}$·8539)

= ·07144

उदाहरण 7

प्रश्न—0·003 ÷ ·0005 का मान बताइए।

हल—A. L (log. 0·003 − log. ·0005)

= A L ($\overline{3}$·4771 − $\overline{4}$·6990)

= A. L ($\overline{4}$ 1·4771 − $\overline{4}$·6990)

= A. L (0·7781)

= 5·999.

किसी सख्या का वर्ग, घन या अन्य Power निकालना—

दी हुई सख्या का लघुगुणक निकाल कर Power से गुणा करके उसका प्रति लघुगुणक निकाल लिजिए।

सूत्र—$a^n = A\ L\ (n \log. a)$

उदाहरण—6^4 का मान निकालिये

हल—$A\ L\ (4 \log 6)$

$= A\ L\ (4 \times 0\ 7782)$

$= A\ L\ 3{\cdot}1128$

$= 1296$

किसी सख्या का वर्ग, घन या अन्य मूल (Root) निकालना —

दी हुई सख्या का लघुगुणक निकाल कर उसमें दिए हुए मूल (Root) का भाग देकर प्रति लघुगुणक निकाल लीजिए।

सूत्र—$\sqrt[n]{a} = A.\ L.\left(\frac{\log\ a}{n}\right)$

उदाहरण 1—$\sqrt[4]{1296}$ का मान निकालिये।

हल—$A\ L\left(\frac{\log\ 1296}{4}\right)$

$= A\ L\left(\frac{3\ 1126}{5}\right)$

$= A\ L\ (0\ 77815)$

$= 6\ 000$

उदाहरण 2—$\sqrt[4]{0\ 345}$ का मान निकालिये।

हल—$A\ L\left(\frac{\log.\ 0\ 345}{4}\right)$

$= A\ L\left(\frac{\bar{1}\ 5378}{4}\right)$

$= A\ L\left(\frac{\bar{4} + 3\ 5378}{4}\right)$

$= A\ L\ (\bar{1}\ 88445)$

$= 7661$

उदाहरण 3

प्रश्न—$\frac{26}{\sqrt{64 \cdot {}^{\cdot}84}}$ का मान निकालिए।

हल—$A.\ L\ [\log\ {\cdot}26 - \frac{1}{2}(\log\ 64 + \log\ 84)]$

$= A.\ L\ [\bar{1}{\cdot}4150 - \frac{1}{2}(\bar{1}\ 8062 + \bar{1}\ 9243)]$

$= A\ L\ [\bar{1}\ 4150 - \frac{1}{2}(\bar{1}\ 7305)]$

$= A\ L\left[\bar{1}{,}4150 - \left(\frac{\bar{2} + 1\ 7305}{2}\right)\right]$